

CONFÉRENCE MATHS C2+ : LA MODÉLISATION DE L'EFFET MAGNUS

JÉRÔME BASTIEN

Ce document est disponible à l'url suivante

<http://utbmjb.chez-alice.fr/MathC2+/index.html>

Voir http://utbmjb.chez-alice.fr/MathC2+/modelisation_magnus.pdf

On pourra aussi consulter l'exposé et l'atelier MathC2+ présentés en 2015 [Bas15a ; Bas15c].

Enjeux de la modélisation pour le sport

Voir la deux vidéo suivante relative au lancer de poids :

<http://youtu.be/R4nCFtg4YfM>

On verra plus tard que si un état initial est donné, il sera possible de prévoir le futur, par le calcul.

Sur cette vidéo, on comprends que le lancer de poids est très technique et obéit à un certain nombre de règles. L'enjeu pour le sportif est de comprendre les paramètres qu'ils doit optimiser afin de lancer le poids le plus loin possible. Les paramètres sur lesquels le sportif peut jouer concernent le poids au moment où il quitte la main du sportif, en particulier, sa hauteur, la vitesse et l'angle de lancer. Naturellement sa constitution influencent beaucoup l'efficacité du lancer, mais on supposera que celle-ci a été acquise précédemment lors d'un entraînement spécifique et intense mais aussi peut-être grâce à une sélection préalable et sévère !

La cadre de la biomécanique est, pour simplifier, l'étude de la mécanique appliquée au domaine du vivant, souvent celui de l'animal et de l'homme en particulier.

Restreignons-nous au domaine de l'homme. Un homme est constitué de parties osseuses, charnelles, musculaires, liquides ou tout autre forme de « matériaux » comme les tendons, les ligaments, les cheveux Le cerveau, le système nerveux central et les terminaisons nerveuses dirigent tout cela. Enfin, une grande dimension psychologique, voire psychiatrique ou psychanalytique devraient compléter cette approche physiologique. Au niveau physiologique, de nombreux mécanismes doivent être pris en compte pour comprendre comment interagissent les constituants de notre corps. Une partie de ces phénomènes est étudié par mon laboratoire à l'Université Lyon 1, le Centre de Recherche et d'Innovation sur le Sport (CRIS, voir <http://cris.univ-lyon1.fr/>). Une de ces approches consiste à ne considérer que le comportement mécanique de l'homme, non pas pour le réduire à sa plus simple expression, mais pour tenter de fournir un certain nombre de modèles, permettant de simuler des mouvements, comme la tâche de pointage et le squatt, qui sont souvent étudiés pour valider des modèles.

La question que se pose alors l'entraîneur est de déterminer les choix optimaux des paramètres cités. L'expérience peut permettre de les optimiser mais une compréhension de la trajectoire peut permettre de les choisir de façon pertinente. Il apparaît pertinent de penser que la vitesse de lancer doit être la plus élevée possible et la hauteur de lancer la plus élevée possible. Qu'en est-il de l'angle de lancer ?

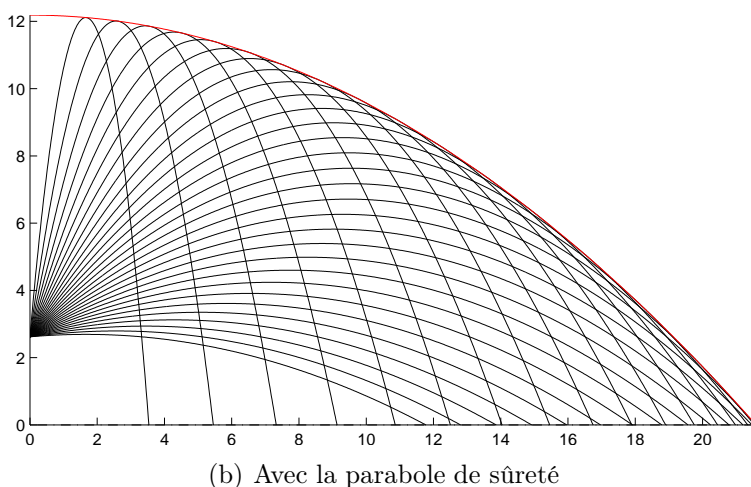
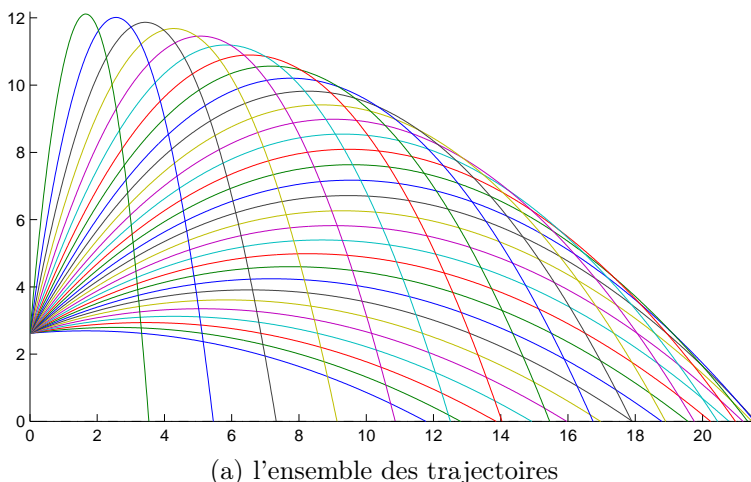


FIGURE 1. L'ensemble des trajectoires

Une façon de procéder est de tenter de déterminer la trajectoire du poids en fonction des paramètres à optimiser et de les choisir justement tels que la distance horizontale parcourue par le poids soit la plus importante possible. Dans le cas du lancer de poids, sous certaines hypothèses, valables pour notre exemple, la trajectoire du poids est une parabole, que l'on peut déterminer totalement à partir de la position et de la vitesse initiale de l'objet.

Prenons par exemple l'épreuve du lancé de poids¹ avec $v_0 = 13.70$ m/s et une hauteur de lancer $a = 2.62$ m. On obtient quelques figures indiquées en figure 1.

Après calculs, on peut montrer que l'angle optimal correspond à un angle de $\alpha = 41.54^\circ$ pour une distance égale à $x = 21.59$ m. Voir figure 2. Pour plus de détails, on pourra consulter [Bas15b, Annexe "Parabole de sûreté"] ou

http://fr.wikipedia.org/wiki/Parabole_de_sûreté.

Les premiers calculs de balistique datent du seizième siècle.

1. Donnée issues de <http://labolycee.org/2004/2004-11-NelleCaledonie-Sujet-Exo3-Lancer-poids-5-5pts.pdf>

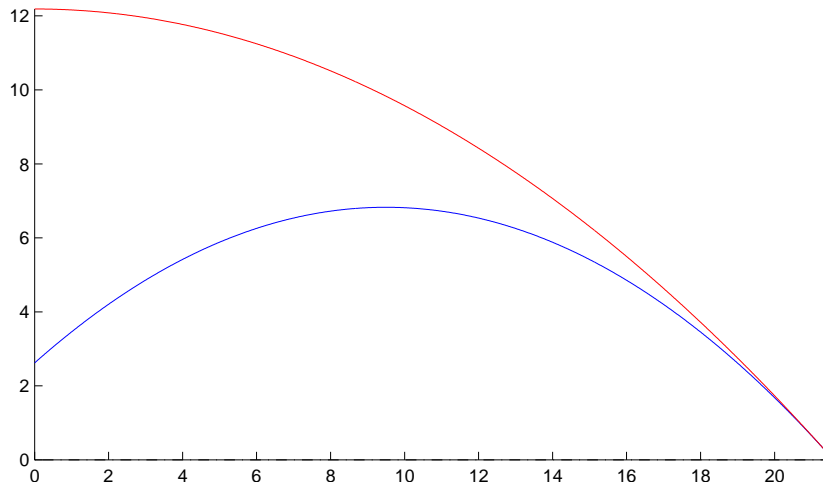


FIGURE 2. L'angle optimal.

Comme souvent, les calculs militaires ont donc servi à mieux comprendre des expériences « civiles », ici la chute libre !

Les prévisions de la météo constituent un bel exemple de modélisation. Elles sont présentées à la télévision sous la forme d'animation et de cartes présentant des nuages ou des températures. Elles proviennent de calculs fort complexes, exécutés sur de très puissants ordinateurs. Des équations (dites différentielles) gouvernent de façon simplifiée les comportements des masses d'air ; à partir d'observations faites sur le territoire et au-delà (conditions initiales), on détermine par le calcul les températures, pression, hydrométrie dont on déduit le temps. Au cours du temps, la modélisation s'est faite plus précise, les ordinateurs plus puissants, les algorithmes plus efficaces, ce qui a permis un horizon temporel plus lointain. Tout cela mêle mathématique, physique, informatique.

Un modèle est un concept abstrait, fondé sur un ensemble d'hypothèses, d'origine axiomatique, expérimentale ou autre. Ce modèle abstrait fournit, par le biais d'équations, un certain nombre de prédictions. Le rôle des mathématiciens est d'étudier ces équations, de vérifier qu'elles sont bien posées, éventuellement de les résoudre explicitement, ou alors d'en proposer des approximations numériques. Le rôle des physiciens, chimistes, biologistes, ... est de vérifier la cohérence des résultats prédits avec ceux qui sont observés dans le réel, éventuellement de revoir les hypothèses émises, en cas de divergence. Fondamentalement, les physiciens réfléchissent aussi à l'élaboration des modèles, fondée sur la compréhension phénoménologique du réel : ils tentent d'expliquer le «comment» du réel². Plus précisément, ce n'est pas le réel qu'ils expliquent mais des modèles censés représenter le réel. Les mathématiques, dites « appliquées » ont souvent comme point de départ des travaux théoriques et ont pour objectifs de rendre rigoureux l'écriture des lois, ce qui permet par exemple d'implémenter informatiquement ces modèles. Les mathématiciens dépassent parfois le cadre des modèles dont

2. Et non le «pourquoi». Les lois de l'attraction de Newton expliquent ce qui produit la chute de la pomme : elle subit une force en $1/r^2$. Mais ces lois n'expliquent pas pourquoi cette force s'exerce. L'origine de cette force et plus généralement les explications des principes premiers dépassent le domaine de la science et relèvent de celui de la métaphysique. Notons aussi que récemment les physiciens ont constaté, par des mesures expérimentales très précises que l'exposant 2 de la force $1/r^2$ était bien égal à 2,000 0000 000 000, à 10^{-13} près !

sont issus leurs problèmes et s'intéressent à des questions qui n'intéressent plus nécessairement les modélisateurs.

La modélisation de l'effet Magnus

Quelque-unes des notions introduites seront revues et manipulées cette semaine dans [Bas16a].

Voir

http://utbmjb.chez-alice.fr/MathC2+/parabole_circuit_train.pdf

On pourra consulter pour plus de détail [Bas15a] ou [Bas15b, Annexes K et L].

Voir les deux vidéo suivantes relatives à l'effet Magnus et son application au football :

<http://www.youtube.com/watch?v=IKto5H7cVQA>

<http://i.kinja-img.com/gawker-media/image/upload/s--WslELNt4--/1348091010756291175.gif>

Deux autres vidéos :

<http://www.youtube.com/watch?v=m12ne6YzUuM>

http://www.dailymotion.com/video/x96ctk_vortex-sur-mirage-2000-visu-en-souf_tech

Quelles sont vos réactions face à ces vidéos. Les trajectoires du ballon ou du boomerang sont-elles des paraboles ? Sauriez-vous l'expliquer ?

Un joueur de football donne un coup de pied dans un ballon, posé au sol. On suppose donc connus certains paramètres relatifs au ballon (position et vitesse initiales, masse, dimension ...) et on cherche à prédire la trajectoire du ballon.

Au cours du dix-septième siècle, l'astronome Kepler observe les trajectoires des astres autour du soleil ou de la terre et en déduit la nature elliptique³ de celles-ci. Cela constitue une rupture avec les modèles précédents, qui considéraient les trajectoires comme circulaires. Il en déduit aussi de façon empirique la loi des aires : lors de sa révolution autour du soleil, la vitesse d'un astre est plus grande quand il est proche du soleil. Élaborées entre 1679 et 1687, les lois de Newton constituent la base de la mécanique classique [GS86].

- (1) Une particule soumise à aucune force (ou à des forces dont la somme est nulle) a un mouvement de translation rectiligne uniforme.
- (2) L'accélération d'une particule soumise à des forces est égale à la somme des forces divisée par sa masse.

Ces lois vont fournir une équation (différentielle) permettant de connaître la trajectoire du ballon (de son centre de gravité plus exactement). Newton fait de plus l'hypothèse d'une force de gravitation en $1/r^2$. Ces lois et l'hypothèse de la force de gravitation en $1/r^2$ ont permis à Newton de montrer la nature conique de certaines trajectoires de planètes connues de notre système solaire. Il retrouve donc les observations de Kepler qui valident ainsi son hypothèse d'une force en $1/r^2$. Les coniques, fort connues des Grecs, avaient disparu du champ des mathématiques ! Il est intéressant de constater qu'outre les lois de la mécanique, Newton a aussi inventé la dérivation⁴, permettant donc d'introduire la notion moderne d'équations différentielles. On pourra donc qualifier Newton de grand modélisateur !

« Qu'est-ce qui retient la lune dans le ciel et qui l'empêche de tomber vers la terre ? » Nous nous sommes tous posés un jour cette question. C'est justement la gravitation exercée par la terre ! Si la lune était animée (à un instant donné) d'une vitesse nulle, ou exactement dirigée vers la terre, comme le montre la figure 3, elle se serait écrasée sur la terre. Puisque que nous sommes encore là, ce c'est que

3. voir plus loin

4. simultanément avec Leibniz.

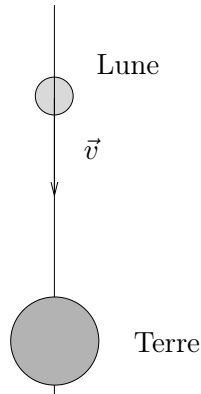
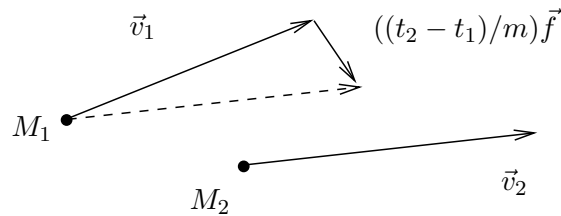


FIGURE 3. La lune s'écrase sur la terre!

cela ne s'est pas déroulé ainsi! Rappelons que, d'après la deuxième loi de Newton, un objet soumis à

FIGURE 4. Modification de la vitesse par la force entre t_1 et t_2 .

une force \vec{f} voit sa vitesse modifiée par la force. L'accélération est approximativement une variation de vitesse et si on considère \vec{v}_1 (resp. \vec{v}_2) la vitesse du point M_1 (resp. M_2) à l'instant t_1 (resp. t_2), comme le montre la figure 4, on a

$$\vec{v}_2 \approx \vec{v}_1 + ((t_2 - t_1)/m)\vec{f},$$

cela étant d'autant plus vrai que $t_2 - t_1$ est « petit ». La lune possède une trajectoire à peu près circulaire⁵ comme le montre la figure 5. Si la terre n'existait pas, la lune ne serait pas attirée par la terre et si elle était seule dans l'univers, elle aurait une trajectoire rectiligne uniforme. En fait, la terre est là et à chaque instant la lune tombe sur la terre, puisque sa vitesse est modifiée par l'attraction de la terre, comme le montre la figure 5. Elle a une vitesse qui l'emporte dans son élan et elle reste à une distance à peu près constante de la terre.

Si le ballon ou le poids n'est soumis à aucune force, la première loi de Newton prévoit une trajectoire rectiligne uniforme. Cette trajectoire est donc connue, grâce à la connaissance de la position initiale et de la vitesse initiale (qu'il conservera) et la formule (ici v est la vitesse (scalaire) moyenne, constante)

$$v = \frac{d}{t}.$$

Naturellement, cette hypothèse est trop simple, car la trajectoire réelle du ballon n'est pas celle-ci!

5. En fait, conformément aux lois de la mécanique classique, elle est elliptique. Mais on ne se trompe pas trop en la supposant circulaire. Voir http://fr.wikipedia.org/wiki/Orbite_de_la_Lune

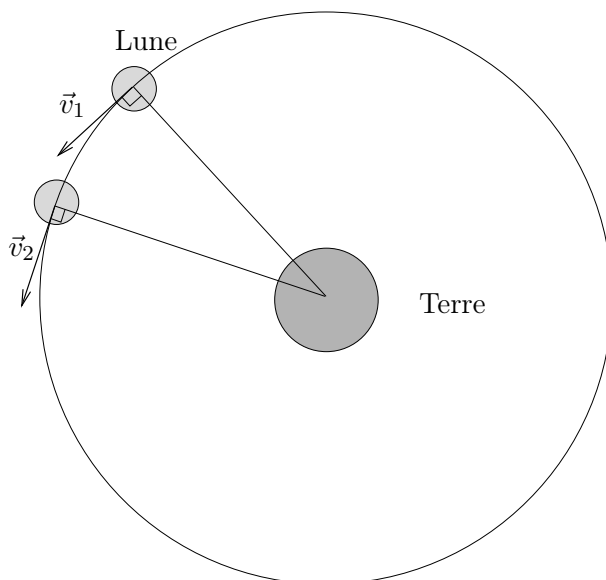


FIGURE 5. La lune tombe constamment sur la terre.

Quelques soient les forces en présence, au tout début du mouvement, cette hypothèse est approximativement vraie ! En effet, un zoom sur la courbe de la trajectoire nous montre que celle-ci se confond avec sa tangente et donc que celle-ci est approximativement celle d'un mouvement translation rectiligne uniforme (voir figure 6).

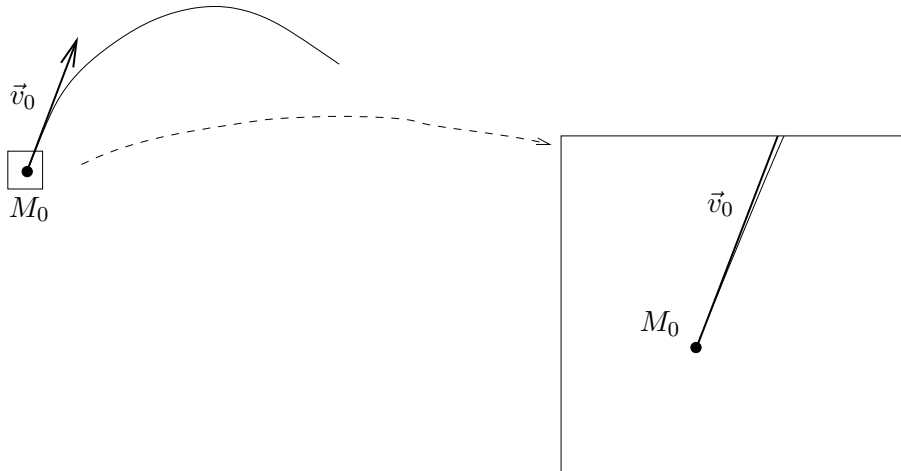


FIGURE 6. La trajectoire au tout début du mouvement est approximativement rectiligne uniforme.

Si on considère maintenant que le ballon est attiré par la terre avec une force en $1/r^2$, proportionnelle à la masse du ballon, où r est la distance qui va du centre de la terre au ballon, celui-ci est ... un satellite de la terre ! Ce sont les lois des mouvements newtoniens des planètes autour du soleil ou des satellites d'une planète. Si la force de gravitation est l'unique force agissant sur un point matériel alors sa trajectoire est une conique (ellipse, parabole ou hyperbole). Une définition de l'ellipse est

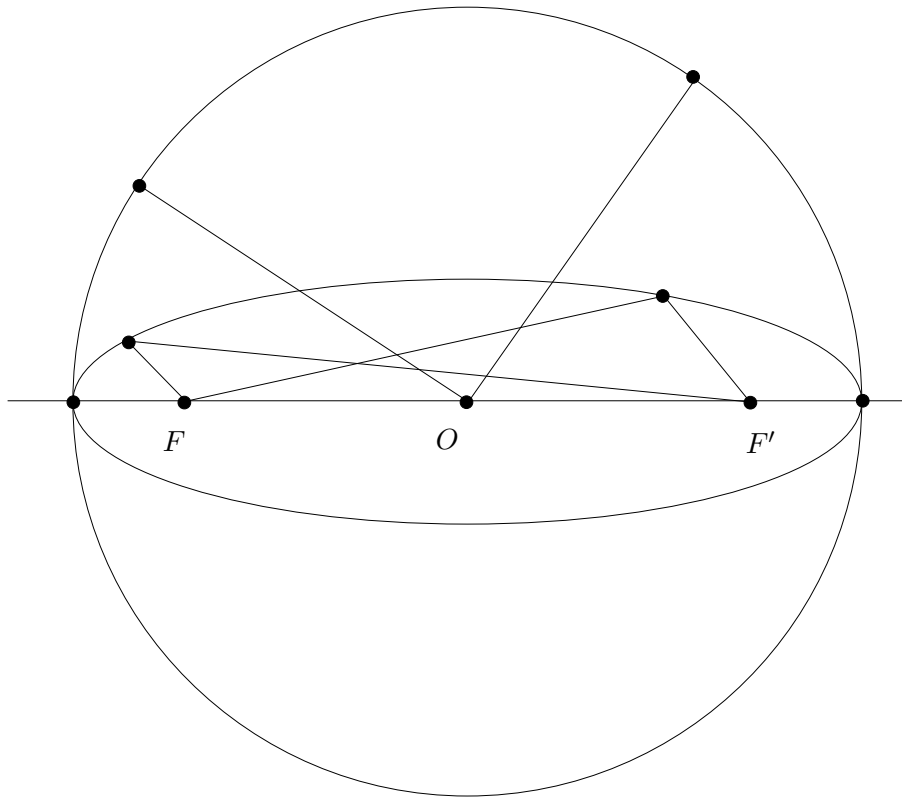


FIGURE 7. Définition de l'ellipse (et du cercle) par foyers.

l'ensemble des points du plan M tels que la distance $MF + F'M$ est constante. Les points F et F' sont les foyers de l'ellipse. Dans le cas de l'attraction gravitationnelle, l'astre attirant est l'un des deux foyers. Le cercle correspond au cas où les deux foyers sont confondus ; c'est alors l'ensemble des points tels que $MF + MF' = 2MO$ est constante. Voir la figure 7. Nous verrons cette semaine une définition semblable de la parabole (elle n'a plus qu'un foyer, l'autre étant rejeté à l'infini). Il existe une vitesse v_1 , limite en-deçà de laquelle, la trajectoire du ballon recoupe le sol et retombe donc ! Au delà-de cette vitesse, la trajectoire est un cercle ou une ellipse (c'est le cas d'un satellite artificiel, de la lune autour du soleil, des planètes ou de la comète de Halley autour du soleil). Si la vitesse est encore plus importante (v_2), le point matériel a une trajectoire hyperbolique, théoriquement infinie ; il échappe donc finalement à l'attraction terrestre. (voir figures 8 à 10).

Attention, ces calculs ne sont valables que si la seule force extérieure est la force de gravitation. Ainsi, ils ne sont plus valables si d'autres forces ne sont plus négligeables (frottement de l'air ou action d'autres astres, comme la lune ou le soleil). De plus les deux vitesses de libérations v_1 et v_2 sont de l'ordre de 30 000 et 40 000 km/h. Ainsi,

- pour le ballon de football ou le poids, seule la trajectoire correspondant aux très faibles vitesses est valide.
- pour les satellites, ces courbes décrivent le mouvement une fois qu'ils ont quitté l'atmosphère terrestre, après une phase de propulsion (avec fusée). Le satellite ne doit pas être trop éloigné de la terre (sinon l'influence de la Lune et du Soleil, non négligeables, doivent être pris en compte).

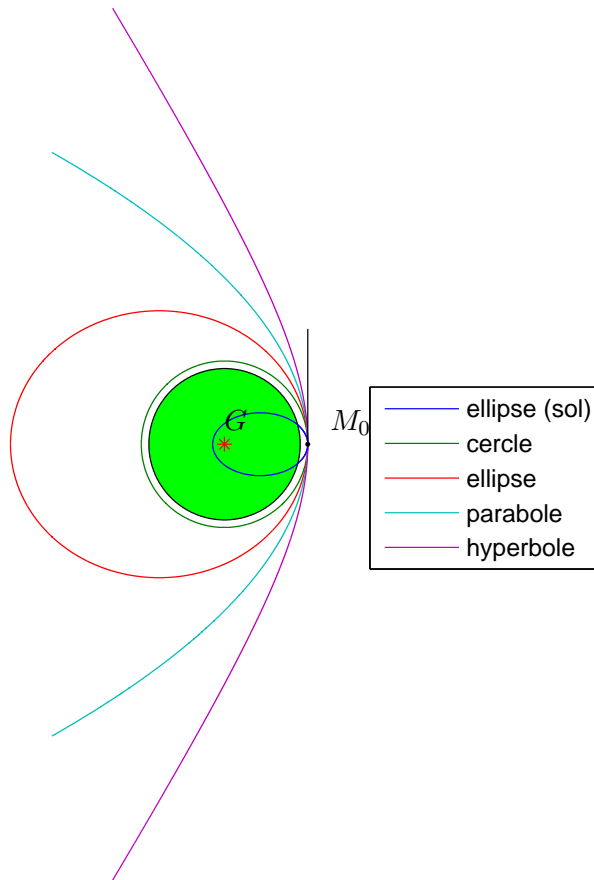


FIGURE 8. Les cinq (trois) types de trajectoires possibles.

Sur la figure 11, on a pris d'autres conditions initiales et fait un zoom (11(b)). On constate que la courbe obtenue (exacte) est quasiment confondue avec parabole classique (approchée), où seul le poids est appliqué au solide. On pourra revenir à la trajectoire de la figure 2, qui obéit parfaitement aux hypothèses de la chute libre.

Comme dans les images précédentes, si les vitesses sont faibles, le mouvement du ballon ou du poids sera confiné dans une zone de petite dimension. Ainsi, la force appliquée au ballon, force⁶ centripète et non uniforme en $1/r^2$, peut être remplacée par une force⁷ uniforme, verticale, tournée vers le bas. On est dans le cas de la chute libre et la trajectoire est une parabole. Cette parabole sera étudiée cette semaine au cours des différents ateliers. L'accélération, d'après la seconde lois de Newton, est uniforme verticale, dirigée vers le bas. Ainsi, la vitesse horizontale est constante, tandis que la vitesse verticale est linéaire en fonction du temps ; si la vitesse verticale initiale est positive, elle est d'abord positive (tournée vers le haut) puis négative (tournée vers le bas). On en déduit que

6. dont la norme vaut $\mathcal{G} \frac{mM}{r^2}$ où m est la masse de l'objet, M celle de la terre et \mathcal{G} une constante.

7. dont la norme vaut mg où m est la masse de l'objet et g la valeur du champ gravitationnel. Il faut bien distinguer à ce propos le poids de l'objet, dont la norme vaut mg et sa masse qui vaut m . Loin de tout astre, un ballon de foot de 400 g aura toujours une masse de 400 g, mais son poids sera nul!

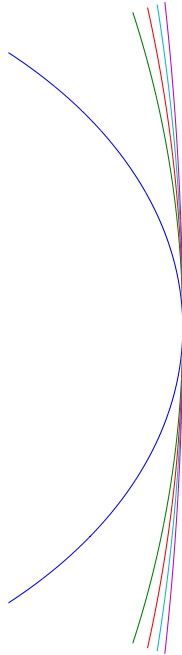


FIGURE 9. Au tout début du mouvement : presque rectiligne uniforme.

l'abscisse du ballon est linéaire tandis que l'ordonnée du ballon est quadratique en fonction du temps :

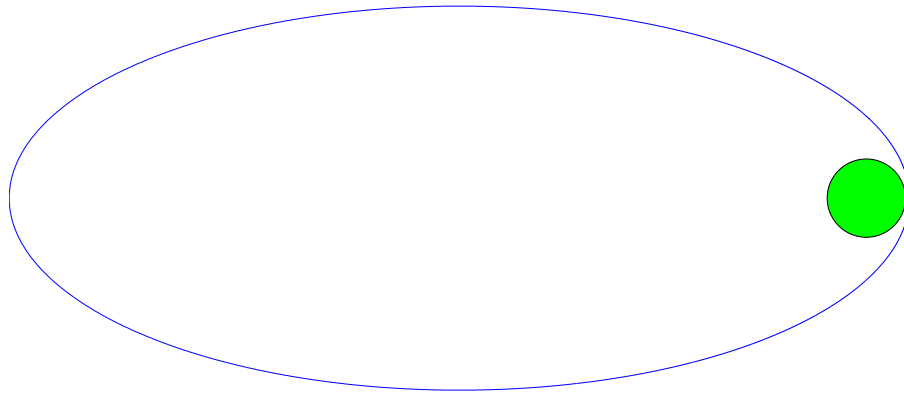
$$\begin{aligned}x(t) &= v_{0x}t, \\y(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t.\end{aligned}$$

Connaissant la position et la vitesse initiale du ballon, on connaît donc sa position (et sa vitesse) à tout instant. On se place dans le cadre du football. Le joueur est situé à une distance $d_2 = 15$ m de la ligne de but et à une distance $d_1 = 10$ m du mur formé par les joueurs adverses. La hauteur h_1 du mur est évaluée à $h_1 = 2$ m et celle des buts à $h_2 = 2.5$ m. On supposera que la la vitesse initiale du ballon est de 15 ms^{-1} et son angle d'envol de 35° . Le rayon du ballon est égal à $R = 0.11$ m. Voir figure 12.

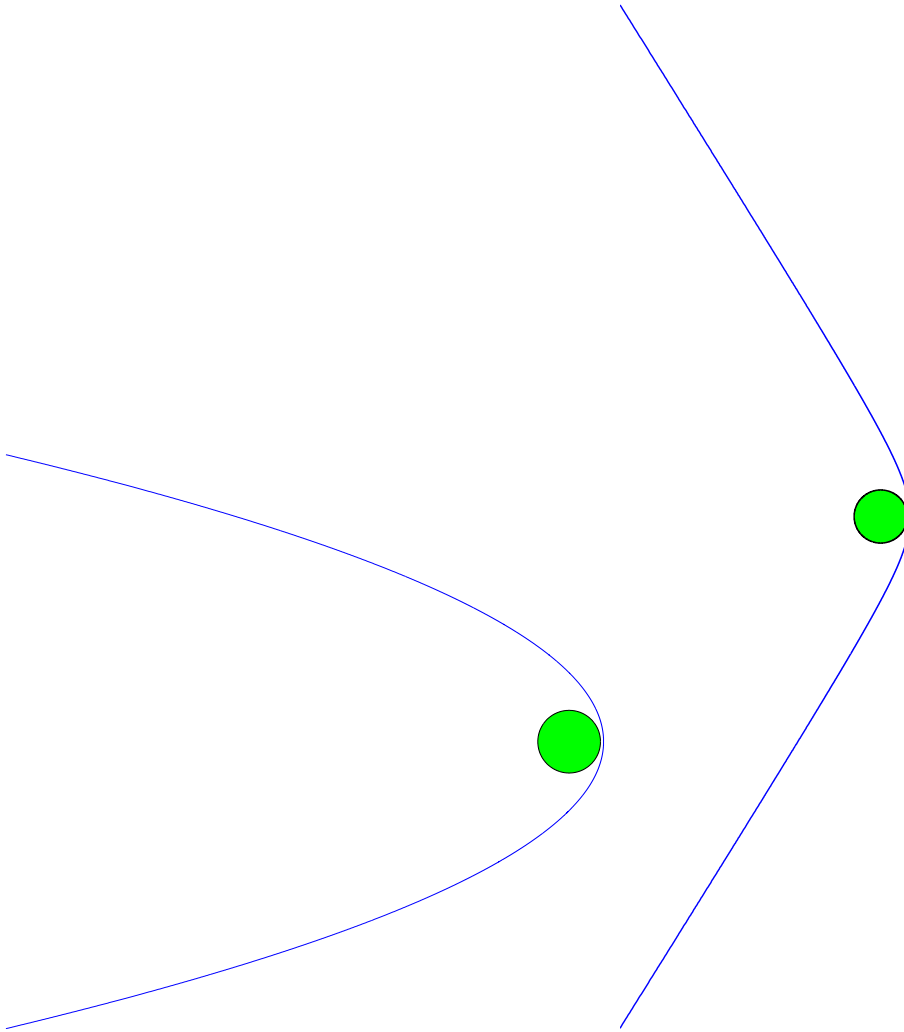
La courbe précédente n'est pas conforme avec les tirs habituels, qui passent sous la barre. En effet, cette modélisation ne prend en compte que le poids du ballon, alors qu'il frotte sur l'air visqueux environnant. Pour simplifier, on suppose que la rotation de la balle se fait autour d'un axe horizontal. Rappelons, à cet effet, quelques lignes extraites⁸ de http://fr.wikipedia.org/wiki/Effet_Magnus

« Lorsqu'une balle en rotation se déplace dans l'air, elle va par frottement modifier la vitesse du courant d'air autour d'elle. L'effet sera dissymétrique : d'un côté la balle entraîne l'air qui accélère. De ce côté la pression diminue. De l'autre côté la balle freine l'écoulement d'air et la pression augmente. On aura donc une différence de pression et la balle va se déplacer du côté où la pression est plus faible.

8. Cette explication est parfois contestée, car elle s'appuie sur le théorème de Bernoulli, qui n'est valable que pour les gaz parfaits ; or, c'est justement la viscosité qui est à l'origine de l'effet Magnus. Néanmoins, ce raisonnement peut être rendu rigoureux, à condition de considérer la couche limite autour du ballon de foot, à l'intérieur de laquelle la viscosité s'exprime et au-delà de laquelle le fluide peut être considéré de nouveau comme parfait.



(a) Une grande ellipse (excentricité proche de 1).



(b) La parabole vue de plus loin.

(c) L'hyperbole vue de plus loin.

FIGURE 10. Un peu de recul.

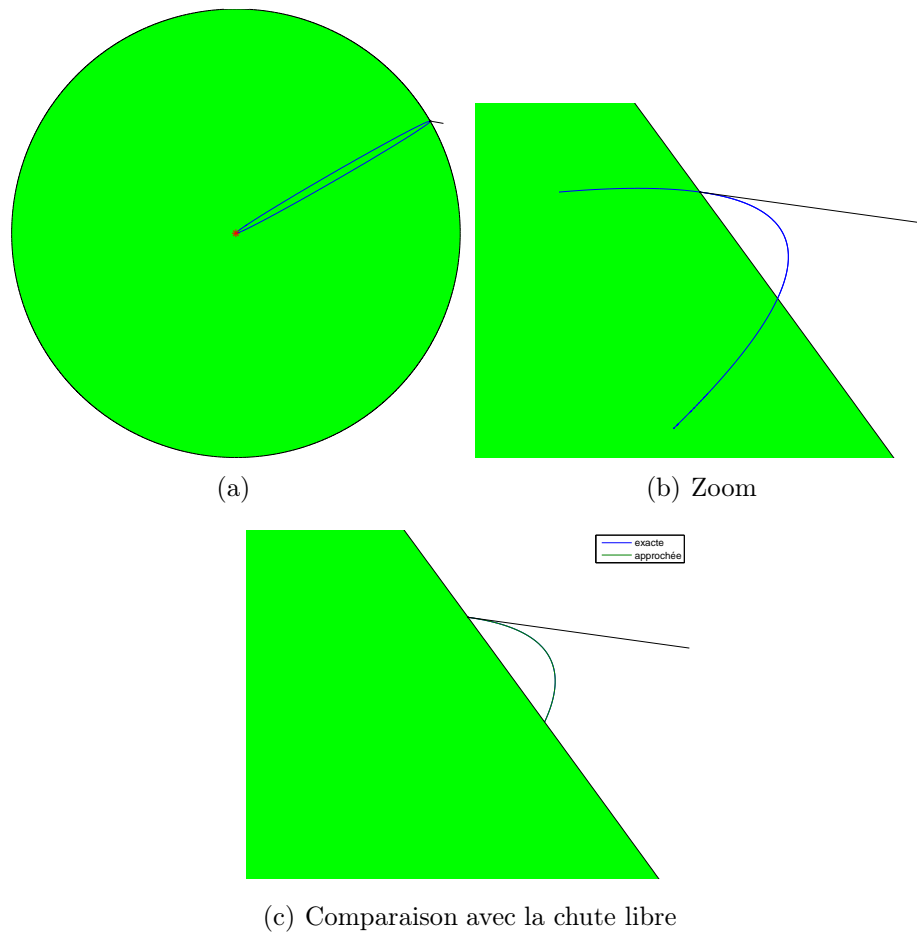


FIGURE 11. D'autres conditions initiales (très faible vitesse)

Selon la vitesse de rotation de la balle, la position des points où la vitesse est respectivement minimale et maximale (et donc le sens de la force appliquée) varie. Par exemple, si la balle roule au sol, la vitesse relative de l'air par rapport à sa surface supérieure augmentera. Si elle tourne de la même façon en l'air, la vitesse de l'air par rapport à sa surface inférieure diminuera. On aura une légère surpression en haut et une légère dépression en bas de la balle, ce qui la plongera plus vite vers le sol. » Cet effet est utilisé au tennis, golf, Sur la figure 14, sont visualisées les lignes de courant de l'air traversé par le ballon. Ces lignes de courant sont les trajectoires des particules de fluides et sont l'analogie des lignes observées sur les photos montrées en figure 13. Sur cette figure, la rotation du ballon se fait dans le sens trigonométrique et il se déplace vers la gauche. On peut voir la vitesse des particules, entraînées par le ballon, plus grande dans la partie inférieure que dans la partie supérieure. Le ballon reçoit donc une force verticale dirigée vers le bas. Si la rotation du ballon se fait dans le sens horaire et qu'il se déplace vers la droite, il en est de même ! L'objet est soumis à son propre poids $\vec{p} = m\vec{g}$ et

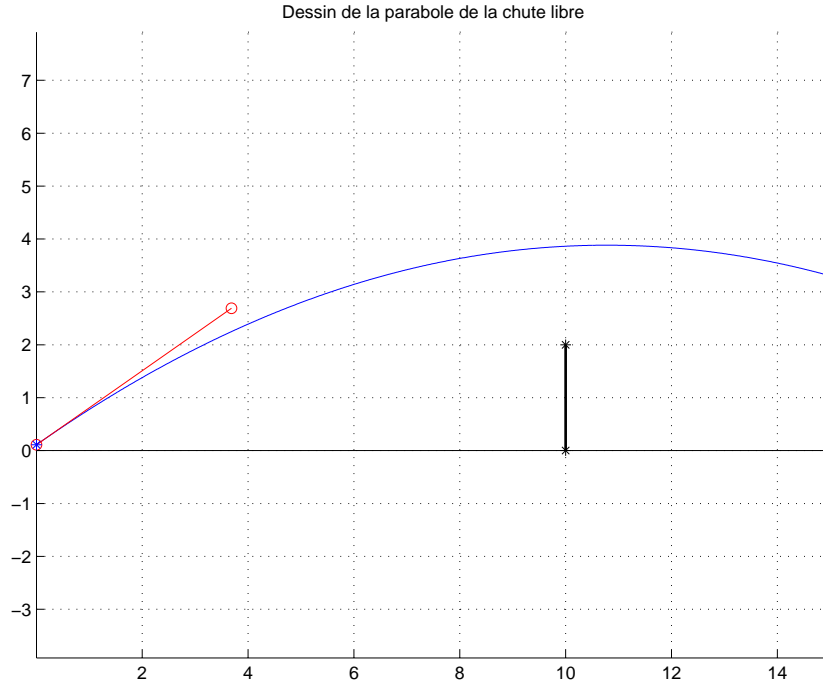


FIGURE 12. L'exemple du ballon de football.

à la force de portance⁹ \vec{F}_P , représentée sur la figure 15. La force de traînée \vec{F}_T est négligée¹⁰. Voir la figure 16, sur laquelle on constate qu'avec cet effet, le ballon passe sous la barre transversale! Voir de nouveau les vidéos de la page 4 et les expliquer sommairement! La figure 17 est extraite de [Dup+10], où des calculs montrant la possible apparition de spirales ont été menés. Ils ont été validés par une comparaison à l'expérience. Voir aussi [Tup+12].

Références

- [Bas15a] J. BASTIEN. *Atelier Maths C2+ : Parabole et effet Magnus au football*. MathC2+ à l'université Lyon I, disponible sur le web : http://utbmjb.chez-alice.fr/MathC2+/parabole_effet_magnus.pdf. 2015. 54 pages.
- [Bas15b] J. BASTIEN. *Biomécanique du mouvement*. Notes de cours de l'UE Biomécanique (L2) de l'UFRSTAPS de Lyon 1, disponibles sur le web : <http://utbmjb.chez-alice.fr/UFRSTAPS/index.html>, rubrique L2 Bioméca. 2015. 188 pages.
- [Bas15c] J. BASTIEN. *Conférence Maths C2+ : La modélisation en biomécanique*. MathC2+ à l'université Lyon I, disponible sur le web : http://utbmjb.chez-alice.fr/MathC2+/modelisation_biomecanique.pdf. 2015. 10 pages.
- [Bas16a] J. BASTIEN. *Atelier Maths C2+ : Circuits de trains et paraboles*. MathC2+ à l'université Lyon I, disponible sur le web : http://utbmjb.chez-alice.fr/MathC2+/parabole_circuit_train.pdf. 2016. 32 pages.

9. Cette force fait aussi voler les engins plus lourds que l'air, comme les avions, qui s'appuient donc sur l'air visqueux pour voler! Les engins moins lourds que l'air, comme les ballons dirigeables, eux se servent de la poussée d'Archimède pour voler!

10. Attention, cette hypothèse devient vite fautive sur des trajectoires un peu plus longues!



(a) : cascade



(b) : voitures la nuit

FIGURE 13. Illustration des lignes de courant : deux photos avec une longue pose.

- [Bas16b] J. BASTIEN. *Conférence Maths C2+ : La modélisation de l'effet Magnus*. MathC2+ à l'université Lyon I, disponible sur le web : http://utbmjb.chez-alice.fr/MathC2+/modelisation_magnus.pdf et http://utbmjb.chez-alice.fr/MathC2+/modelisation_magnus_transparents.pdf. 2016. 18 pages.
- [Dup+10] G. DUPEUX, A. LE GOFF, D. QUÉRÉ et C. CLANET. "The spinning ball spiral". Dans : *New Journal of Physics* 12 (2010). DOI : 10.1088/1367-2630/12/9/093004.

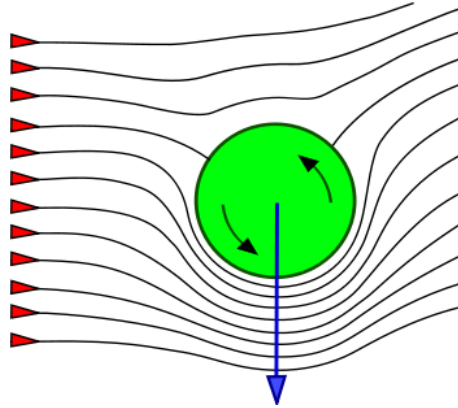


FIGURE 14. L'effet Magnus (dans un plan vertical ou horizontal)

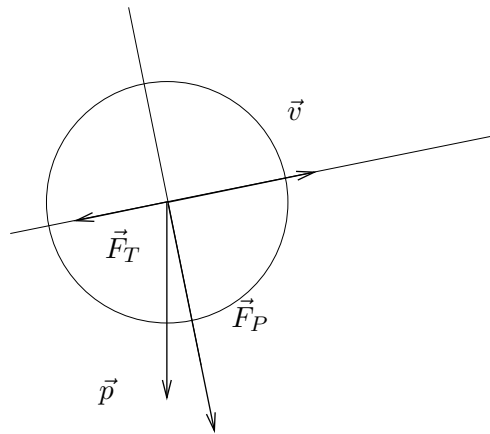


FIGURE 15. L'objet en vol.

- [GS86] H. GIÉ et J.-P. SARMANT. *Mécanique, volume 1*. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 531 GIE, 4 ième étage). Paris : Technique et documentation (Lavoisier), 1986.
- [Tup+12] S. TUPLIN, M. PASSMORE, D. ROGERS, A. R. HARLAND, T. LUCAS et C. HOLMES. “The application of simulation to the understanding of football flight”. Dans : *Journal of Sports Engineering and Technology* 226.2 (2012), pages 134–142. DOI : 10.1177/1754337112444402.

CENTRE DE RECHERCHE ET D'INNOVATION SUR LE SPORT, U.F.R.S.T.A.P.S., UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD
 - LYON 1, 27-29, BD DU 11 NOVEMBRE 1918, 69622 VILLEURBANNE CEDEX, FRANCE
E-mail address: jerome.bastien@univ-lyon1.fr

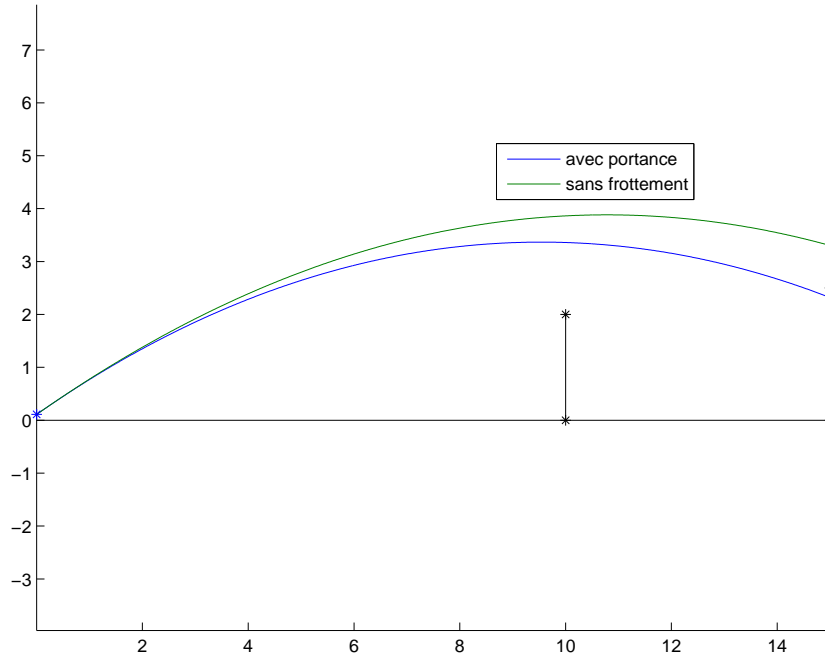


FIGURE 16. L'exemple du ballon de football avec et sans portance.

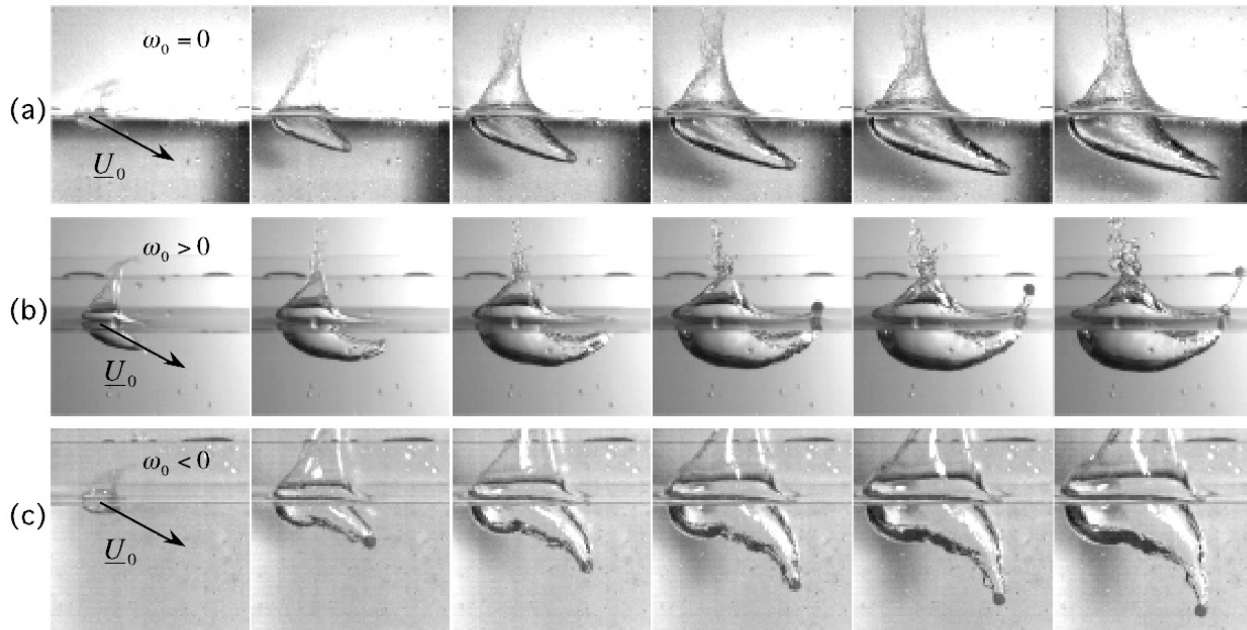


Figure 3. Effect of spin on the trajectory of a sphere (density ρ_s) after impact in water: (a) $U_0 = 33 \text{ m s}^{-1}$, $R = 3.5 \text{ mm}$, $\rho_s = 1410 \text{ kg m}^{-3}$, $\omega_0 = 0 \text{ rad s}^{-1}$, time step between images $\Delta t = 2 \text{ ms}$. (b) $U_0 = 20 \text{ m s}^{-1}$, $R = 2.4 \text{ mm}$, $\rho_s = 920 \text{ kg m}^{-3}$, $\omega_0 = 1740 \text{ rad s}^{-1}$, $\Delta t = 3.75 \text{ ms}$. (c) $U_0 = 24 \text{ m s}^{-1}$, $R = 2.4 \text{ mm}$, $\rho_s = 920 \text{ kg m}^{-3}$, $\omega_0 = -1740 \text{ rad s}^{-1}$, $\Delta t = 3.2 \text{ ms}$. The trajectory bends only if spin is present and the sign of its curvature changes with the sign of the spin.

FIGURE 17. L'inclinaison de trajectoires de billes dans de l'huile (extrait de [Dup+10]).