TRAVAUX DIRIGÉS DE l'UE DDRS

MAT, INFO, MECA, MAM, GBM 3A

MODÈLES DE CROISSANCE DÉMOGRAPHIQUE ET SCÉNARIOS

2024-2025, Printemps

Jérôme Bastien

Document compilé le 22 juin 2025

Le lien original de ce document est le suivant :
http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/DDRS/TD_croissance_scenarios.pdf

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons : Paternité - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification ; 3.0

http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/
ou en français
http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/deed.fr

Liste des Travaux Dirigés

Avant-propos

Ce polycopié constitue les TD-TP de Modèles de croissance démographique et scénarios de MAT, INFO, MECA, MAM, GBM 3A (2024-2025, Printemps).

Ce polycopié de TD et les sources Matlab (ou autres) sont normalement disponibles à la fois
- en ligne sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html` à la rubrique habituelle ;
- en cas de problème internet, sur le réseau de l'université Lyon I : il faut aller sur :
  — 'Poste de travail',
  — puis sur le répertoire '`P:`' (appelé aussi '`\\teraetu\Enseignants`'),
  — puis '`jerome.bastien`',
  — puis '`Polytech`',
  — puis '`DDRS`',
  — enfin sur '`TD_croissance_scenarios_P24.pdf`'.

Des exercices facultatifs, non traités en séances sont proposés sur cette version distribuée sur le Ouaib et le réseau.

TRAVAUX DIRIGÉS 1

Modèles simples de croissance démographique (Malthus et Verhulst)

Cadre théorique

EXERCICE 1.1.

(1) (a) Soient $r, t_0 \in \mathbb{R}$ et $N_0 \in \mathbb{R}_+^*$. Quelle est la solution de l'équation différentielle

$$\forall t \geq t_0, \quad N'(t) = rN(t), \tag{1.1a}$$

$$N(t_0) = N_0\,? \tag{1.1b}$$

(b) Donner rapidement le comportement de l'application $N : t \mapsto N(t)$ définie sur $[t_0, +\infty[$ en fonction de r (limite en $+\infty$ et monotonie).

(c) (i) On définit le taux de croissance (algébrique) entre les instants t et $t+h$, par le rapport du taux d'accroissement de N entre les instants t et $t+h$ sur N défini donc par

$$\tau(t) = \frac{N(t+h) - N(t)}{hN(t)}. \tag{1.2}$$

Quelle est la limite de ce taux de croissance quand h tend vers zéro ? Cette limite est appelée le taux de croissance instantané.

(ii) Calculez cette limite en fonction de r et conclure sur l'équation différentielle (1.1a).

(2) Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}_+$. Dans cette question, on cherche à résoudre l'équation différentielle :

$$\forall t \geq t_0, \quad N'(t) = N(t)(a - bN(t)), \tag{1.3}$$

avec l'habituelle condition initiale (1.1b).

(a) Que retrouve-t-on quand $b = 0$?

(b) Pour toute la suite, on suppose que $b > 0$ et on pose $K = a/b > 0$ et on réécrit (1.3) sous la forme

$$\forall t \geq t_0, \quad N'(t) = aN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right). \tag{1.4}$$

(i) Quelle est la solution constante (non nulle) de l'équation différentielle (1.4) avec la condition initiale (1.1b). ?

(ii) On admet que si la solution de (1.4) est non constante, alors, elle ne s'annule pas. Montrer que si l'on pose $v = 1/N$, alors v est solution de

$$\forall t \geq t_0, \quad v' + av = \frac{a}{K}. \tag{1.5}$$

(iii) Résoudre l'équation différentielle (1.5).

(iv) On suppose pour toute la suite que

$$N_0 \neq K. \tag{1.6}$$

En déduire que la solution de (1.4) et (1.1b) est donnée par

$$N(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N_0} - 1\right) e^{-a(t-t_0)}}. \tag{1.7}$$

(v) Pour toute la suite, on suppose que

$$0 < N_0 < K. \tag{1.8}$$

(A) Montrer que $N : t \mapsto N(t)$ est définie [1] sur $[t_0, +\infty[$.

(B) Donner rapidement le comportement de N application sur $[t_0, +\infty[$ (limite en $+\infty$ et monotonie).

(C) Comme dans la question (1c), déterminer le taux de croissance instantané.

Modèle de Malthus

L'exercice 1.2 sera à réaliser hors séance, à préparer pour la deuxième séance de TD.

EXERCICE 1.2.

(1) En utilisant le fichier matlab `donnee_canada.m` qui contient les données de population, tenter de refaire les calculs et les figures des transparents numéros 30 et 31, puis éventuellement 29, 32 et 33.

On pourra utiliser la fonction fournie `regression_lineaire.m` pour mettre en œuvre la régression linéaire.

(2) En partant de données de populations que vous trouverez vous-même, mettre en œuvre le modèle de Malthus.

Modèle de Verhulst

Pour ce modèle, on utilisera la fonction de Matlab fournie `regression_logistique.m` dont un exemple d'utilisation est donné par :

```
donnee_usa;
[K,y0,a,t0]=regression_logistique(t,y);
```

Les vecteurs `t` et `y` contiennent les données (années et population) stockées dans le fichier `donnee_usa.m` (données issues ici de [Pia12]). La fonction `regression_logistique.m` détermine les paramètres $N_0 \in]0, K[$, $a > 0$, $t_0 \in \mathbb{R}$ de la fonction $N_{K,N_0,a,t_0}(t)$, donnée par l'équation (22) du transparent 49, rappelée ici :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad N_{K,N_0,a,t_0}(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N_0} - 1\right) e^{-a(t-t_0)}}, \tag{1.9}$$

et trace le graphique correspondant (avec les modèles de Malthus et de Verhulst). La méthode utilisée est donnée dans les transparents numéros 53, 54, 55 et 56. Il existe d'autres entrées optionnelles de la fonction `regression_logistique.m`. Pour en savoir plus, tapez :

```
help regression_logistique
```

EXERCICE 1.3.

(1) À l'aide de la fonction `regression_logistique.m` et du fichier `donnee_usa.m`, tracer la figure du transparent 58. On vérifiera que l'on obtient bien les valeurs des paramètres données par les équations (27) des transparents.

(2) (a) Pourquoi le modèle de Verhulst est ici mieux adapté que le modèle de Malthus ?

(b) Pourquoi la valeur de N_0 en principe trouvée (voir équation (27c) des transparents) n'est-elle pas égale à la donnée initiale $N(t_0) = 3.929000$, correspondant à la première année ?

(c) (i) Que dire de la valeur de K donnée par l'équation (27a) des transparents ?

1. On peut aussi l'étudier mathématiquement sur $\mathbb{R}$ tout entier.

(ii) Illustrez cela par un graphique et/ou une simulation numérique très simple. On pourra utiliser la fonction `fonction_logistique_new.m` de la façon suivante : la commande

```
y=fonction_logistique_new(K,y0,a,t0,t);
```

où `K`, `y0`, `a` et `t0`, correspondent aux valeurs de K, N_0, a et t_0 déterminées par `regression_logistique.m` et `y` est le tableau contenant les valeurs de N_{K,N_0,a,t_0} définie par (1.9) calculée (de façon vectorielle) pour les différentes valeurs contenues dans le tableau `t`.

(iii) Est-ce conforme à la taille réelle de la population des USA en 2023 ?

(3) (a) Quelle est l'équation de la tangente à la courbe $y = f(t)$?

(b) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe du modèle de Verhulst au point d'inflexion.

L'exercice 1.4 sera à réaliser hors séance, à préparer pour la deuxième séance de TD.

EXERCICE 1.4.
Appliquez les deux méthodes vues (Malthus et Verhulst) à des données de populations que vous trouverez vous-même sur le web. On fera un graphique avec les deux modèles et on affichera les différentes valeurs des paramètres obtenues, en commentant l'adéquation des deux modèles aux données choisies.

Exercices facultatifs

EXERCICE 1.5.
En procédant comme dans l'exercice 1.3 et en utilisant les fichier de données `donnee_usa_bis.m` et `donnee_usa_ter.m`, reprendre les simulations des transparents 59, 60, 61 et 62.

EXERCICE 1.6.
En procédant comme dans l'exercice 1.3 et en utilisant le fichier de données `donnee_elephant.m`, reprendre les simulations des transparents 64, 65 et 66 et commenter le transparent 63.

TRAVAUX DIRIGÉS 2

Modèles à populations multiples

Modèle de base de Lotka-Voltera

Pour ce modèle, on utilisera la fonction de Matlab fournie `lotka_volterra_bis.m` qui permet d'approcher les solutions des différentes équations différentielles correspondant au modèle de Lotka-Voltera de base et de ses variantes :

— (43) du transparent 98 ;
— (57) du transparent 124, ;
— (58) du transparent 132.
— (60) du transparent 138.

dont un exemple d'utilisation est donné par :

```
[T,Xc,Yc]=lotka_volterra_bis(a,b,c,d,x0,y0,tdeb,tfin ,seuil ,K);
```

ligne de commande qui permet à la fois d'obtenir les effectifs au cours du temps et les graphiques : effectifs ou cours du temps ou dans le plan proie-prédateur.

Le solveur utilisé est par défaut le Schéma de Runge Kutta 4, déjà cité dans les transparents (voir votre cours de MNB ou chapitre 5 de [DB22]) disponible dans la fonction distribuée `rk4n.m`, qui a l'air paradoxalement plus performante que le solveur adaptatif `ode45.m` de Matlab (qui utilise aussi le Schéma de Runge Kutta 4).

Les entréées `a`, `b`, `c`, `d`, `x0` et `y0` correspondent aux paramètres du modèles de base de Lotka-Voltera de base Les entrées `seuil` et `K` sont facultatives. Les choisir vides ou inexistantes pour ne pas prendre en compte les effets de seuil ou de croissance logistique. Prendre par exemple `seuil=1` pour prendre en compte un seuil (si les données sont exprimées en unités) ou `K` fini pour prendre en compte la croissance logistique. Cette fonction est un peu longue à tourner car elle calcule aussi la période de modèle de Lotka-Voltera de base [1] et ne calcule la solution que sur une période pour faire des économies de temps.

Par exemple, les figures du transparent 106 ont été obtenues en tapant

```
lotka_volterra_bis(1,1,1,1,0.5,0.5,[],10);
```

tandis que les figures des transparents 118 et 119 ont été obtenues en tapant (presque)

```
close all;
identification_lobry_2017_tot;
lotka_volterra_bis(a,b,c,d,x0,y0,[],[],[],[],te,xe,ye);
print(1,'-dpdf','simulationnumerique10a');
print(2,'-dpdf','simulationnumerique10b');
```

les deux dernières lignes permettant d'enregistrer les deux figures au format pdf.

De nombreuse autres possiblités sont offertes pour cette fonction. Voir son aide en tapant

```
help lotka_volterra_bis
```

1. comme c'est très bien présenté dans [Via25]. Un grand merci à Grégory Vial et ce papier qui m'ont permis de programmer proprement la fonction `lotka_volterra_bis.m`

On pourra aussi utiliser la fonction `lotka_volterra_complet.m`, plus complète. ◇

Dans cette section, on étudie le modèle de base de Lotka-Voltera donnée par l'équation 43 du transparent 98. avec a, b, c, d, x_0, $y_0 > 0$.

EXERCICE 2.1.

(1) (a) Montrer à partir des équations (43) des transparents que

$$x'(t) = y'(t) = 0 \tag{2.1}$$

est équivalent à

$$x(t) = 0 \text{ ou } y(t) = \frac{a}{b}, \tag{2.2a}$$

$$y(t) = 0 \text{ ou } x(t) = \frac{c}{d}, \tag{2.2b}$$

Ces points sont appelés point d'équilibre du système de Lotka-Voltera.

(b) Est-il possible d'avoir $x(t) = 0$ ou $y(t) = 0$? Quelle est donc la seule valeur possible du point d'équilibre ?

(2) (a) En reprenant les valeurs des paramètres données par l'équation (53) des transparents, faites varier les conditions initiales. Que remarquez-vous ?

(b) Comment rester "près de l'équilibre" ? Exactement au point d'équilibre ? Faites des simulations dans ces deux cas.

(3) Dans cette question, nous étudions de façon sommaire l'influence des différents paramètres du modèle de Lotka-Voltera en faisant l'hypothèse (51) des transparents à partir des valeurs données par l'équation (53) des transparents.

(a) (i) Que se passe-t-il si le paramètre a qui correspond à l'augmentation du taux de croissance des proies augmente ?

(ii) Corroborez cela par une expérience numérique.

(iii) Conclure.

(b) Mêmes questions que dans la question 3a sur l'influence du paramètre c (taux de mortalité des prédateurs).

(c) Mêmes questions que dans la question 3a sur l'influence du paramètre $b = d$ (efficacité de la prédation).

EXERCICE 2.2.

(1) Dans le modèle de Lotka-Volterra, est-il possible d'observer une exctinction des proies avant celle des prédateurs ? Que se passe-t-il alors ?

(2) Étudions maintenant la situation opposée.

(a) Peut-on changer les valeurs des paramètres des équations (53) des transparents pour obtenir une extinction des prédateurs avant celle des proies ?

Expliquez ce qui se passe et conclure.

(b) Faire des simulations en modélisant cela par une valeur non nulle du seuil.

(c) Prenez maintenant une croissance logistique comme expliqué sur le transparent 138 et commentez.

EXERCICE 2.3.

Que se passe-t-il si on effectue une pêche qui prélève indifféremment des proies et des prédateurs avec un taux ε ? On reprendra, en les modifiant, les équations (43) et on fera un raisonnement qualitatif, sans simulations numérique cette fois-ci.

Variantes du modèle de Lotka-Voltera

EXERCICE 2.4.
M. Lobry a écrit dans [Lob17] : "Il est parfaitement exact que dans le cadre du modèle de Volterra les prédateurs ont intérêt à ne rien faire : il leur suffit d'attendre passivement que les proies, qui croissent de façon exponentielle, remplissent tout l'espace pour attendre littéralement qu'elles leur tombent dans la bouche. On voit ici la limite du modèle qui est de faire l'hypothèse très forte qu'aucun facteur externe ne vient limiter la croissance des proies."
Reprendre les paramètres des équations (53) des transparents et faites des simulations avec un terme de croissance logistique comme expliqué sur le transparent 138 et commentez.

D'autres modèles

EXERCICE 2.5.
On expérimente dans cet exercice la présentation multi-agent présentée dans les transparents 144, 145 et 146, en utilisant le logiciel Netlogo [Wil99] Voir `https://ccl.northwestern.edu/netlogo/`. Deux façons possibles de l'utiliser :

— Sur internet (mais tous les modèles ne sont pas disponibles) ;
— Avec le logiciel, à télécharger ou installé sur les ordinateurs de Lyon 1 (Voir `NetLogo6.4.0`).

(1) Utilisons le premier modèle ([Wil97]) nommé "Wolf Sheep Predation" (dans "Biology" dans la version logiciel) d'abord sans herbe. Voir les règles rappelées sur le transparent 145.
Les paramètres sont
— `initial-number-sheep` : nombre initial de moutons ;
— `initial-number-wolves` : nombre initial de loup ;
— `sheep-gain-from-food` : quantité d'énergie que les moutons reçoivent pour chaque parcelle d'herbe mangée (paramètre non utilisé dans la version du modèle sans herbe) ;
— `wolf-gain-from-food` : quantité d'énergie que les loups reçoivent pour chaque mouton mangé ;
— `sheep-reproduce` : probabilité qu'un mouton se reproduise à chaque pas de temps ;
— `wolf-reproduce` : probabilité qu'un loup se reproduise à chaque pas de temps.

(a) Montrer en jouant sur les paramètres, que l'on peut obtenir plusieurs comportements possibles :
(i) Les moutons envahissent la terre, les loup ayant disparu ;
(ii) Les moutons, puis les loups disparaissent ;
(iii) Un comportement cyclique ?

(b) Reprenons la question 1a mais avec de l'herbe (voir transparent 146).
(i) Pouvez-vous trouver des paramètres qui génèrent un écosystème stable dans la variante du modèle moutons-loups-herbe ?
(ii) Essayez d'exécuter la variante du modèle moutons-loups-herbe, en définissant `initial-number-wolves` à 0. Qu'observez-vous ?

(2) Utilisez le second modèle nommé "docked hybrid" (dans "System Dynamics" accessible uniquement dans la version logiciel) et comparez les résultats multi-agent et équation différentielle. Qu'observez-vous cette fois-ci, par rapport à la question 1 ?

Annexe A

Matlab/Octave à distance

Vous avez deux les possibilités suivantes pour utiliser Matlab (section A.1) et son clone, libre et gratuit, Octave (section A.2).

A.1. Matlab à distance

Utilisez une machine virtuelle en consultant :
`https://etu.univ-lyon1.fr/outils/acces-distant-aux-fichiers-et-aux-applications-pedagogiques`
Il faut donc faire (pour windows, pour les autres systèmes d'exploitation, voir l'url donnée ci-dessous)

— Ouvrez le menu Démarrer -> Tous les programmes -> Accessoires -> Connexion bureau à distance (ou parfois Accessoires -> Communication -> ...) ;
— La boîte de dialogue "Connexion bureau à distance" apparaît ;
— Tapez `tseetu.univ-lyon1.fr` dans le champ "Ordinateur", puis cliquez sur le bouton "Connexion".

Attention, cette solution a des inconvénients :

- Le réseau de la fac est trop aléatoire ! On peut avoir un bon débit puis dans l'heure, il devient catastrophique. De plus, pour qu'un TP ait officiellement lieu avec cette solution, une réservation de salle virtuelle doit être faite. Donc, sauf dans le cas où cette réservation est faite et annoncée, cette solution est dédiée aux utilisations individuelles.
- Vous aurez, accès *via* une machine viruelle à votre disque réseau (commençant par `U:`) et il faudra gérer vos fichiers et répertoires sur ce disque et pointer sur ce disque depuis Matlab.

D'autres logiciels utilisés à Lyon I sont disponible sur cette machine virtuelle (comme Maple).

A.2. Octave sur votre machine

(1) Installer Octave. Voir `https://www.gnu.org/software/octave/download`

(2) Installer le symbolique d'Octave

  (a) Voir par exemple
  `https://sites.google.com/site/lm3tpoptimisation/guide-octaveinstall-config`, qui présente une installation sans Python (d'autres installations utilisant des bibliothèque de Python sont possibles).

  (b) Regarder l'exemple pour le "Symbolic package" et suivre pas-pas l'installation.

  (c) N'oubliez pas, à chaque utilisation de la partie sybmbolique d'Octave, de taper

```
pkg load symbolic
```

  Attention, la première ou les première fois il affiche `Symbolic pkg v2.7.1:` et puis, il faut attendre un peu ...

  (d) Faites le test final suivant : tapez (et interprétez !)

```
syms x
int((cos(x))^2)
```

Quelques liens (certains sont contextuels et peuvent changer selon la version d'Octave).
`https://octave.org/doc/v5.2.0/`
`https://octave.org/octave.pdf`
`https://octave.sourceforge.io/list_functions.php?sort=alphabetic`

Bibliographie

[DB22] N. Débit et J. Bastien. *Méthodes numériques de base.* Notes de cours de l'UV MNB (Département Matériaux) de Polytech Lyon, disponible sur le web : `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`, rubrique "Matériaux 3A : Méthodes Numériques de Base". 2022. 326 pages.

[Lob17] J. R. Lobry. *Fiche TD avec le logiciel R : tdr4a, Ajustement au modèle de Lotka-Volterra.* Disponible sur `http://pbil.univ-lyon1.fr/R/pdf/tdr4a.pdf`. 2017.

[Pia12] D. Piau. *cours de l'UE MAT127.* chapitre 1, disponible sur `https://www-fourier.univ-grenoble-alpes.fr/~dpiau/mat127/chapitre1.pdf`. 2012.

[Via25] G. Vial. *Le système proie-prédateur de Volterra-Lotka.* Disponible sur `http://perso.ec-lyon.fr/vial.gregory/Docs/Files/CpltAgreg/volterra.pdf`. Voir aussi d'autres ressources sur `http://perso.ec-lyon.fr/vial.gregory/enseignement.php`. 11 mai 2025.

[Wil97] U. Wilensky. *WolfSheepPredation.* disponible sur `http://ccl.northwestern.edu/netlogo/models/WolfSheepPredation`. Center for Connected Learning et Computer-Based Modeling, Northwestern University, Evanston, IL., 1997.

[Wil99] U. Wilensky. *NetLogo.* disponible sur `http://ccl.northwestern.edu/netlogo/`. Center for Connected Learning et Computer-Based Modeling, Northwestern University, Evanston, IL., 1999.