

CONFÉRENCE MATHS C2+ : LA MODÉLISATION EN BIOMÉCANIQUE

JÉRÔME BASTIEN

Ce document est disponible à l'url suivante

<http://utbmjb.chez-alice.fr/MathC2+/index.html>

Voir http://utbmjb.chez-alice.fr/MathC2+/modelisation_biomecanique.pdf

Modélisation

Regarder les deux « vidéos¹ » suivantes qui représentent deux mouvements simples (une tâche de pointage et un squat jump), filmés, traités numériquement et reconstitués :

http://utbmjb.chez-alice.fr/MathC2+/modelisation_biomecanique_video.zip

Le monde réel qui nous entoure est fort complexe. Que l'on soit chimiste, biologiste, mécanicien, physicien, ... on s'intéresse néanmoins à une partie de ce monde, qu'il faut modéliser.

Les prévisions de la météo constituent un bel exemple de modélisation. Elles sont présentées à la télévision sous la forme d'animation et de cartes présentant des nuages ou des températures. Elles proviennent de calculs fort complexes, exécutés sur de très puissants ordinateurs. Des équations (dites différentielles) gouvernent de façon simplifiée les comportements des masses d'air ; à partir d'observations faites sur le territoire et au-delà (conditions initiales), on détermine par le calcul les températures, pression, hydrométrie dont on déduit le temps. Au cours du temps, la modélisation s'est faite plus précise, les ordinateurs plus puissants, les algorithmes plus efficaces, ce qui a permis un horizon temporel plus lointain. Tout cela mêle mathématique, physique, informatique.

Un modèle est un concept abstrait, fondé sur un ensemble d'hypothèses, d'origine axiomatique, expérimentale ou autre. Ce modèle abstrait fournit, par le biais d'équations, un certain nombre de prédictions. Le rôle des mathématiciens est d'étudier ces équations, de vérifier qu'elles sont bien posées, éventuellement de les résoudre explicitement, ou alors d'en proposer des approximations numériques. Le rôle des physiciens, chimistes, biologistes, ... est de vérifier la cohérence des résultats prédits avec ceux qui sont observés dans le réel, éventuellement de revoir les hypothèses émises, en cas de divergence. Fondamentalement, les physiciens réfléchissent aussi à l'élaboration des modèles, fondée sur la compréhension phénoménologique du réel : ils tentent d'expliquer le «comment» du réel². Plus précisément, ce n'est pas le réel qu'ils expliquent mais des modèles censés représenter le réel. Les mathématiques, dites « appliquées » ont souvent comme point de départ des travaux théoriques et ont pour objectifs de rendre rigoureux l'écriture des lois, ce qui permet par exemple d'implémenter informatiquement ces modèles. Les mathématiciens dépassent parfois le cadre des modèles dont

Date: 2 juin 2016.

1. Issus de calculs menés et présentés dans [Cre+12 ; Vil+08 ; CBL09 ; Cre+13].

2. Et non le «pourquoi». Les lois de l'attraction de Newton expliquent ce qui produit la chute de la pomme : elle subit une force en $1/r^2$. Mais ces lois n'expliquent pas pourquoi cette force s'exerce. L'origine de cette force et plus généralement les explications des principes premiers dépassent le domaine de la science et relèvent de celui de la métaphysique. Notons aussi que récemment les physiciens ont constaté, par des mesures expérimentales très précises que l'exposant 2 de la force $1/r^2$ était bien égal à 2,000 000 000 000, à 10^{-13} près !

sont issus leurs problèmes et s'intéressent à des questions qui n'intéressent plus nécessairement les modélisateurs.

Prenons un exemple concret, celui de la loi de la gravitation de Newton : deux objets situés à une distance r s'attirent avec une force proportionnelle à $1/r^2$. Cette loi, très simplement formulée, complétée par les lois de la mécanique de Newton, a permis d'étudier, entre autres, les mouvements des différentes planètes de notre système solaire et grâce aux observations de l'époque et à la loi de Kepler, de montrer que les mouvements des planètes par rapport au soleil, ou entre eux, ou d'autres astres, étaient de nature elliptique, voire hyperbolique. Ces lois corroboraient donc les observations faites et ont validé le modèle de la loi de Newton en $1/r^2$. Précédemment, les Grecs avaient une conception de l'univers bien différente. Non pas rétrograde, car elle était elle-même issue d'observation et d'une certaine logique, elle a fini, à travers les siècles à aboutir à la conception de Ptolémée qui considérait les planètes liées par des cercles virtuels et qui rendaient la description du système solaire extrêmement complexe. Plus tard, il a fallu sortir du cadre théologique omniprésent en occident pour comprendre que le géocentrisme et que la platitude de notre planète bleue n'était pas conforme avec ce que l'on observait autour de nous. Depuis longtemps, certains avaient compris que si la terre était plate, on ne verrait pas les navires en partance pour le large s'enfoncer progressivement sous l'horizon. Ce choc idéologique ayant abouti, la place était prête pour la théorie de la mécanique Newtonienne, dite classique. Cette mécanique, exprimée avec des lois beaucoup plus simples que les règles complexes de Ptolémée a permis d'expliquer le mouvement des astres, voire même de prédire l'existence d'un astre de façon théorique avant même sa découverte physique³. Jusqu'au dix-neuvième siècle, les positivistes et les progressistes associaient leur croyance à celle des mécaniciens et des mathématiciens⁴ qui croyaient avoir résolu la quasi-totalité des questions liées à leurs observations du monde réel.

À la fin du dix-neuvième siècle, deux questions restent cependant en suspens : l'explication du l'effet photo-électrique et l'avance du périhélie de la trajectoire (point le plus proche du soleil) de Mercure, non expliqué par la mécanique Newtonienne⁵. Un troisième point restait flou : pour mesurer la vitesse de la rotation de la terre, certains observaient une vitesse de la lumière curieusement indépendante du trajet qu'elle empruntait. Un inconnu publié au début du vingtième siècle deux papiers sur la relativité restreinte puis générale, le premier d'entre eux étant fondé justement sur l'hypothèse un peu farfelue que la vitesse de la lumière était indépendante de tout référentiel. Cette théorie de la relativité nécessitait aussi un cadre théorique qui sortait de la géométrie Euclidienne bien connue pour exprimer la déformation de l'espace par la présence de masses importantes. Il s'avère qu'au siècle précédent, deux mathématiciens, Riemann et Lobatchevski, s'étaient posé une question tout aussi farfelue que l'hypothèse de l'invariance de la vitesse de la lumière : est-il possible d'avoir une géométrie dans laquelle la somme des angles d'un triangle soit différente de 180° ou dans laquelle, il existent plusieurs droites distinctes, parallèles à une droite donnée et passant par un point donné ? Cette géométrie violerait donc allégrement les axiomes d'Euclide. L'invention de cette géométrie, dite non Euclidienne⁶, n'était pas absurde, puisque, même la terre n'est pas Euclidienne⁷ et a fourni un cadre théorique pour

3. Mise en évidence théorique puis expérimentale de Neptune par Le Verrier

4. En particulier par un très grand mathématicien, David Hilbert, qui imaginait que tous les problèmes mathématiques non résolus se verraient un jour traités, dans la mesure où le niveau des mathématiques est assez élevé [Mic12].

5. L'astronome Le Verrier a cru pouvoir expliquer ce phénomène par la présence d'un nouvel astre du système solaire, la planète Vulcain. Finalement, il avait tort !

6. voir http://fr.wikipedia.org/wiki/Géométrie_non_euclidienne

7. Si on a compris qu'elle n'est pas plate !

la relativité d'Einstein⁸, qu'il faut bien nommer. Cette relativité a permis d'expliquer le décalage du périhélie de Mercure et a pu être validée expérimentalement en observant la distance apparente varier entre deux étoiles, selon qu'une planète passe ou non entre elles et la terre. Le cadre théorique relativiste est mathématiquement plus subtil que celui de la mécanique Newtonienne⁹ mais cette nouvelle théorie, permet d'une part d'englober la théorie Newtonienne, et d'autre part d'expliquer des faits précédemment inexpliqués. Ce sont donc, pour simplifier, les deux conditions pour qu'une nouvelle théorie puisse en détrôner une autre. Que l'on se rassure, la théorie de la mécanique classique a de beaux jours devant elle, puisqu'aux petites vitesses et aux petites distances et en particulier, au quotidien, celle-ci décrit très bien notre environnement. Nous utiliserons cette théorie dans l'atelier qui suivra ! Enfin, l'effet photo-électrique a été expliqué plus tard dans les années 1930 avec l'apparition de la théorie des quanta et de la mécanique quantique, qui gouverne cette fois-ci l'infiniment petit.

Bref, les trois questions non résolues se sont vu résoudre par deux grands chocs intellectuels. Entre l'infiniment petit et l'infiniment grand, les deux modèles de la théorie relativiste et quantique ne coexistent pas bien, notamment aux tous premiers instant de l'univers¹⁰ où ces deux échelles viennent alors se confondre ! La théorie unificatrice est le dernier cheval de bataille des physiciens qui voudraient voir ces deux mondes se rejoindre et pouvoir exprimer les quatre forces fondamentale de l'univers décrite par une seule et même force.

Dans des domaines concrets ou théoriques, l'émergence de nouvelles théories provient souvent d'une révolution (intellectuelle) et la rupture avec l'existant, comme l'illustre l'invention de la relativité. En mathématique, les grandes découvertes se sont souvent accompagnées de ruptures avec les choses jusque là admises par tous. En témoignent l'apparition des nombres irrationnels chez les Grecs, persuadés que toute distance était un rapport d'entiers ou l'apparition des nombres complexes plus tardive, en total désaccord avec les règles de calculs de l'époque qui ne manipulaient que des racines carrées de nombres positifs. La mise au point de la théorie de Galois, au cours du dix-neuvième siècle, fondatrice d'une partie de l'algèbre moderne n'a pas été tout de suite jugée à sa juste valeur. De plus, mort à 24 ans dans un duel, il aurait écrit sa théorie sur les groupes en une nuit, la dernière de sa vie¹¹. De vouloir se poser des questions sur ce que tout le monde tient pour vrai n'est pas nécessairement

8. Il faut distinguer la relativité restreinte et la relativité générale.

La relativité restreinte est la théorie formelle élaborée par Albert Einstein en 1905 en vue de tirer toutes les conséquences physiques de la relativité galiléenne et du principe selon lequel la vitesse de la lumière dans le vide a la même valeur dans tous les référentiels galiléens. La théorie de la relativité restreinte a établi de nouvelles formules permettant de passer d'un référentiel galiléen à un autre. Les équations correspondantes conduisent à des prévisions de phénomènes qui heurtent le sens commun (mais aucune de ces prévisions n'a été infirmée par l'expérience), un des plus surprenants étant le ralentissement des horloges en mouvement¹, qui a permis de concevoir l'expérience de pensée souvent appelée paradoxe des jumeaux. (extrait de http://fr.wikipedia.org/wiki/Relativité_restreinte).

La relativité générale englobe et supprime la théorie de la gravitation universelle d'Isaac Newton qui en représente la limite aux petites vitesses (comparées à la vitesse de la lumière). La relativité générale est fondée sur des concepts radicalement différents de ceux de la gravitation newtonienne. Elle énonce notamment que la gravitation n'est pas une force, mais la manifestation de la courbure de l'espace (en fait de l'espace-temps) et qui diffère suivant le référentiel de l'observateur. Cette théorie relativiste de la gravitation prédit des effets absents de la théorie newtonienne mais vérifiés, comme l'expansion de l'Univers, les ondes gravitationnelles et les trous noirs (extrait de http://fr.wikipedia.org/wiki/Relativité_générale).

9. Bien que le problème des trois corps, typiquement du champ de la mécanique Newtonienne, soit resté longtemps ardu !

10. dans la théorie du big-bang

11. Parfois, considéré comme le Rimbaud des mathématiques, il a été emprisonné, considéré comme antiroyaliste, ce qui était mal vu à l'époque de la Restauration.

signe de folie ! N'hésitez pas à vous poser aussi des questions sur les règles de calculs que vous avez apprises ou que vous apprendrez plus tard : pourquoi ne pas diviser par zéro, pourquoi ne considérer que des racines de nombres positifs, pourquoi un nombre non nul élevé à la puissance zéro vaut un, pourquoi les radians, pourquoi les bases 24, 60 ou 360 ? Pour toute ces questions, on pourra consulter [Bas12].

Notons aussi que l'optimisme des mathématiciens du dix-neuvième siècle signalé plus tôt (en note de bas de page 2) a été aussi mis à mal par l'apparition des résultats d'incomplétude et d'indécidabilité démontrés au vingtième siècle par Gödel : il existe des résultats mathématiques, dont on ne peut montrer s'ils sont vrais ou faux. Ce résultat a été démontré !

La biomécanique

La cadre de la biomécanique est, pour simplifier, l'étude de la mécanique appliquée au domaine du vivant, souvent celui de l'animal et de l'homme en particulier.

Restreignons-nous au domaine de l'homme. Un homme est constitué de parties osseuses, charnelles, musculaires, liquides ou tout autre forme de « matériaux » comme les tendons, les ligaments, les cheveux Le cerveau, le système nerveux central et les terminaisons nerveuses dirigent tout cela. Enfin, une grande dimension psychologique, voire psychiatrique ou psychanalytique devraient compléter cette approche physiologique. Au niveau physiologique, de nombreux mécanismes doivent être pris en compte pour comprendre comment interagissent les constituants de notre corps. Une partie de ces phénomènes est étudié par mon laboratoire à l'Université Lyon 1, le Centre de Recherche et d'Innovation sur le Sport (CRIS, voir <http://cris.univ-lyon1.fr/>). Une de ces approches consiste à ne considérer que le comportement mécanique de l'homme, non pas pour le réduire à sa plus simple expression, mais pour tenter de fournir un certain nombre de modèles, permettant de simuler des mouvements, comme la tâche de pointage et le squatt jump présentés initialement.

Le modèle – simplifié, je le rappelle, par rapport au sujet – est donc constitué d'un certain nombre de parties du corps, définies de façon anatomique : pieds, jambe, cuisse, ..., qui seront toutes considérées comme rigides indéformables. À chacune d'elles, nous allons pouvoir appliquer ainsi les règles de la mécanique Newtonienne qui permet de décrire le mouvement des solides ainsi définis. De plus, les liaisons entre ces segments, qui représentent les articulations, seront considérées comme ponctuelles et possédant des degrés de liberté qui dépendent de l'articulation considérée. Naturellement, ces hypothèse de rigidité et ponctualité des articulations ne sont tout à fait vraies. Néanmoins, les calculs issus de cette modélisation fourniront des prédictions conformes aux observations et suffisamment proches des mesures faites. Ici, la finesse du modèle dépend du nombre de segments considérés choisi. Trop petit, il ne prend pas en compte certaines déformations ; trop grand, il rend le modèle trop complexe et trop difficile à interpréter en fonction des observations faites. Ce juste choix du modèle, ni trop simple, ni trop compliqué, sera toujours le premier choix du modélisateur.

Éloignons-nous du cadre strictement humain, mais restons dans le domaine sportif, en anticipant sur la suite¹². Si on néglige les frottements de l'air, le mouvement d'un ballon peut être assimilé à celui d'un objet subissant une chute libre. La trajectoire de cet objet, une parabole, peut être déterminée de façon purement géométrique et il est relativement aisé de montrer que le ballon passe au-dessus du mur de joueurs. Cependant, sans prise en compte des frottement de l'air, on constate que le ballon passe au-dessus de la cage des buts, alors que l'observateur le voit rentrer. Notre modèle est donc

12. Voir [Bas15a]

trop simple et il faut rajouter l'effet Magnus, rendant les calculs plus difficiles, mais faisables, pour constater cette fois-ci que la trajectoire du ballon passe sous la barre transversale des buts. Il est donc parfois nécessaire d'affiner un modèle trop simple si celui-ci fournit des résultats trop différents de ceux de la réalité.

Considérons maintenant le mouvement de squat-jump précédemment présenté. On considère le sujet immobile dans son plan sagittal, bras tendus, parallèles au tronc, lui-même droit et perpendiculaire aux cuisses. Celle-ci sont perpendiculaires aux jambes¹³. Le sujet a pour consigne de sauter le plus haut possible, en se détendant. Nous émettons un certains nombres d'hypothèses qui sont validées, *a priori* ou *a posteriori* :

- Chacun des quatre « segments » considérés (tronc-tête-bras, cuisse, jambes, pieds) restent rigides et droits ;
- Les membres associés subissent le même mouvement (les deux pieds, les deux jambes ...) ;
- Le mouvement se fait dans le plan sagital du sujet.

Naturellement, ces hypothèses sont plus ou moins vraies, mais sont tenues pour vraies. Le principe des travaux menés, au sein du CRIS, dans [Cre+12 ; Vil+08 ; CBL09 ; Cre+13] est d'interpréter les données expérimentales et de tenter d'en déduire des lois horaires gouvernant ces mouvements. Dans un premier temps, il faut définir les données expérimentales choisies, qui sont de deux types : les déplacements des articulations, sur lesquelles des capteurs seront placés et la force exercée par le sujet sur le sol, dans le cas du squat jump, que l'on enregistre grâce à une plate-forme de force. Les déplacements enregistrés, obtenus par digitalisation des images, permettent de reconstruire en totalité le corps du sujet, grâce à l'hypothèse de l'aspect indéformable des différents segments considérés. Par ailleurs, pour pouvoir traiter ces données, il est indispensable d'obtenir des données anthropométriques relatives au sujet (centre de gravité, masse et longueurs des segments ainsi que d'autres grandeurs mécanique spécifiques), qui sont, soit connues et tabulées sur des sujets témoins, soit mesurées parfois directement à partir de données enregistrées¹⁴. On dispose donc de données de deux sortes, les unes, intrinsèques au sujet (grandeurs mécaniques) et les autres dites extrinsèques, qui dépendent du mouvement réalisé. Ensuite, vient une phase, dite de dynamique inverse, qui, à partir des lois de la mécanique classique appliquées à chacun des segments choisis, considérés donc comme des solides indéformables, et à partir des données précédentes, permet de déterminer successivement les efforts, dits inter-articulaires et qui représentent les efforts de chacun des segments sur les autres. Par exemple, l'action du tronc sur la cuisse, peut être mise en relation avec un muscle ou un groupe de muscles qui est gouverné directement par la contraction d'un des muscles le plus puissant de l'homme, le grand fessier. Ces calculs permettent donc, *in fine* de déterminer l'action des différents muscles et d'en comprendre l'organisation temporelle. Naturellement, les calculs menés sont difficiles à mettre en œuvre et l'usage de l'informatique, mais aussi des mathématiques, est indispensable. De plus, les signaux bruts, délivrés par les appareils de mesures, doivent être filtrés numériquement, puisque des erreurs de mesures, toujours présentes, entachent les résultats. Là encore, point de salut sans les mathématiques !

Les différentes notions décrites ici : déplacements, vitesses, accélérations et forces, sont liées entre elles par la seconde lois de la mécanique de Newton qui met en relation accélération et force.

Ces notions seront introduites informellement et manipulées cette semaine dans [Bas15a].

13. Au sens anatomique du terme.

14. Voir [BBM13a ; BBM13b].

Tout cela réalisé, il convient de préciser ce que l'on cherche. D'aucuns proposent des modèles d'actions musculaires phénoménologiques, c'est-à-dire, qui s'appuient sur la structure précise des constituants des cellules musculaire. Il résulte de ces travaux la mise en place d'équations¹⁵ qui prévoient les liens qui existent entre les activations chimiques des muscles par le système nerveux central et les mouvements que créent ces muscles au sein du modèle choisi du sujet. Ces équations peuvent être elles-mêmes être réintroduites dans le modèle du sujet et aboutir à la création de mannequins numériques. Ces objets virtuels, gouvernés par les modèles mathématiques de la biomécanique, sont ensuite post-traités par des outils géométriques¹⁶ afin d'en obtenir des images réelles en 3D. Ces mannequins peuvent donc permettre de réaliser des expériences purement virtuelles, voire d'être utilisés dans les vidéo et mondes virtuels, ou des animations 3D, réalistes. Notre ambition, dans les travaux cités, était de moins grande envergure. Il s'agissait de proposer des modèles non pas phénoménologiques, mais cinématiques, c'est-à-dire de proposer des lois horaires qui gèrent les déplacements et des vitesses des segments les uns par rapport aux autres, en adéquation avec les mesures expérimentales faites. Il s'avère que les déplacements des articulations ne sont pas adaptés ici, à la description des mouvements des segments ; ce sont les angles dit articulaires, c'est-à-dire les angles entre chaque segment et le segment suivant, qui traduisent la réalité physiologique de l'action des muscles. Autrement dit pour certains types de mouvement, chaque mouvement d'un segment par rapport au suivant est totalement déterminé par l'angle choisi ; par exemple, le mouvement de la cuisse par rapport à la jambe est déterminé par l'angle interarticulaire du genou. Dans [Cre+12 ; Vil+08 ; CBL09 ; Cre+13], nous avons constaté, sur un grand nombre de sujets lors d'un grand nombre d'expériences, que toutes ces lois étaient du type sigmoïdal, c'est-à-dire, en forme de S allongé, présentant toutes des caractéristiques communes : une phase d'accélération, suivie d'une phase de décélération (voir figure 1). Ce type de courbe est souvent utilisée en statistique, mais il a fallu adapter et créer des types de fonctions mathématiques particulières, permettant de recréer ces courbes empiriques. Cette preuve de la récurrence des courbes sigmoïdales n'est donc pas une preuve logique et mathématiques, mais est justifiée *a posteriori* sur les expériences faites et dans le cadre de deux mouvements, la tâche de pointage et le squat jump. Bref, à travers toute cette chaîne de traitement et de calculs par ordinateurs, nous avons été capables de recomposer le mouvement expérimental à partir des modèles sigmoïdes proposés. L'intérêt est double : il permet d'une part d'obtenir un mouvement très proche du mouvement expérimental, possédant des régularités mathématiques¹⁷ intéressantes et permettant donc de déterminer proprement les accélérations. D'autre part, les données expérimentales en grand nombre¹⁸ ont finalement été remplacées par un nombre de paramètres beaucoup plus petit que les tailles des données expérimentales, ce qui permet de reconstituer le mouvement à peu de frais¹⁹ ! Regarder de nouveau les vidéos introduites initialement.

Monde réel, monde des idées et mathématiques

Les mathématiques, considérés parfois dans les petites classes comme rébarbatives et peu ludiques, sont en fait essentielles à la modélisation et ont des enjeux qui peuvent être très importants, aussi bien pour le quotidien de l'individu λ , mais aussi pour des domaines éloignés comme la recherche

15. dites différentielles.

16. aussi utilisés par la conception assisté par ordinateur, où là encore les mathématiques sont prédominantes.

17. c'est-à-dire que l'on pourra dériver deux fois voire plus.

18. correspondant aux acquisitions de mesures de points sur plusieurs secondes, à une fréquence de 25 ou de 50 Hz.

19. contrairement à ce que l'on fait en capture de mouvements.

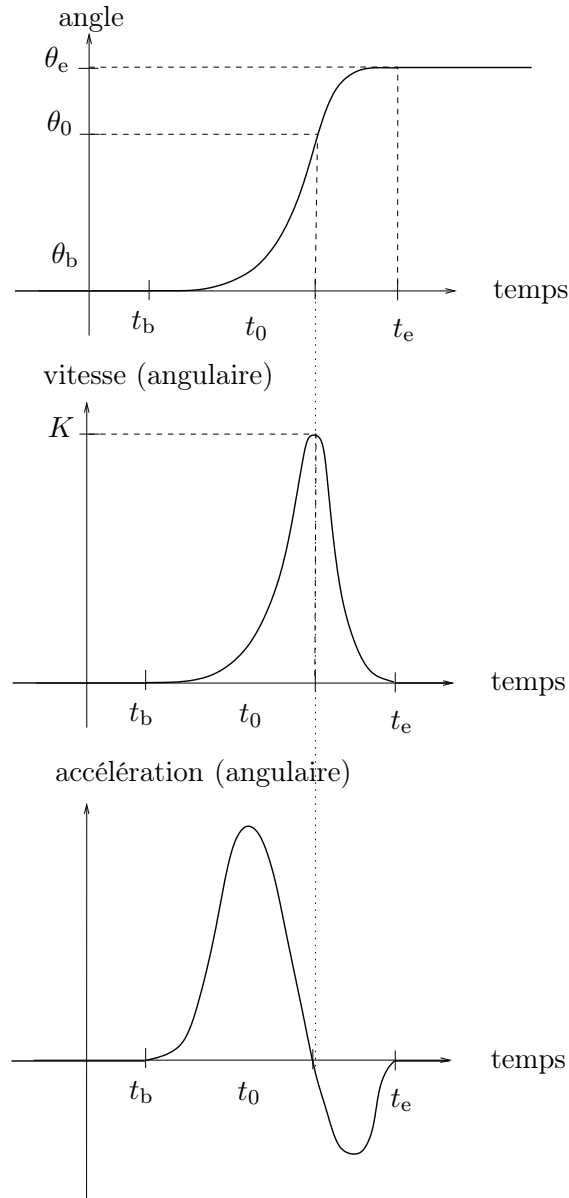


FIGURE 1. Forme de la sigmoïde : angle, vitesse et accélération en fonction du temps.

en aérospatiale. L'utilité ou pas d'une recherche appliquées-fondamentales, débat qui se pose non seulement pour les mathématiques mais aussi pour d'autres matières de sciences humaines ne sera pas évoquée²⁰.

20. Notons qu'en dehors de ce cadre utilitariste mais pour « l'honneur de l'esprit humain », certaines théories mathématiciennes sont belles parce qu'elle ne « servent à rien », à rien d'autre du moins que de construire de jolis objets et qui semblent ne pas avoir d'applications directes et immédiates. Le dernier théorème de Fermat (voir http://fr.wikipedia.org/wiki/Dernier_théorème_de_Fermat) affirme que l'équation $x^n + y^n = z^n$ n'a pas de solutions entières non nulles dès que l'entier n est supérieur ou égal à 3. Il a été posé comme conjecture par Fermat au dix-septième siècle et a tenu en haleine de nombreux mathématiciens jusqu'à sa démonstration aux rebondissements multiples par Andrew Wiles en 1994. Ce théorème n'a peut-être pas d'utilité mais il a réuni entre elles de nombreux

Plusieurs niveaux d'analyse peuvent être proposés.

Dans un premier temps, l'intérêt des mathématiques dans le secondaire peut être enrichi par une approche ludique²¹ et les problèmes posés peuvent être considérés comme des énigmes. Plus profondément, les mathématiques constituent un monde conceptuel, dans lequel il n'est pas désagréable d'abord de cheminer, voire plus tard, d'en découvrir de nouveaux sentiers, et même pourquoi de fouler des territoires encore totalement vierges.

Une élève de sixième, assez brillante, m'a demandé un jour, si les traits des triangles, tracés au tableau ou sur son cahier, avaient une véritable épaisseur. Cette question met en évidence la dissociation qu'elle avait peut-être comprise de façon inconsciente, entre l'objet triangle, formé de trois segments de droites et son ou plutôt l'ensemble de ses représentants physiques. Chez les Grecs, la géométrie faisait partie du savoir préliminaire à l'apprentissage de la philosophie. Platon considérait d'une part le monde des idées et d'autre part la réalité matérielle. Le mythe de la caverne est une illustration de cette opposition : enchaînés, dos à un feu qui brûle dans une caverne, les hommes ne voient que les ombres des choses. Ils n'ont donc de ces choses qu'une image approchée. Les hommes n'ont donc pas accès au monde des idées, mais n'en entrevoient que les représentants. Par exemple, il existe un concept de chaise, idéal, qui se décline sous toutes ses formes présentes sur terre. L'artiste a lui la capacité d'entrevoir le concept de chaise et d'en créer des représentants, tandis que le philosophe a accès directement au concept de chaise. Il en est exactement de même pour le concept de triangle ou de parabole, objets conceptuels qui existent dans le monde des idées (celui de la géométrie plane plutôt) et qui se déclinent dans la réalité sous la forme des schémas qui en sont faits aux tableaux ou sur des cahiers, voire même sur des écrans d'ordinateurs²², ou encore sur des rails en bois²³, qui ne sont qu'une approche matérielle de segments, cercles et paraboles. En poursuivant cette métaphore, on peut considérer que la compréhension du concept de segments, infiniment minces, constitué d'un nombre infini de points, est déjà une approche du monde conceptuel des mathématiques. Si on dissocie ce monde des concepts mathématiques du monde réel, on peut se demander, sur le plan philosophique, si les cerveaux des hommes, qui sont bien réels, et qui conçoivent des idées mathématiques, font déjà partie du monde des mathématiques. Qu'en est-il des concepts eux-même ? La géométrie des Grecs est apparue chez les Égyptiens qui avaient à partager les terres²⁴ libérées par le Nil, après les crues. Cette géométrie a produit des concepts purs ; qu'en aurait-il été si le Nil n'avait pas débordé ou si certains n'avaient pas dessiné des triangles sur le sable, avant de les idéaliser ? La Géométrie, en tant qu'ensemble de concepts, est-elle tributaire du monde réel dont elle est issue ? Existe-t-elle si l'humanité disparaît ?

Ces questions sont ouvertes, mais on peut réfléchir sur l'apparition de la géométrie non Euclidienne, évoquée plus haut. Elle a conduit, entre autres, à la description d'un espace-temps courbe,

domaines des mathématiques et a ouvert des tas de portes dans la recherche fondamentale. Concluons par la célèbre impossibilité de la quadrature du cercle – c'est-à-dire « construire à la règle et au compas un carré et un cercle de même surface », ce qui revient à construire un segment de longueur π – qui a « tenu » comme conjecture pendant plus de deux millénaires avant d'être montrée au dix-neuvième siècle !

21. comme le cadre de cette semaine MathC2+, du moins, je l'espère

22. où le problème de l'anti-aliasing est bien une preuve du côté matériel de la représentation d'une courbe à l'écran.

23. sur lesquels on jouera dans la dernière partie de cette semaine.

24. l'origine étymologique de ce mot est grecque : *geōmetria*, "géo" désignant la terre et "métrie" la mesure. La géométrie a d'abord désigné l'arpentage avant de se dire de la science géométrique de l'espace. Au dix-septième siècle, ce mot désignait de façon extensive les mathématiques [Rey98].

utile à la théorie de la relativité d'Einstein. Cependant, elle est apparue tout d'abord comme une question théorique consistant à réfuter certains des éléments d'Euclide. D'autres théories sont apparues de façon purement conceptuelle, indépendamment du monde réel. Plus troublant, on peut évoquer la notion d'inconscient collectif²⁵ chez les mathématiciens. Par exemple, un résultat connu n'est pas toujours découvert par une seule personne et peut être dans l'air du temps. Citons l'exemple de l'invention de la notion de dérivée, qu'auraient découvert, de façon distincte, Newton et Leibniz. D'autres pensent parfois que les concepts de mathématiques sont inhérents à tout individu, digne de pensée et que, si des civilisations extra-terrestres existaient, un stade nécessaire de leur développement passerait par l'invention des nombres, en particulier des nombres entiers et des nombres premiers.

Cependant et pour faire la part belle aux utilitaristes, retenons que, sans les questionnements des fondateurs de la géométrie non Euclidienne, le GPS n'aurait peut-être pas existé ! De même que les chaînes HIFI ou MP3 sans les travaux de Fourier sur l'équation de la chaleur ...

Un dernier niveau d'analyse peut être proposé sur les rapport entre les mathématiques et le monde réel. D'abord considérées comme simples jeux ou énigmes, les mathématiques sont fondamentales pour la notion de modèles ; elles pouvaient faire partie d'un monde, peut-être immatériel. Certains physiciens théoriques, qui travaillent entre autres sur l'astronomie, baignent toute la journée dans différentes équations, qui gouvernent les étoiles et la structure de la matière, allant de l'infiniment petit à l'infiniment grand. Ils considèrent la matière comme des ondes²⁶ ; ces ondes étant finalement régies par des équations, ils considèrent non pas que ces équations forment une théorie mathématicienne dissociée du réel mais que ces équations *sont* le monde réel. Bien plus qu'être un monde conceptuel, parallèle au notre ou totalement indépendant, ce monde de mathématiques serait donc le monde dans lequel on vit. Ce point de vue, qui est plutôt d'ordre philosophique, est bien entendu, plus une position théorique qu'adoptent certains chercheurs et il n'est pas question de vouloir le démontrer.

Pour conclure cet exposé, j'annonce que le parti pris choisi de la présentation de la parabole pour la suite²⁷ est une définition purement géométrique. En effet, vous avez dû apprendre l'équation de la parabole sous la forme $y = x^2$, voire $y = ax^2 + bx + c$. La parabole est un « vieil » objet géométrique connu depuis longtemps par les Grecs, aussi bien sous la forme d'une conique (intersection cône-plan) que d'une courbe de points, équidistants d'un point et d'une droite. Un certains nombre de propriétés de cette parabole a probablement été mis au point sans connaître son expression analytique²⁸ et je suis persuadé que de considérer un objet géométrique de façon conceptuelle est beaucoup plus fécond que de le définir de façon analytique, même si celle-ci reste importante. Toutes les preuves des propriétés intrinsèques à la parabole peuvent être démontrées de façon analytique, mais celles-ci sous souvent fastidieuses et ne révèlent pas nécessairement la nature géométrique profonde de l'objet parabole. De façon plus générale, la géométrie pure est une passerelle vers le monde des idées précédemment évoqué. *Essayez de ne pas l'oublier avant de river vos yeux aux écrans, parois modernes de la caverne de Platon, le dos tourné à la source d'une partie du savoir.*

Références

[Bas12] J. BASTIEN. *Vérité mathématique : paradoxe, preuve et conventions. Se méfier de ses réflexes et de ses habitudes*. Transparents de l'UE Zététique de l'INSA de Lyon. 2012. 79 pages.

25. évoquée par le psychiatre suisse Carl Gustav Jung ; voir http://fr.wikipedia.org/wiki/Inconscient_collectif

26. principe de dualité onde-particule.

27. Voir [Bas15a].

28. Les Grecs n'utilisait même pas la notation x^2 !

- [Bas15a] J. BASTIEN. *Atelier Maths C2+ : Parabole et effet Magnus au football*. MathC2+ à l'université Lyon I, disponible sur le web : http://utbmjb.cher-alice.fr/MathC2+/parabole_effet_magnus.pdf. 2015. 54 pages.
- [Bas15b] J. BASTIEN. *Conférence Maths C2+ : La modélisation en biomécanique*. MathC2+ à l'université Lyon I, disponible sur le web : http://utbmjb.cher-alice.fr/MathC2+/modelisation_biomecanique.pdf. 2015. 10 pages.
- [BBM13a] J. BASTIEN, Y. BLACHE et K. MONTEIL. “Estimation of anthropometrical and inertial body parameters”. Dans : *4th International Conference on Mathematics in Sport*. Sous la direction de D. GOOSSENS, F. SPIEKSMAN et P. SCARF. ISBN : 9789081409964. KU Leuven, Faculty of Business and Economics. Leuven, Belgique, 5–7 juin 2013.
- [BBM13b] J. BASTIEN, Y. BLACHE et K. MONTEIL. *Estimation of anthropometrical and inertial body parameters using double integration of residual torques and forces during squat jump*. 2013. arXiv :1305.6426.
- [CBL09] T. CREVEAUX, J. BASTIEN et P. LEGRENEUR. “Model of joint angle displacement : application to vertical jumping”. Dans : *13 ième congrès international de l'ACAPS*. Approche Pluridisciplinaire de la Motricité Humaine. Lyon, 28–30 oct. 2009, pages 49–50.
- [Cre+12] T. CREVEAUX, J. BASTIEN, C. VILLARS et P. LEGRENEUR. *Model of joint displacement using sigmoid function. Experimental approach for planar pointing task and squat jump*. 2012. arXiv :1207.2627.
- [Cre+13] T. CREVEAUX, J. BASTIEN, C. VILLARS et P. LEGRENEUR. “Model of joint displacement using sigmoid function. Experimental approach for planar pointing task and squat jump”. Dans : *4th International Conference on Mathematics in Sport*. Sous la direction de D. GOOSSENS, F. SPIEKSMAN et P. SCARF. ISBN : 9789081409964. KU Leuven, Faculty of Business and Economics. Leuven, Belgique, 5–7 juin 2013.
- [Mic12] T. MICHAELIDES. *Petits meurtres entre mathématiciens*. Éditions le pommier, 2012.
- [Rey98] A. REY. *Dictionnaire historique de la langue française*. Paris : Dictionnaires Le Robert, 1998.
- [Vil+08] C. VILLARS, J. BASTIEN, K. MONTEIL et P. LEGRENEUR. “Kinematic modelisation of joint displacement : validation in human pointing task”. Dans : *Industrial Simulation Conference (ISC 08)*. CESH, Lyon, France, 9–11 juin 2008.

CENTRE DE RECHERCHE ET D'INNOVATION SUR LE SPORT, U.F.R.S.T.A.P.S., UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD
 - LYON 1, 27-29, BD DU 11 NOVEMBRE 1918, 69622 VILLEURBANNE CEDEX, FRANCE
E-mail address: `jerome.bastien@univ-lyon1.fr`