

ATELIER MATHS C2+ : CIRCUITS DE TRAINS ET PARABOLES

JÉRÔME BASTIEN

Ce document, ainsi que d'autres documents et programmes, est disponible à l'url suivante <http://utbmjb.chez-alice.fr/MathC2+/index.html>

Voir http://utbmjb.chez-alice.fr/MathC2+/parabole_circuit_train.pdf

1. Introduction

Ce document est inspiré d'un cours de biomécanique donnée en deuxième année de Licence à l'Ufrstaps de Lyon. Voir [Bas15b, chapitres 8 et 9 et annexes G, K et L]. Ce document est assez long : il contient de nombreuses figures. De nombreux détails sont donnés, parfois en petit caractère et tout ce qui y figure ne sera pas étudié!

Ce document est inspiré de [Bas15a], qui a été traité en 2015, où avait été étudié l'effet Magnus. \diamond

2. Tracé des pièces du train

Voir consignes données de façon orale.

3. Tracé de la parabole

3.1. Un lien GeoGebra

Une partie des activités proposées par la suite ont été programmées sous GeoGebra¹ et sont disponibles à l'adresse suivante (attendre quelques instants que les scripts GeoGebra soient actifs) : <http://www.geogebra.org/b/fRw4jAQ9>

3.2. Quelques rappels géométriques sur la paraboles

On pourra consulter la vingt et unième leçon de [LH97].

Naturellement, on peut déterminer l'équation de la parabole de la chute libre en utilisant les résultats de [Bas15b, chapitre 8].

Cependant, la parabole est bien connue par les Grecs depuis deux millénaires et l'objet de cette section est d'utiliser une définition et une construction purement géométrique d'une parabole et qui serviront dans la section 3.3.

Ce que l'on entend par construction purement géométrique est une construction uniquement avec une règle, non graduée, un compas et une longueur unité. Voir par exemple [Car89] et notamment la section « Pourquoi la règle et le compas ? » p. 4. On pourra simplifier et supposer que la règle est graduée (mais, on pourrait s'en passer ...). Ainsi, on peut montrer que *toutes* les constructions présentées ici peuvent se traiter de cette façon, exceptée peut-être la construction de l'angle $\alpha = 35^\circ$, égal à l'angle entre l'horizontale et le vecteur vitesse du centre de gravité du ballon au moment de la frappe. En effet, si on savait construire l'angle 35° , on saurait construire 5° car on sait construire 30° .

Date: 23 juin 2016.

1. Un grand grand Merci à Christian Mercat de l'Université Lyon I, pour ce travail!

On saurait donc construire 20° , égal à $\pi/9$, dont on sait que la construction est impossible. De façon générale, l'angle α peut-être considéré comme le résultat d'une mesure expérimentale, donc constructible! Il en est de même pour les autres grandeurs mécanique qui interviendront comme g et v_0 et la position du centre de gravité du ballon au moment de la frappe. \diamond

Rappelons tout d'abord :

Définition 3.1.

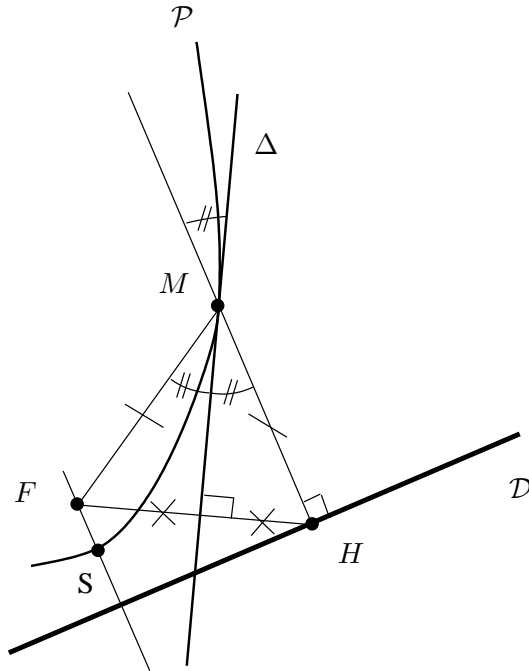


FIGURE 1. La définition géométrique de la parabole \mathcal{P} .

Voir figure 1. Une parabole de directrice \mathcal{D} et de foyer F est l'ensemble des points du plan équidistants de la droite \mathcal{D} et du point F , soit encore l'ensemble des points M tels que

$$MF = MH, \quad (3.1)$$

où H est la projection orthogonale de M sur la droite \mathcal{D} .

On en déduit que M appartient à la médiatrice Δ de $[MH]$.

La notion de tangente sera introduite oralement. Se rappeler qu'en un point, la tangente est la droite qui épouse le mieux la courbe. Un zoom successif sur la courbe en ce point transformera la courbe progressivement en une droite, qui est justement sa tangente.

On pourra consulter [Bas15c, chapitre 4] ou [Bas15d], aussi présenté cette semaine. \diamond

Il s'avère en fait que l'on a la propriété plus précise suivante :

Proposition 3.2. *La droite Δ est la tangente à la parabole \mathcal{P} au point M .*

Démonstration. Voir prouver dans [LH97] et [Bas15b, Preuve de la proposition G.2]. \square

\diamond

La proposition 3.2 pour conséquence la conséquence la propriété « optique » suivante :

3.3. Construction géométrique d'une parabole

Pour d'autres constructions de la parabole, on pourra consulter :

<http://www.lyca.ch/~pfrache/3os/Cours2-coniques-affin/2-3-Parabole/exe-parabole.pdf> ◇

Nous proposons dans cette section, trois méthodes pour construire, point par point, autant de points que souhaité et les tangentes en ces points, pour une parabole dont on connaît certains éléments géométriques.

3.3.1. À partir d'une propriété de la tangente (méthode des deux tangentes).

Rappelons une vieille propriété de la parabole (voir [Bas15e]).

Proposition 3.7.

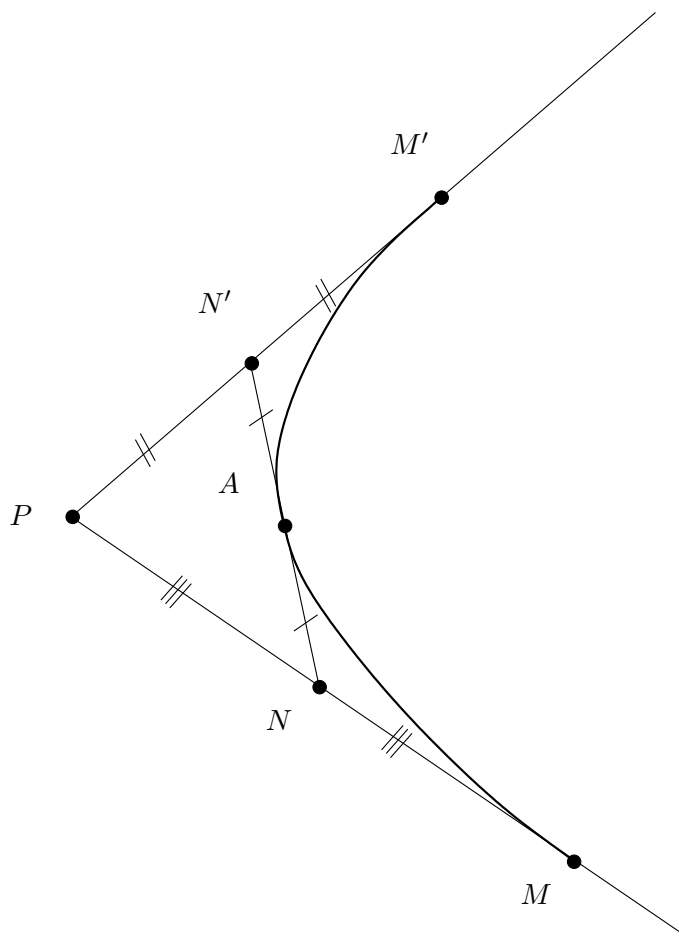


FIGURE 3. Propriétés des deux tangentes à la parabole.

Voir figure 3. Soient trois points non alignés M , P et M' tels que (PM) et (PM') soient tangentes à la parabole \mathcal{P} (aux points de contact M et M') et N et N' , les milieux respectifs de $[PM]$ et $[PM']$. Alors la droite (NN') est tangente à la parabole et son point de contact A est le milieu de $[NN']$.

On pourra regarder l'illustration de cette propriété dans le sous menu « De deux points, un troisième. » du lien GeoGebra donné en section 3.1 à l'url suivante :

<http://www.geogebra.org/b/fRw4jAQ9#material/ERuuedJ8>

Ce procédé est itératif ! En effet, on connaît deux tangentes (MP) et ($M'P$) (aux points de contact M et M') et on en déduit une nouvelle tangente (NN') en A . Autrement dit, on passe d'une ligne polygonale approchant la parabole (MPM') à une ligne polygonale approchant mieux la parabole ($MNAN'M'$). Initialement, on part d'une ligne polygonale formée par les deux tangentes données à la parabole. On peut donc construire progressivement une ligne de points polygonale. Si on l'applique suffisamment de fois, on finit par obtenir des points qui se confondent avec la parabole.

C'est aussi ce qui constitue une difficulté de cette méthode : les segments construits se confondent vite et il faut veiller à être particulièrement attentif lors de la construction ! \diamond

On est capable d'évaluer l'erreur commise en remplaçant la parabole par la ligne de points obtenue. Si on répète n fois l'opération, cette erreur diminue très rapidement vers zéro. Voir [Bas15b, annexe H] pour l'établissement de cette majoration. \diamond

On a obtenu la construction d'un nombre quelconque de points de la parabole et les tangentes correspondantes.

Cette méthode est en fait un cas particulier de la méthode de construction de courbes de Bézier, utilisée en CAO et pour les fontes de lettres (que vous lisez !) ! Voir section 3.3.2.

On pourra consulter [Bas15b, exemple G.8]

3.3.2. À partir de l'algorithme de De Casteljau.

On se donne une parabole \mathcal{P} , définie par deux points M et M' et les deux tangentes en ces points, qui se coupent en P . Voir figure 3 page précédente. On sait qu'il existe une unique parabole définie ainsi. Voir [Bas15e]. On peut aussi définir cette parabole par une courbe de Bézier de degré 2, mise au point dans les années 60, par un ingénieur. Il a repris en fait des courbes, dont l'algorithme de De Casteljau a été mis au point dix ans auparavant. Cet algorithme est utilisé par les ordinateurs et généralise le cas particulier montré en section 3.3.1.

Sans rentrer dans les détails techniques, il suffit de choisir N points (avec $N \geq 2$) linéairement disposés sur $[PM]$, noté $A_1 = M, A_2, \dots, A_N = P$ et de choisir N points régulièrement disposés sur $[M'P]$, noté $B_1 = P, B_2, \dots, B_N = M'$. On trace ensuite chacun des segments $[A_1, B_1] = [MP], [A_2, B_2], \dots, [A_N, B_N] = [PM']$. Chacune des droites (A_i, B_i) est tangente à la parabole \mathcal{P} en un unique point noté M_i .

Plus précisément, considérons R_i , l'intersection de chacune des droites (A_i, B_i) avec la suivante (A_{i+1}, B_{i+1}) . La ligne polygonale formée par les différents R_i constitue une approximation de la parabole. De plus, le milieu de $[R_{i-1}, R_i]$ est le point M_i , dont on a donc une construction simple. Voir figure 4.

Remarquons enfin que toutes les droites tracées (A_i, B_i) se trouvent à l'extérieur de la parabole. Ainsi, on peut aussi voir la parabole comme la limite entre la zone où appartiennent tous les segments $[A_i, B_i]$ et celle qui en est vide. \diamond

Une fois de plus, on a obtenu la construction d'un nombre quelconque de points de la parabole et les tangentes correspondantes.

On pourra regarder l'illustration de cette propriété dans le sous menu « Construction de Casteljau » du lien GeoGebra donné en section 3.1 à l'url suivante :

<http://www.geogebra.org/b/fRw4jAQ9#material/gSkrfw88>

Le cas $N = 3$ correspond au cas particulier de la section 3.3.1.

On pourra consulter [Bas15b, exemple G.9].

Exemple 3.8.

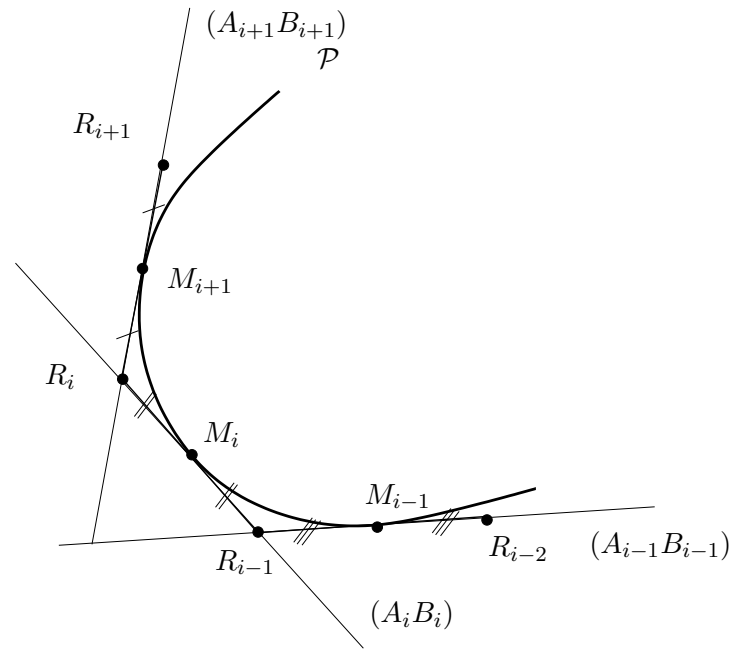


FIGURE 4. La construction des points de contacts M_i , comme milieux des segments $[R_i, R_{i+1}]$.

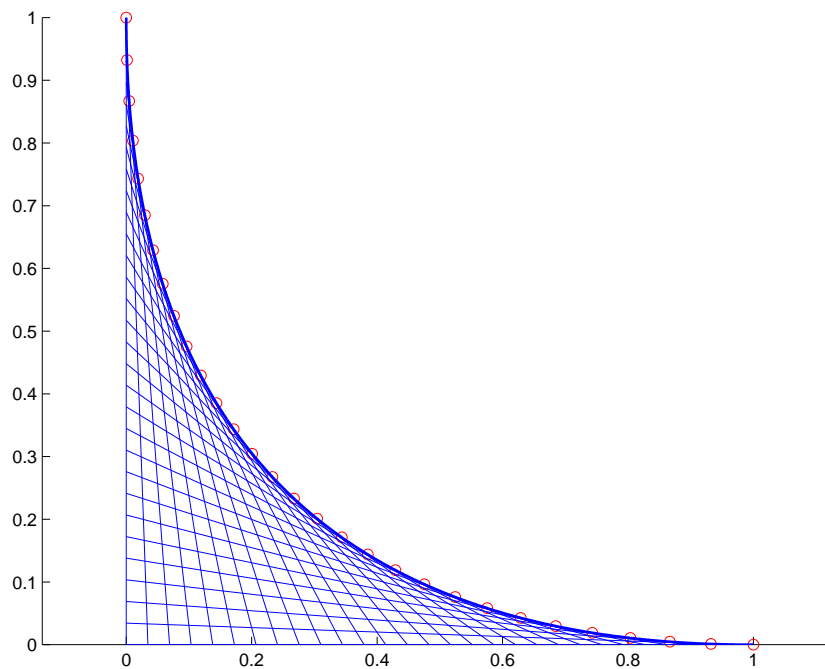


FIGURE 5. Méthode de construction de De Casteljau avec 30 points.

Voir l'exemple de la figure 5.

Exemple 3.9.



FIGURE 6. Plusieurs paraboles en fils tendus.

Cette propriété est utilisée par les artistes en herbe qui font (parfois sans le savoir) des paraboles en fils tendus, comme le montre la photo de la figure 6. On pourra regarder l'illustration de cette photo dans le sous menu « Clous et fils » du lien GeoGebra donné en section 3.1 à l'url suivante : <http://www.geogebra.org/b/fRw4jAQ9#material/YjTUjUfM>

Sur la figure 7, on a tracé les paraboles correspondant à la figure 6. Sur la figure 8, on a tracé cette-fois la même figure avec 10 sous-carrés au lieu de 3.

Enfin, sur les figures 9 et 10, on a tracé la totalité des « fils » de construction avec respectivement 3 et 10 sous-carrés et $N = 27$ points sur chaque segment.

Exemple 3.10. On pourra consulter
<http://irem.univ-reunion.fr/spip.php?article575>
<http://www.youtube.com/watch?v=NsVSHtBP8Gk>

3.3.3. À partir de la définition.

Une dernière possibilité de construction est envisageable, si on connaît le foyer F et la directrice \mathcal{D} de la parabole \mathcal{P} . Elle consiste à exploiter simplement la définition 3.1 page 2 et la propriété 3.2 de la parabole. On renvoie à la figure 1 page 2.

Pour tout point H de la droite \mathcal{D} , on considère l'intersection M de la perpendiculaire à la droite \mathcal{D} passant par H et de la médiatrice Δ de $[FH]$. Ce point M appartient à la parabole et la droite Δ

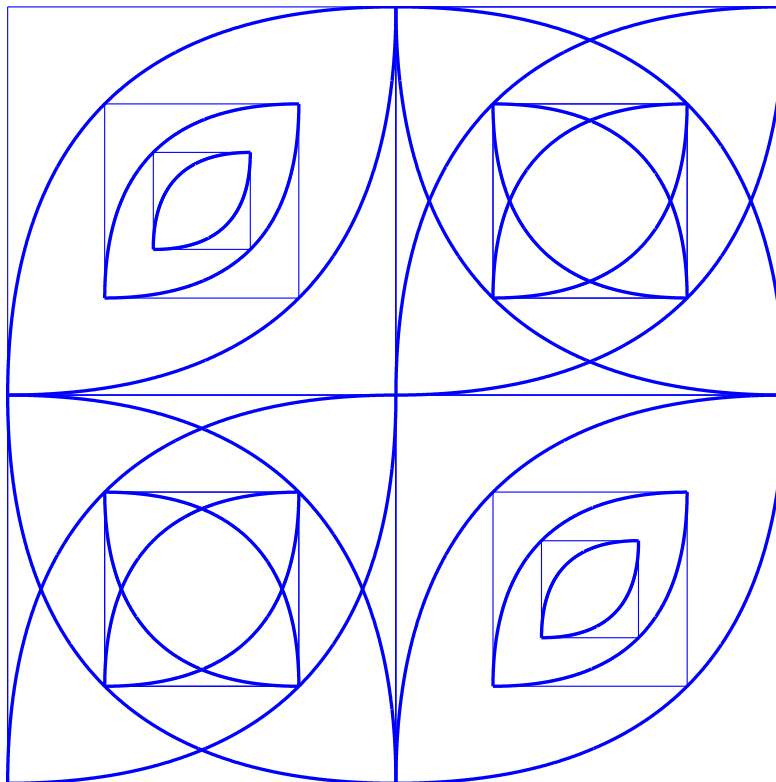


FIGURE 7. Les paraboles correspondant à la figure 6 (avec 3 sous-carrés).

est tangente à la parabole en M . On peut simplifier la construction pour obtenir facilement le milieu de $[FH]$, qui n'est autre que l'intersection de la droite \mathcal{D}' et de (FH) . Voir en effet la remarque 3.5.

Cette construction permet d'obtenir autant de point (et les tangentes correspondantes) que l'on veut, à partir de tout point H de la directrice \mathcal{D} .

On pourra consulter [Bas15b, exemple G.13].

3.3.4. Cas où le point connu est le sommet.

Si le point connu est le sommet, c'est-à-dire que l'on ne connaît que le point M dont on sait que c'est le sommet, les méthodes présentées ci-dessus ne fonctionnent plus directement. On suppose que l'on est capable de déterminer la directrice, parallèle à la droite donnée. Il suffit de remarquer, que, grâce à la méthode de la section 3.3.3, on peut déterminer un second point quelconque, différent du sommet et sa tangente associée. On est alors ramené au cas précédent. \diamond

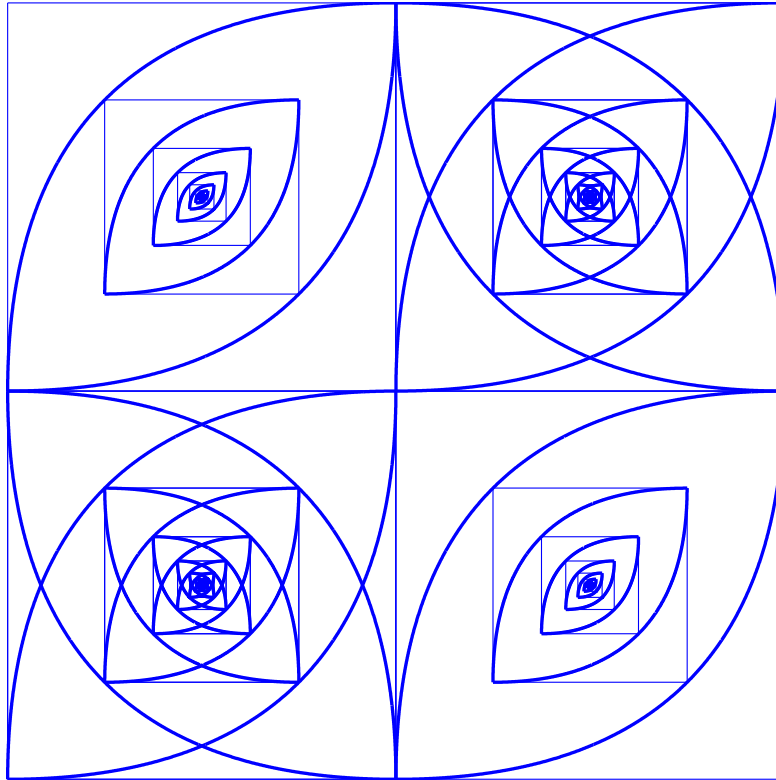


FIGURE 8. Les paraboles correspondant à la figure 6 (avec 10 sous-carrés).

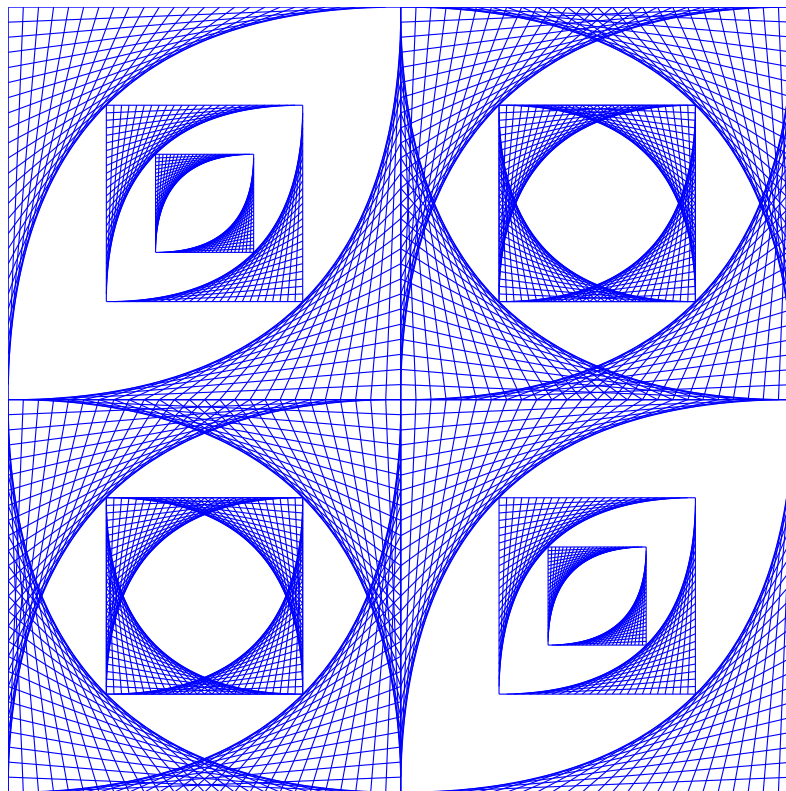


FIGURE 9. Les paraboles avec les fils tendus correspondant à la figure 6 (avec 3 sous-carrés et $N = 27$ points sur chaque segment).

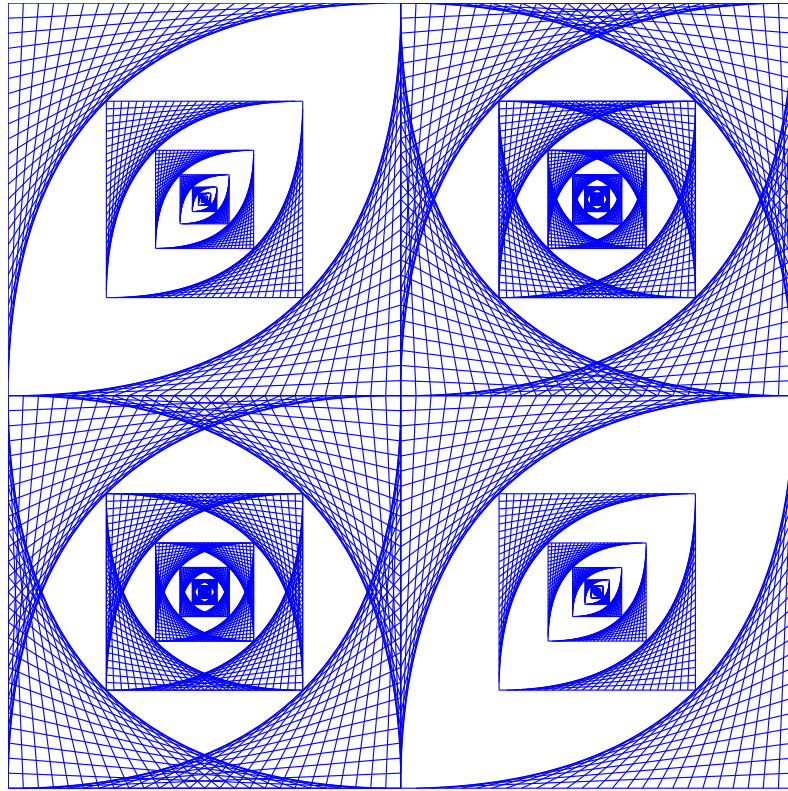


FIGURE 10. Les paraboles avec les fils tendus correspondant à la figure 6 (avec 10 sous-carrés et $N = 27$ points sur chaque segment).

4. Tracé des rails paraboliques du circuit de train

Partie non distribuée.

Références

- [Bas15a] J. BASTIEN. *Atelier Maths C2+ : Parabole et effet Magnus au football*. MathC2+ à l'université Lyon I, disponible sur le web : http://utbmjb.chez-alice.fr/MathC2+/parabole_effet_magnus.pdf. 2015. 54 pages.
- [Bas15b] J. BASTIEN. *Biomécanique du mouvement*. Notes de cours de l'UE Biomécanique (L2) de l'UFRSTAPS de Lyon 1, disponibles sur le web : <http://utbmjb.chez-alice.fr/UFRSTAPS/index.html>, rubrique L2 Bioméca. 2015. 188 pages.
- [Bas15c] J. BASTIEN. *Biomécanique du mouvement*. Tutorat de l'UE Biomécanique (L2) de l'UFRSTAPS de Lyon 1, disponibles sur le web : <http://utbmjb.chez-alice.fr/UFRSTAPS/index.html>, rubrique L2 Bioméca. 2015. 87 pages.
- [Bas15d] J. BASTIEN. *Comment concevoir un circuit de train miniature qui se reboucle toujours bien ?* Transparents présentés lors du Forum des mathématiques 2015 à l'Académie des sciences, belles-lettres et arts de Lyon, disponibles sur le web : http://utbmjb.chez-alice.fr/recherche/brevet_rail/expose_forum_2015.pdf. 2015. 73 pages.
- [Bas15e] J. BASTIEN. *Comment concevoir un circuit de train miniature qui se reboucle toujours bien ? – Deux questions d'algèbre et de dénombrement*. Transparents présentés au « séminaire détente » de la Maison des Mathématiques et de l'Informatique, Lyon, disponibles sur le web : http://utbmjb.chez-alice.fr/recherche/brevet_rail/expose_MMI_2015.pdf. 2015. 80 pages.
- [Bas16] J. BASTIEN. *Atelier Maths C2+ : Circuits de trains et paraboles*. MathC2+ à l'université Lyon I, disponible sur le web : http://utbmjb.chez-alice.fr/MathC2+/parabole_circuit_train.pdf. 2016. 32 pages.
- [Car89] J.-C. CARREGA. *Théorie des corps. La règle et le compas. [Ruler and compass]*. Second. Collection Formation des Enseignants et Formation Continue. [Collection on Teacher Education and Continuing Education]. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 512.3 CAR, 4 ième étage). Hermann, Paris, 1989, pages xiv+277.
- [LH97] C. LEBOSSE et C. HÉMERY. *Géométrie. Classe de Mathématiques (Programmes de 1945)*. Ouvrage disponible à la bibliothèque de Mathématiques de Lyon 1 (cote : 516 LEB 97307, niveau 0 Espace Capes/Agreg). Paris : Jacques Gabay, 1997.

CENTRE DE RECHERCHE ET D'INNOVATION SUR LE SPORT, U.F.R.S.T.A.P.S., UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD
 - LYON 1, 27-29, BD DU 11 NOVEMBRE 1918, 69622 VILLEURBANNE CEDEX, FRANCE
E-mail address: jerome.bastien@univ-lyon1.fr