

CORRIGÉS DES TRAVAUX DIRIGÉS DE L'UE DDRS

MAM3A

MODÈLES DE CROISSANCE DÉMOGRAPHIQUE ET SCÉNARIOS

2024-2025, Printemps

Jérôme Bastien

Document compilé le 22 juin 2025

Le lien original de ce document est le suivant :

http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/DDRS/TDcor_croissance_scenarios.pdf

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons : Paternité - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification ; 3.0



<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/>

ou en français

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/deed.fr>

Liste des Travaux Dirigés

Correction du Travaux Dirigés 1. Modèles simples de croissance démographique (Malthus et Verhulst)	1
Cadre théorique	1
Modèle de Malthus	3
Modèle de Verhulst	4
Exercices facultatifs	6
Correction du Travaux Dirigés 2. Modèles à populations multiples	7
Modèle de base de Lotka-Voltera	7
Variantes du modèle de Lotka-Voltera	13
D'autres modèles	14
Bibliographie	18

Modèles simples de croissance démographique (Malthus et Verhulst)

Cadre théorique

CORRECTION DE L'EXERCICE 1.1.

- (1) (a) D'après [Bas22a, l'équation (6.4)] disponible sur <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MFI/coursMFI.pdf> on a

$$N(t) = Ce^{rt},$$

où C est une constante déterminée par la condition initiale (1.1b) de l'énoncé qui donne

$$N_0 = Ce^{rt_0},$$

puis

$$C = N_0 e^{-rt_0}$$

et

$$\forall t \geq t_0, \quad N(t) = N_0 e^{-rt_0} e^{rt},$$

et donc

$$\forall t \geq t_0, \quad N(t) = N(t_0) e^{r(t-t_0)}. \quad (1.1)$$

- (b) On a clairement les résultats suivants :

- (i) Si $r < 0$, N est positive et décroissante et $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = 0$;
 - (ii) Si $r = 0$, N est constante (et égale à N_0) ;
 - (iii) Si $r > 0$, N est positive et croissante et $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = +\infty$;
- (c) (i) D'après la définition [Bas22a, l'équation (??)] on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{N(t+h) - N(t)}{h} = N'(t).$$

et donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tau(t) = \frac{N'(t)}{N(t)}. \quad (1.2)$$

- (ii) D'après l'équation (1.1a) de l'énoncé, $\frac{N'(t)}{N(t)}$ vaut r et on a donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tau(t) = r. \quad (1.3)$$

REMARQUE 1.1. On pouvait aussi remarquer que, d'après (1.1) :

$$\begin{aligned} \frac{N(t+h) - N(t)}{hN(t)} &= \frac{N(t_0)e^{r(t+h-t_0)} - N(t_0)e^{r(t-t_0)}}{hN(t_0)e^{r(t-t_0)}}, \\ &= \frac{(N(t_0)e^{r(t-t_0)}) (e^{rh} - 1)}{hN(t_0)e^{r(t-t_0)}}, \\ &= \frac{e^{rh} - 1}{h}. \end{aligned}$$

Cela tend vers la dérivée de la fonction $h \mapsto e^{rh}$ en zéro qui vaut r . On peut aussi utiliser le développement limité de l'annexe A du cours et écrire, de façon strictement équivalente quand h tend vers zéro :

$$\begin{aligned} \frac{e^{rh} - 1}{h} &= \frac{1 + rh + o(h) - 1}{h}, \\ &= \frac{rh + o(h)}{h}, \\ &= r + o(1), \end{aligned}$$

et donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tau(t) = r,$$

et on retrouve (1.3).

◇

D'après (1.3), l'équation différentielle (1.1a) de l'énoncé traduit donc un modèle où le taux de croissance instantané défini par (1.2) est constant, situation déjà rencontrée dans [Bas22b, exercice de TD 6.12] (avec $r < 0$) ou dans [Bas22b, exercice de TD 11.7] (avec $r > 0$).

- (2) (a) Si $b = 0$, l'équation différentielle (1.3) de l'énoncé est identique à l'équation différentielle (1.1) de l'énoncé. On renvoie donc à la correction de la question 1 dans ce cas-là.
- (b) (i) Si on suppose que N est constante et vérifie la condition initiale (1.1b) de l'énoncé, on a $N = N_0$ et on a donc

$$0 = N'(t) = aN_0 \left(1 - \frac{N_0}{K} \right).$$

et donc, puisque N_0 est non nulle, on a $1 - \frac{N_0}{K} = 0$ et donc

$$\forall t \geq t_0, \quad N(t) = K. \quad (1.4)$$

- (ii) Puisque N ne s'annule pas, on peut poser $v' = 1/N$. On a alors $v' = -N'/N^2$ puis, en utilisant l'équation différentielle (1.4) de l'énoncé, on a

$$\begin{aligned} v' &= -\frac{aN}{N^2} \left(1 - \frac{N}{K} \right), \\ &= -a \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{K} \right), \\ &= -av + \frac{a}{K}, \end{aligned}$$

et on obtient donc bien l'équation différentielle (1.5) de l'énoncé.

- (iii) On résout l'équation (1.5) de l'énoncé exactement comme dans [Bas22a, l'exemple 6.6]. La solution de l'équation homogène associée $v' + av = 0$ et donnée par $v(t) = Ce^{-at}$. La solution constante de l'équation différentielle (1.5) de l'énoncé est donnée par $av = \frac{a}{K}$, soit $v = 1/K$ et donc la somme de ces deux applications fournit la solution de l'équation différentielle (1.5) de l'énoncé :

$$v(t) = Ce^{-at} + \frac{1}{K},$$

- (iv) Donc, en revenant à $N = 1/v$, on a

$$N(t) = \frac{1}{Ce^{-at} + \frac{1}{K}}. \quad (1.5)$$

La condition initiale (1.1b) de l'énoncé donne

$$N_0 = \frac{1}{Ce^{-at_0} + \frac{1}{K}}.$$

et donc, il vient

$$C = e^{at_0} \left(\frac{1}{N_0} - \frac{1}{K} \right)$$

et en réinjectant dans (1.5), on a

$$N(t) = \frac{1}{C e^{-at} e^{at_0} \left(\frac{1}{N_0} - \frac{1}{K} \right) + \frac{1}{K}},$$

ce qui est équivalent à l'équation (1.7) de l'énoncé.

(v)(A) Si on fait l'hypothèse (1.8) de l'énoncé, alors

$$\frac{K}{N_0} - 1 > 0, \tag{1.6}$$

et ainsi que le dénominateur de la fonction N est donc toujours strictement positif et N est donc définie sur \mathbb{R} .

REMARQUE 1.2. Contrairement au cadre du cours, où les solutions des équations différentielles sont définies sur \mathbb{R} , il faut le vérifier ici car ce n'est pas acquis, vu que l'on n'est pas dans le cadre [Bas22a, la section 6.2]. Notons par exemple que si l'on ne fait pas l'hypothèse (1.8) de l'énoncé, la solution n'est pas nécessairement définie sur \mathbb{R} .

◇

(B) Il n'est pas nécessaire de dériver N . D'après (1.6), la fonction $t \mapsto 1 + \left(\frac{K}{N_0} - 1 \right) e^{-a(t-t_0)}$ est décroissante et ainsi N est strictement croissante. De plus, il est aisé de constater que N tend vers K quand t tend vers l'infini.

(C) D'après (1.2) et l'équation (1.4) de l'énoncé, le taux de croissance r n'est plus constant comme dans la question 1, mais est donné par

$$r(N) = a \left(1 - \frac{N}{K} \right).$$

D'après ce qui précède, $r(t)$ est décroissant et passe de la valeur $aN \left(1 - \frac{N_0}{K} \right)$ à une limite égale à zéro.

Modèle de Malthus

CORRECTION DE L'EXERCICE 1.2.

(1) (a) Une version minimale est donnée par les instructions suivantes que vous pouvez copier-coller (en corrigeant éventuellement les caractères mal encodés!) dans Matlab :

```

donnee_canada;
t0=t(1);
[a,b,R]=regression_lineaire(t-t0,log(y));
r=a;
logy0=b;
plot(t,log(y),'*',t,r*(t-t0)+logy0);
legend('données','modèle','location','NorthWest');
xlabel('années');
ylabel('logarithme_de_la_population_(M)');
    
```

(b) Pour une version plus complète, voir le script `canada.m`, qu'il suffira de lancer. Il produira autant de figures que nécessaire.

(2) Non corrigé, dépend de vos données!

Modèle de Verhulst

CORRECTION DE L'EXERCICE 1.3.

- (1) Il suffit de taper ce qui a été donné en exemple, un peu adapté!

```
format long ;
donnee_usa ;
[K, y0, a, t0]=regression_logistique(t, y);
```

et de comparer avec le transparent 58!

- (2) (a) Ici, la croissance exponentielle prévue par le modèle de Malthus n'est pas conforme ni aux données intermédiaires ni aux données finales de la population, comme le montre le graphique obtenu.
- (b) La valeur de N_0 trouvée (voir équations(27c) des transparents) n'est pas égale à la donnée initiale de $N_0 = 3.929000$, correspondant à la première année puisque ce paramètre a été déterminé par la procédure de régression logistique décrite dans le transparent 58. On peut néanmoins observer que cette valeurs en sont proche. En revanche, t_0 est choisie égale à 1790.

- (c) (i) La nombre K , ici égal à

$$K = 200.033501, \tag{1.7}$$

correspond à la capacité d'accueil, qui est la limite quand t vers l'infini de $N(t)$, comme le décrivent les transparents 46 et 47.

- (ii) On peut calculer la valeur prédite par le modèle en tapant par exemple

```
anfind=2200;
fonction_logistique_new(K, y0, a, t0, anfind);
```

et qui renvoie la taille de la population prédite en 2200, égale à

$$N = 200.001708, \tag{1.8}$$

qui est proche de la valeur donnée par (1.7).

On peut aussi tracer simultanément les données et les prévisions jusqu'à cette année en tapant :

```
anfind=2200;
[K, y0, a, t0, resnorm, resnormc, yfin]=regression_logistique(...
t, y, [], [], [], 'M', [], [], [], [], anfind);
disp(yfin);
```

qui renvoie de nouveau la population prédite, dans la variable **yfin** et produit le graphique de la figure 1.1 page suivante.

- (iii) D'après <https://fr.wikipedia.org/wiki/États-Unis>, la population des États-Unis en 2023 est presque de 335 M ce qui est bien supérieur à la valeur donnée par (1.8). Nous avons déjà rencontré cette difficulté d'établir des prédictions à partir du modèle de Verhulst (transparents 61 et 68).

- (3) (a) Par exemple, d'après [Bas22a, Chapitre "Fonctions (de \mathbb{R} dans \mathbb{R})] ou [Bas22c, Chapitre "Dérivée, différentiation"], l'équation de la tangente à la courbe $y = f(t)$ au point d'abscisse t est donnée par

$$\frac{Y - f(t)}{X - t} = f'(t),$$

soit encore

$$Y = (X - t)f'(t) + f(t). \tag{1.9}$$

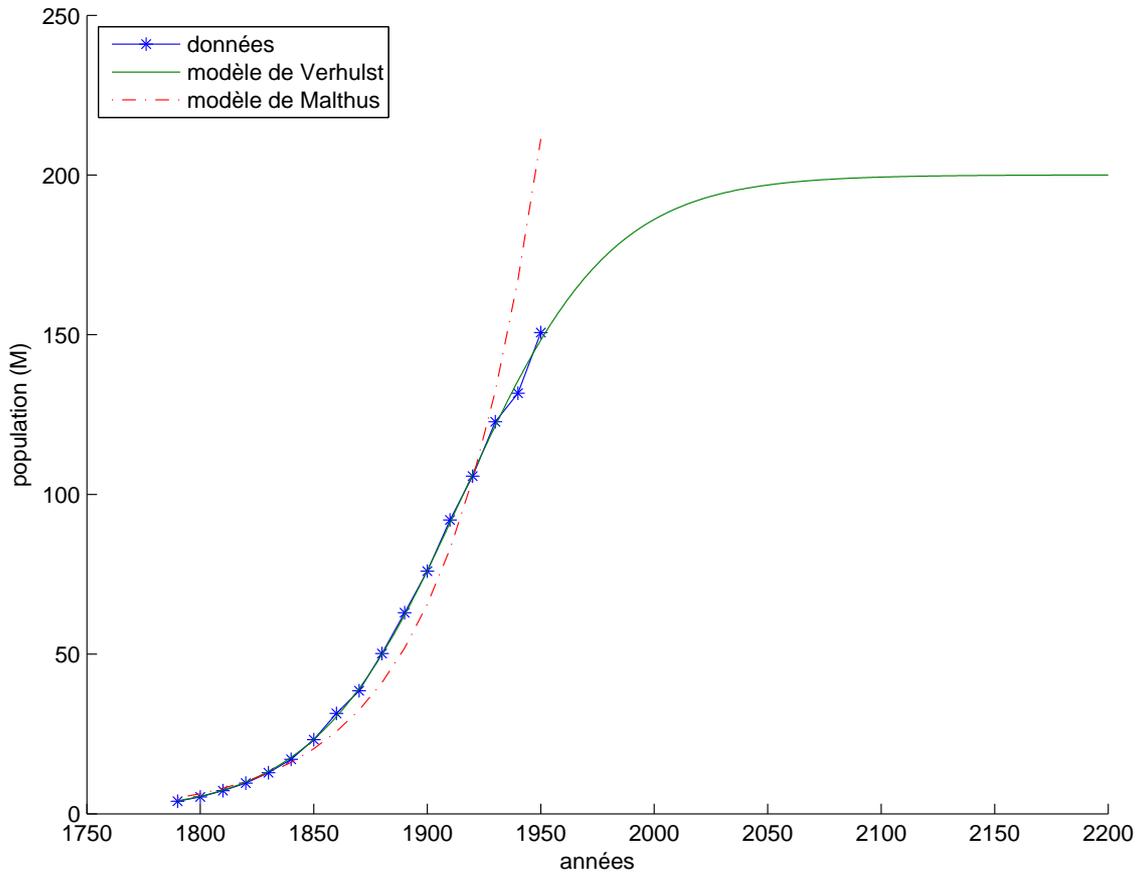


FIGURE 1.1. La population des USA jusqu'en 2200.

- (b) Pour le modèle de Verhulst au point d'inflexion, on a, d'après le transparent 48, au point d'inflexion d'abscisse \hat{t}

$$N(\hat{t}) = \frac{K}{2}, \tag{1.10}$$

puis, d'après l'équation différentielle (15) des transparents, on en déduit

$$\begin{aligned} N'(\hat{t}) &= aN(\hat{t}) \left(1 - \frac{N(\hat{t})}{K}\right), \\ &= a\frac{K}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right), \\ &= a\frac{K}{4}, \end{aligned}$$

et (1.9) s'écrit

$$Y = (X - \hat{t}) a\frac{K}{4} + \frac{K}{2}, \tag{1.11}$$

où \hat{t} est donné par l'équation (20) des transparents.

REMARQUE 1.3. Cette formule a été programmée dans la fonction `regression_logistique` et si on tape

```

anfind=2200;
[K,y0,a,t0,resnorm,resnormc,yfin]=regression_logistique(...
t,y,[],[],[],'M',[],[],[],[],anfind,1);
disp(yfin);

```

la tangente est rajoutée au graphique, comme le montre la figure 1.2.

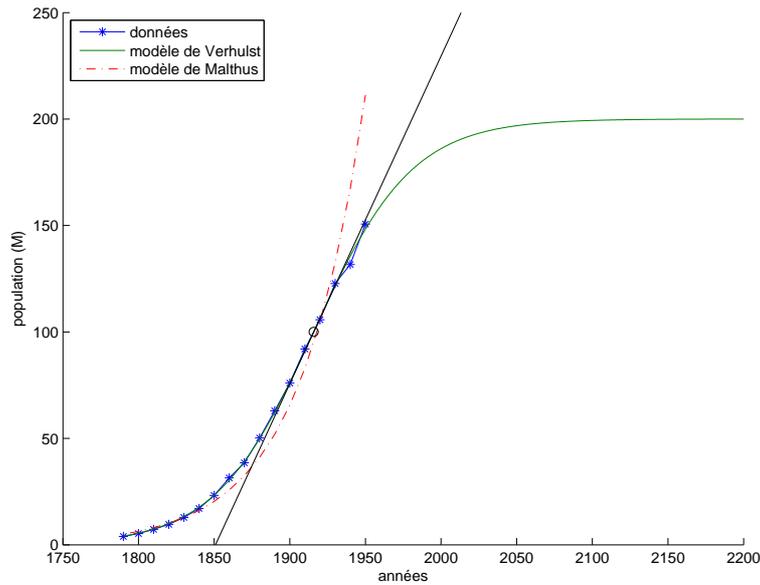


FIGURE 1.2. La population des USA jusqu'en 2200 et la tangente au point d'inflexion.

CORRECTION DE L'EXERCICE 1.4.

Exercice, dépendant des données de chacun, non corrigé,

Exercices facultatifs

CORRECTION DE L'EXERCICE 1.5.

Voir le script `usa.m` et taper :

```
usa;
```

CORRECTION DE L'EXERCICE 1.6.

Taper :

```
donnee_elephant;
```

```
[K,y0,a,t0,resnorm,resnormc]=regression_logistique(t,y,0,[],yc,[],1000,0,1);
```

Modèles à populations multiples

Modèle de base de Lotka-Volterra

CORRECTION DE L'EXERCICE 2.1.

Cet exercice est en partie inspiré par [Lob17].

(1) (a) Il suffit d'écrire, d'après l'équation (43) des transparents, que $x'(t) = y'(t) = 0$ est équivalent à

$$\begin{aligned} ax(t) - bx(t)y(t) &= 0, \\ -cy(t) + dx(t)y(t) &= 0, \end{aligned}$$

ce qui est encore équivalent à

$$\begin{aligned} x(t)(a - by(t)) &= 0, \\ y(t)(-c + dx(t)) &= 0, \end{aligned}$$

et on obtient donc l'équation (2.2) des sujets de TD.

(b) D'après l'équation (47) des transparents, la seule valeur possible du point d'équilibre est donnée par

$$x_e = \frac{c}{d}, \tag{2.1a}$$

$$y_e = \frac{a}{b}, \tag{2.1b}$$

point autour duquel tournent les solutions du modèle de Lotka-Volterra dans le plan (x, y) (voir transparent 104). Ce point ne dépend pas des conditions initiales, mais seulement des paramètres a, b, c et d du modèle.

(2)

(a)

La fonction `lotka_volterra_bis` permet d'afficher le point d'équilibre sur les courbes temporelles ou dans le plan (x, y) .

Par exemple, on peut obtenir les figures des transparents 118 et 119, avec le point d'équilibre en tapant

```
lotka_volterra_bis(a, b, c, d, x0, y0, [], [], [], [], te, xe, ye);
```

Voir les figures 2.2 page 9.

En faisant varier les conditions initiales, on obtient les différents cycle de la figure 2.1 page suivante, où on constate bien que le point d'équilibre, donné par (2.1), est indépendant des conditions initiales. On a tapé :

```
Nt=20;
ux=linspace(0.05, 1, Nt);
uy=linspace(0.05, 1, Nt);
x0tot=x0*uy;
```

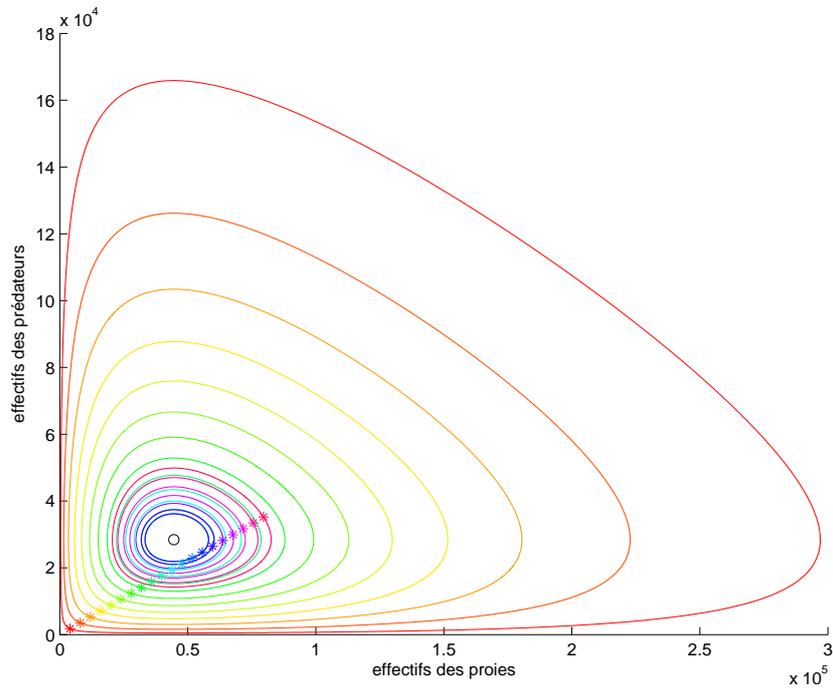


FIGURE 2.1. Différents cycles correspondant à différentes conditions initiales (question 2a).

```
y0tot=y0*uy;
lotka_volterra_bis(a,b,c,d,x0tot,y0tot);
```

(b)

Les valeurs du point d'équilibre donné par (2.1) valent ici :

$$x_e = 44\,560,624\,250,6, \tag{2.2a}$$

$$y_e = 28\,432,709. \tag{2.2b}$$

Si on choisit par exemple des conditions initiales "proche de l'équilibre" (2.2)

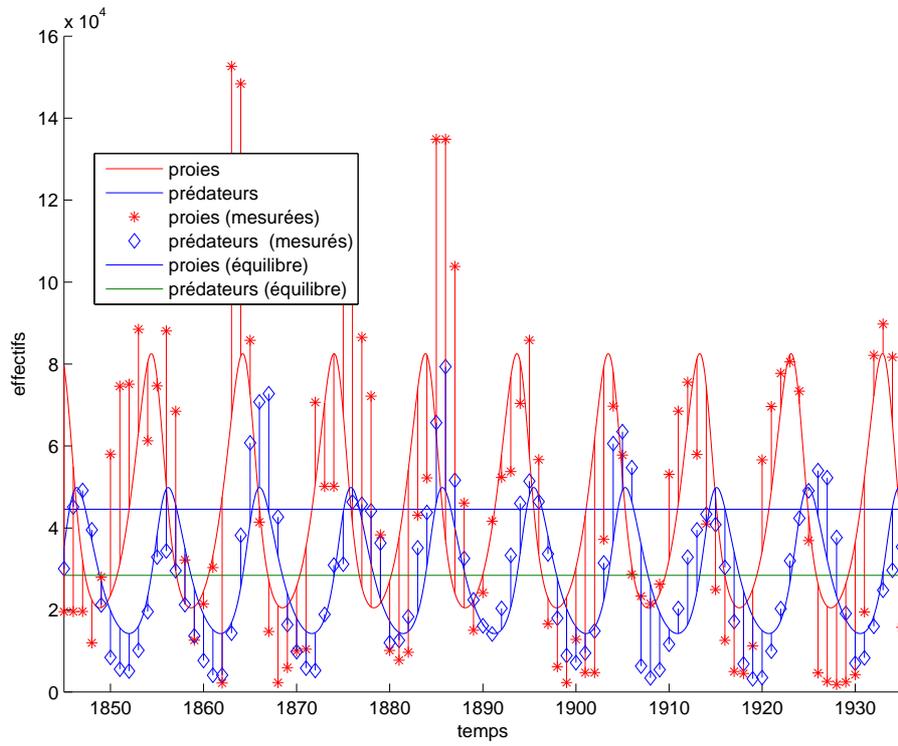
$$x_0 = 45\,560,624\,250,6, \tag{2.3a}$$

$$y_0 = 29\,932,709, \tag{2.3b}$$

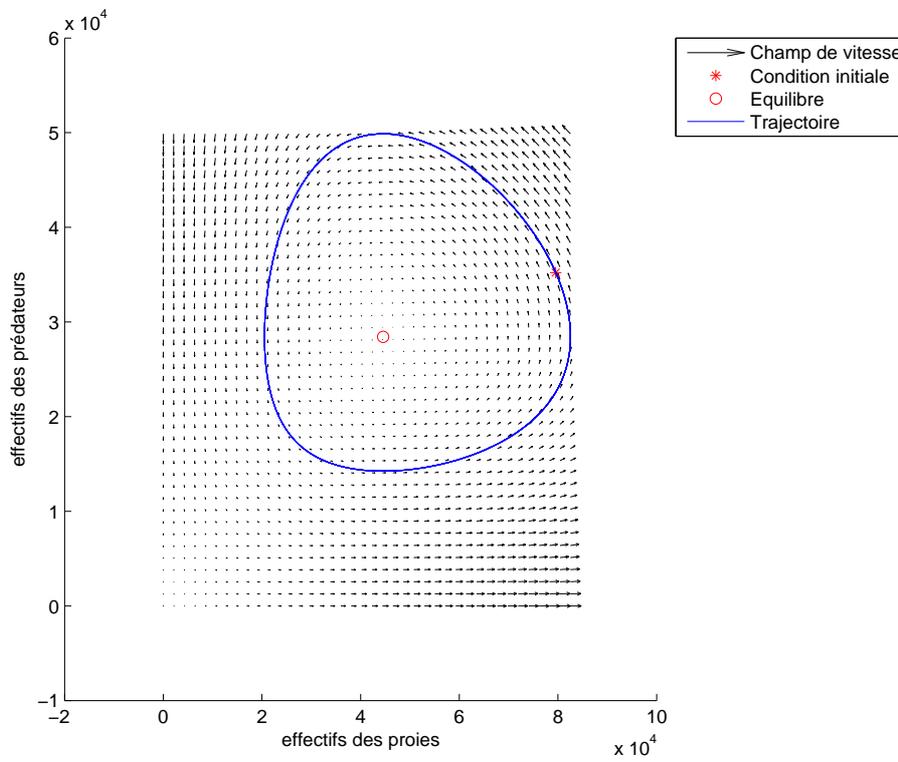
on observe les courbes de la figure 2.3 page 10 où l'on voit de petites oscillations autour de l'équilibre. Si on choisit par exemple des conditions initiales égales au valeur de l'équilibre (2.2), on observe les courbes constantes de la figure 2.4 page 11. En effet d'après le calcul de la question 1a, on a pour $t = 0, x'(t) = y'(t) = 0$, ce qui implique que par unicité des solutions x et y x et y sont constantes et donc égales aux conditions initiales.

(3) (a) (i) D'après l'équations 2.1a (et aussi (49) des transparents), cela déplace le centre des cycles vers le haut, c'est-à-dire, un nombre moyen de prédateurs qui augmente. De, plus, on constatera empiriquement en question 3(a)ii que l'amplitude des effectifs des proies et des prédateurs augmente. Donc, plus de proies en moyenne mais plus d'amplitude des courbes.

(ii)

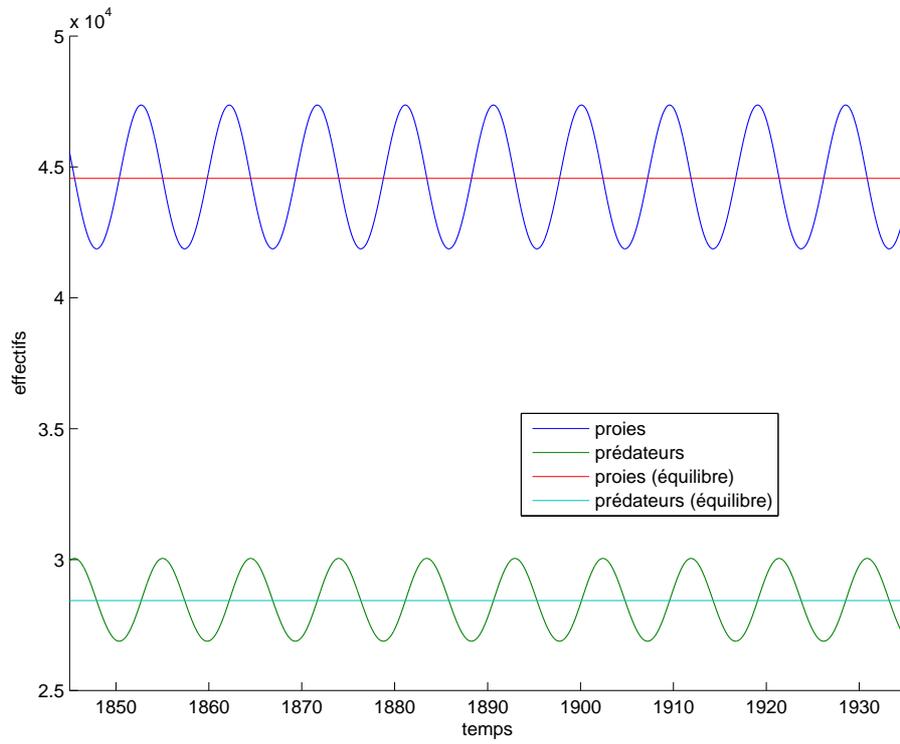


(a) Les effectifs au cours du temps

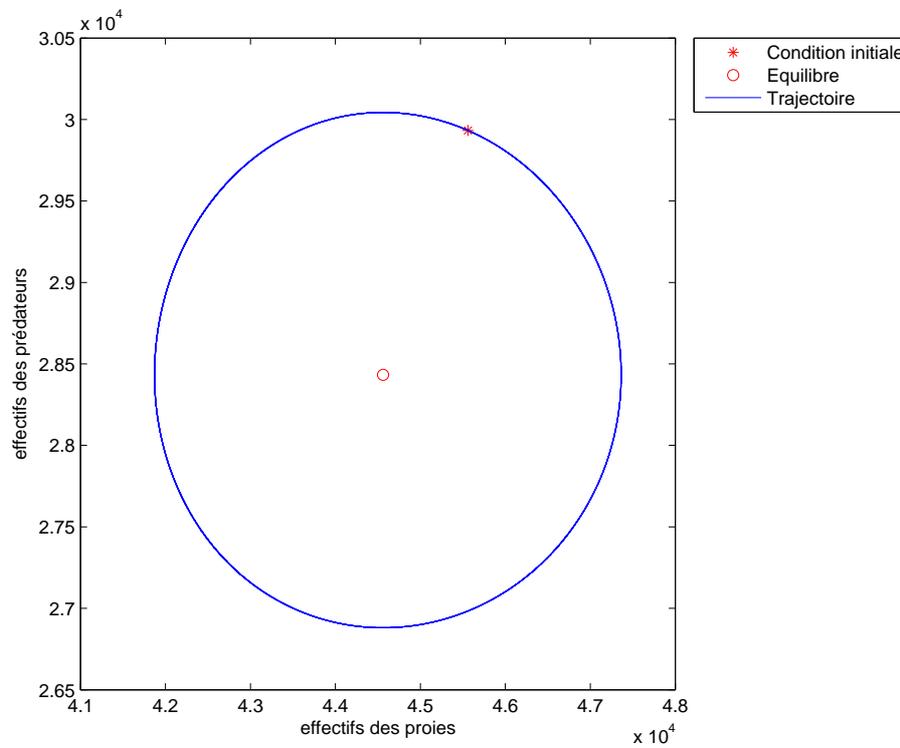


(b) Les effectifs des prédateurs en fonction de ceux des proies

FIGURE 2.2. Les simulations de la question 2a avec l'équilibre.

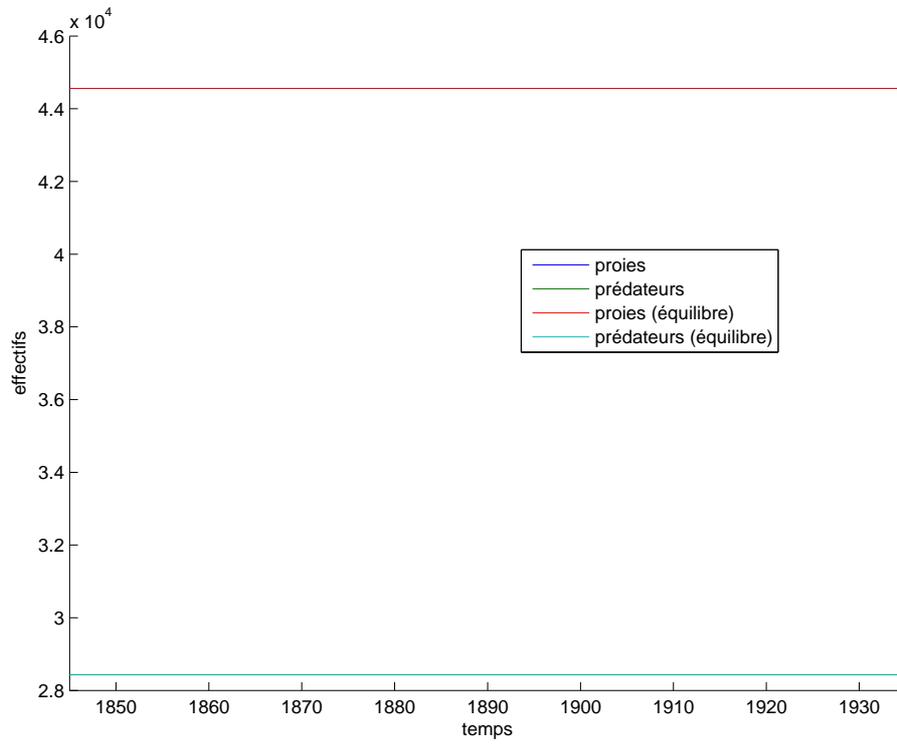


(a) Les effectifs au cours du temps

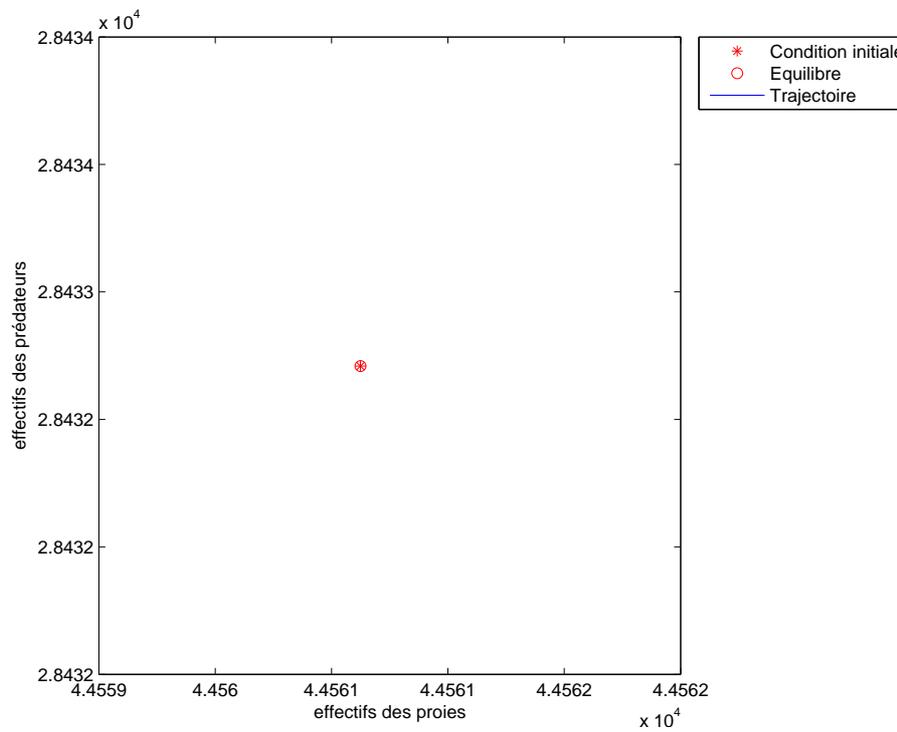


(b) Les effectifs des prédateurs en fonction de ceux des proies

FIGURE 2.3. Les simulations de la question 2a avec l'équilibre et les conditions initiales données par (2.3).



(a) Les effectifs au cours du temps



(b) Les effectifs des prédateurs en fonction de ceux des proies

FIGURE 2.4. Les simulations de la question 2a avec l'équilibre et les conditions initiales données par (2.2).

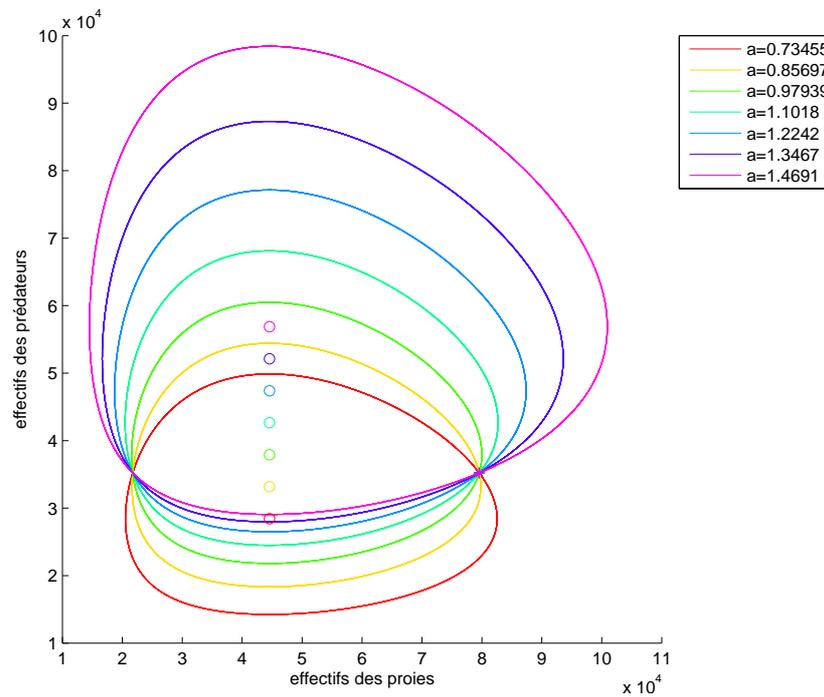


FIGURE 2.5. Différents cycles correspondant à différentes valeurs de a (question 3(a)ii).

Voir la figure 2.5, qui confirme que le centre des cycles se déplace vers la haut en provoquant aussi une déformation des cycles, qui doivent continuer à passer par les conditions initiales, restées identiques.

(iii) L'augmentation de la croissance des proies, a , se traduit par des naissances plus importantes des proies, mais dont le surplus finit dans le ventre des prédateurs.

(b)

De façon analogue à la question 3a, on constate, grâce à la figure 2.6 page suivante, qu'une augmentation de c déplace le centre du cycles vers la droite (ce qui est cohérent avec (2.1b)) : les prédateurs, moins nombreux, laisse les proies proliférer de façon plus importante.

(c)

De façon analogue à la question 3a, on constate, grâce à la figure 2.7 page 14, qu'une augmentation de la l'efficacité de la prédation fait diminuer simultanément le nombre moyen de proies et de prédateurs (ce qui est cohérent avec (2.1a)-(2.1b)) : de façon intuitive, c'est normal puisque moins de prédateurs récupèrent l'énergie des proies dévorées mais ça l'est moins du coté des proies !

CORRECTION DE L'EXERCICE 2.2.

(1) Bien sûr. Voir transparents 120, 125, 126, 127, 128, 129 et 130.

(2) (a) Attention, on rompt la symétrie du cours en n'ayant plus l'hypothèse (51) des transparents.

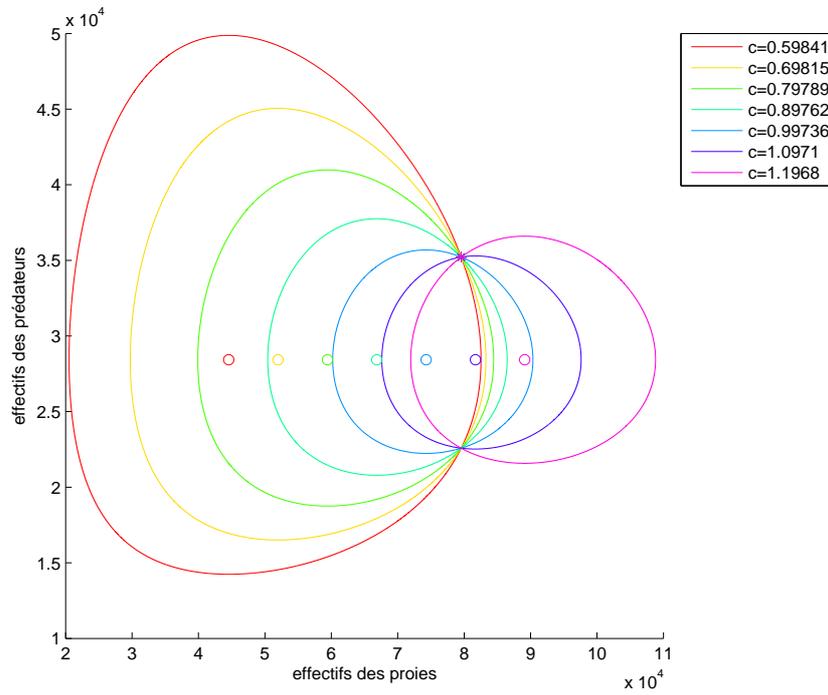


FIGURE 2.6. Différents cycles correspondant à différentes valeurs de c (question 3b).

$$a = 0,194\,790, \tag{2.4a}$$

$$b = 2,674\,079\,261 \times 10^{-5}, \tag{2.4b}$$

$$c = 7,903\,675, \tag{2.4c}$$

$$d = 1,748\,889\,215 \times 10^{-4}, \tag{2.4d}$$

$$x_0 = 79\,549,777\,045, \tag{2.4e}$$

$$y_0 = 726,235\,317. \tag{2.4f}$$

en cours de rédaction

(b)

en cours de rédaction

(c)

en cours de rédaction

CORRECTION DE L'EXERCICE 2.3.

En cours de rédaction

Variante du modèle de Lotka-Volterra

CORRECTION DE L'EXERCICE 2.4.

En cours de rédaction.

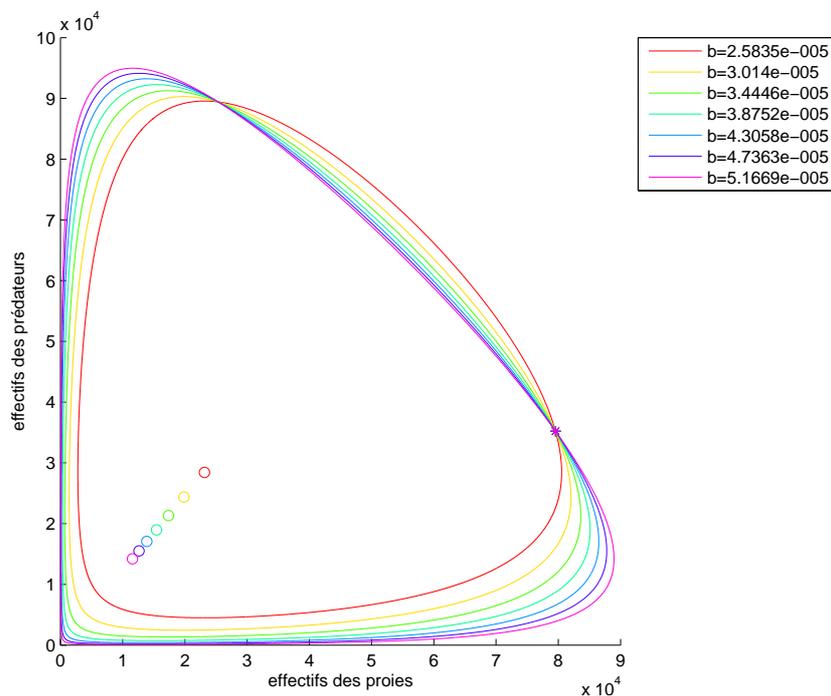


FIGURE 2.7. Différents cycles correspondant à différentes valeurs de b (avec $b = d$) (question 3c).

D'autres modèles

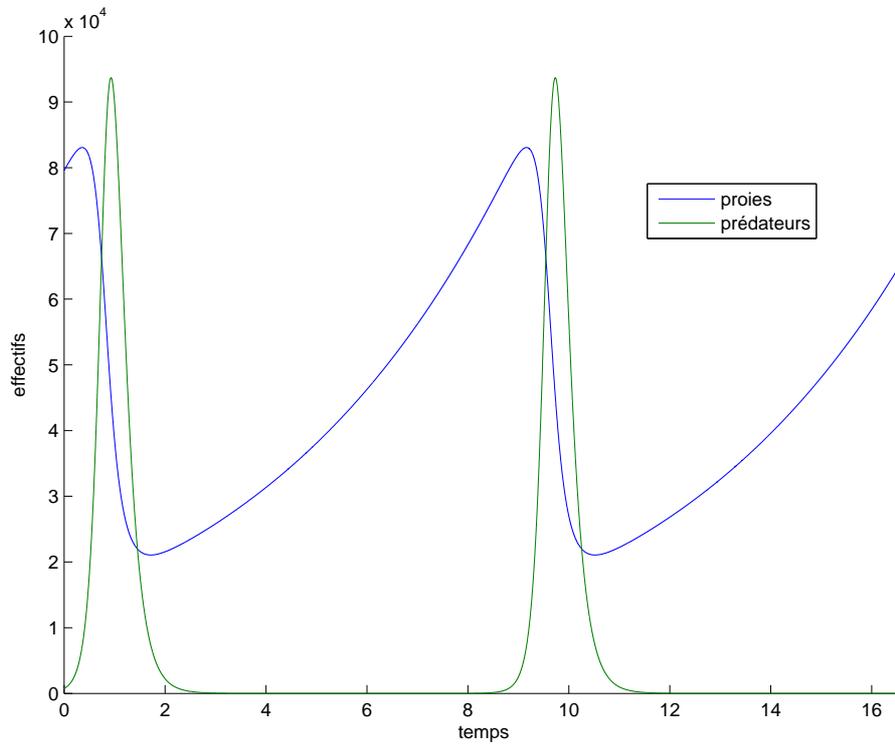
CORRECTION DE L'EXERCICE 2.5.

(1) (a) On peut obtenir plusieurs comportements possibles :

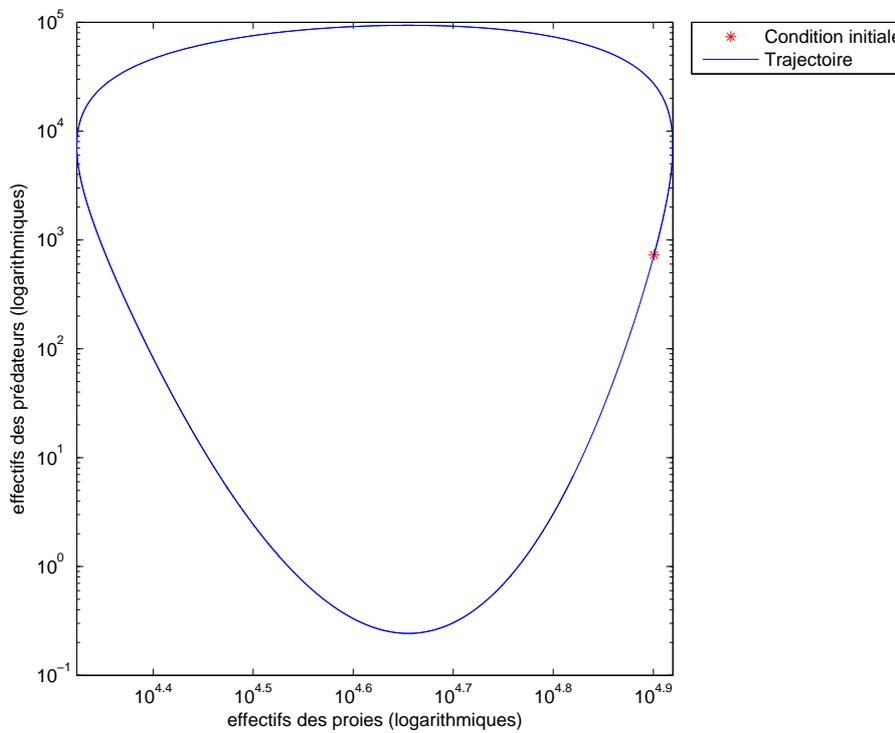
- (i) Les moutons envahissent la terre, les loups ayant disparu ;
- (ii) Les moutons, puis les loups disparaissent ;
- (iii) *A priori*, pas de comportement cyclique !

Le comportement cyclique du modèle de Lotka-Volterra n'est donc *a priori* pas observable, alors que la disparition de loups ou celles des moutons (puis donc des loups), observé dans l'exercice 2.2 est possible.

- (b) (i) Quels que soient les paramètres, la présence de l'herbe, stabilise les populations qui sont, en principe, toutes les trois périodiques.
 - (ii) Si on choisit `initial-number-wolves` égal à 0, on observe les mêmes comportements que dans la question 1.
- (2) Le comportement avec équation différentielle autorise les cycles, contrairement au modèle multi-agent, dont il faudrait essayer de faire des moyennes, pour voir qu'elle se rapprocherait du modèle équations différentielles.

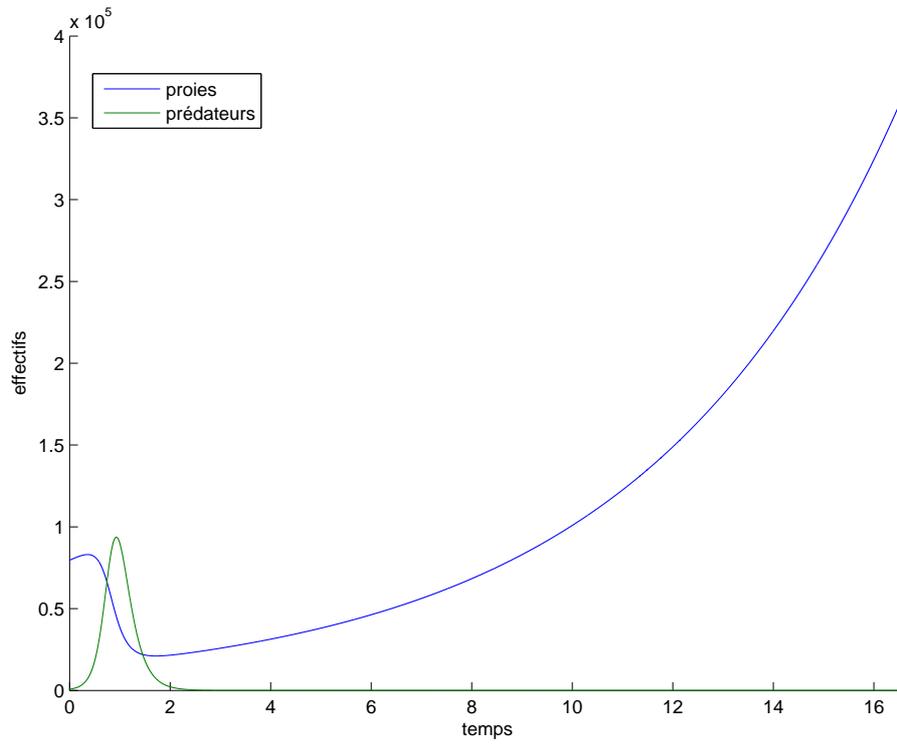


(a) Les effectifs au cours du temps

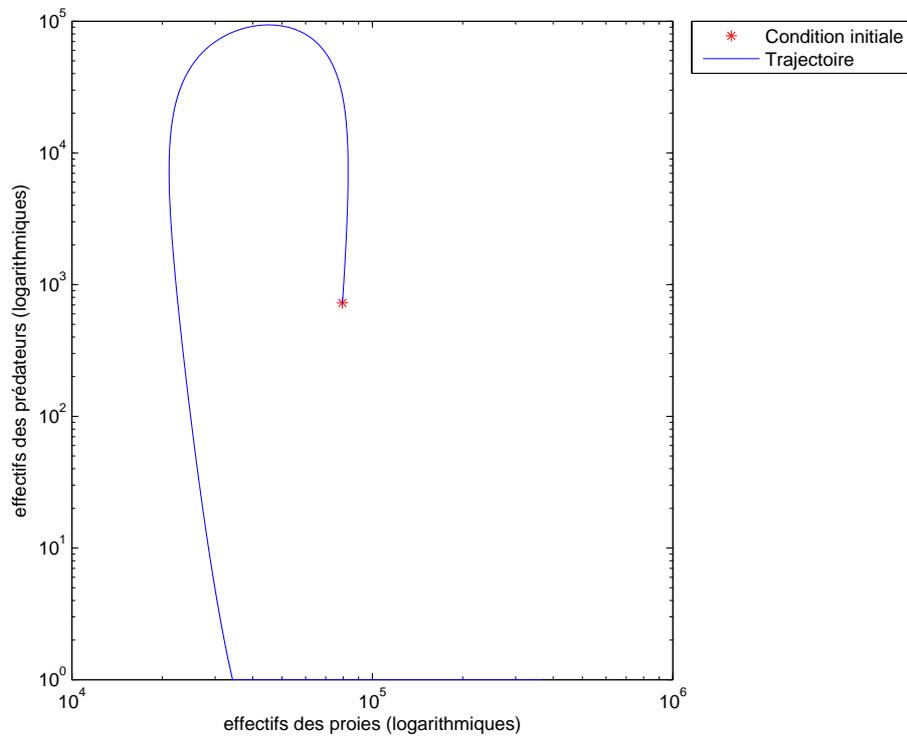


(b) Les effectifs des prédateurs en fonction de ceux des proies

FIGURE 2.8. Les simulations de la question 2a pour les valeurs des paramètres données par (2.4).

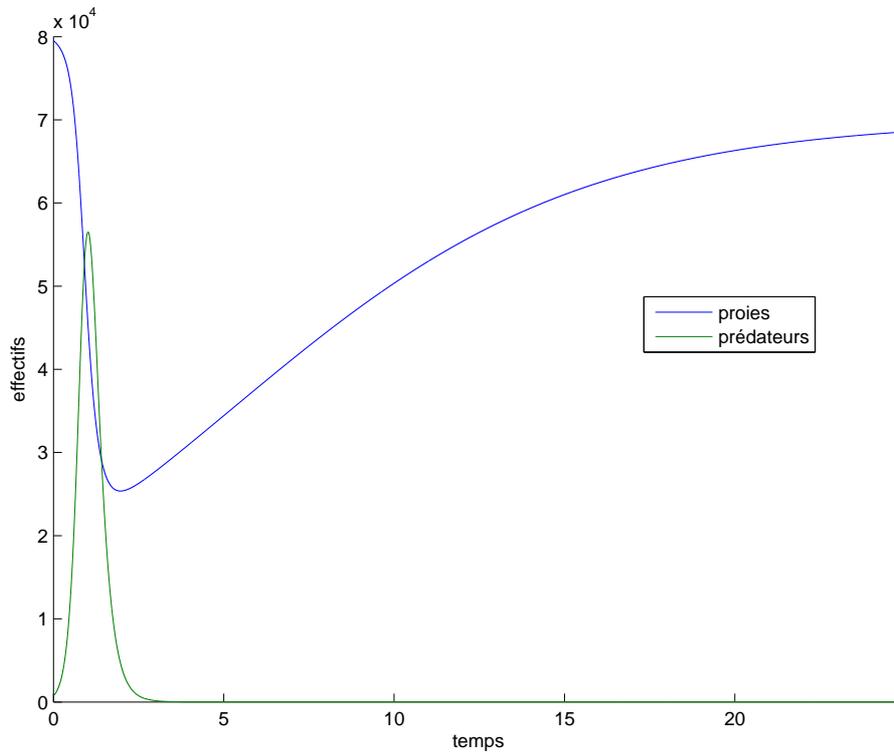


(a) Les effectifs au cours du temps

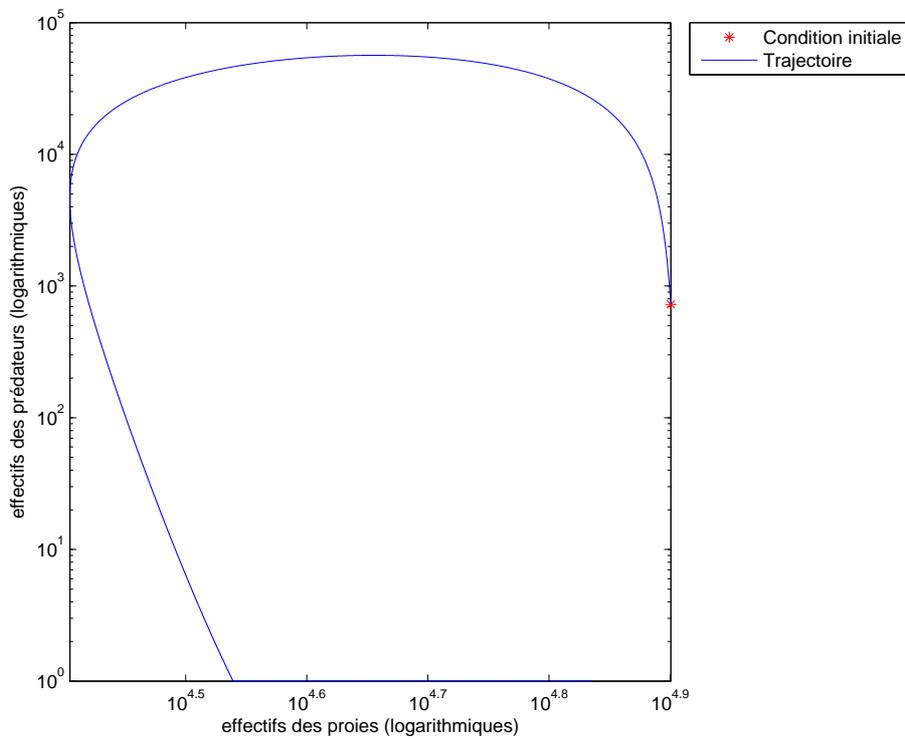


(b) Les effectifs des prédateurs en fonction de ceux des proies

FIGURE 2.9. Les simulations de la question 2b avec un seuil égal à $s = 1$.



(a) Les effectifs au cours du temps



(b) Les effectifs des prédateurs en fonction de ceux des proies

FIGURE 2.10. Les simulations de la question 2c avec une capacité de charge égale à $K = 70\,000$.

Bibliographie

- [Bas22a] J. BASTIEN. *Mathématiques Fondamentales pour l'Informatique*. Notes de cours de l'UV MFI (Département Informatique) de Polytech Lyon, disponible sur le web : <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html>, rubrique "Informatique 3A : Mathématiques Fondamentales pour l'Informatique". 2022. 270 pages.
- [Bas22b] J. BASTIEN. *Mathématiques Fondamentales pour l'Informatique*. Travaux Dirigés de l'UV MFI (Département Informatique) de Polytech Lyon, disponible sur le web : <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html>, rubrique "Informatique 3A : Mathématiques Fondamentales pour l'Informatique". 2022. 39 pages.
- [Bas22c] J. BASTIEN. *Mathématiques Fondamentales pour l'Ingénieur*. Notes de cours de l'UV MFImater (Département Matériaux) de Polytech Lyon, disponible sur le web : <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html>, rubrique "Matériaux 3A : Mathématiques Fondamentales pour l'Ingénieur". 2022. 127 pages.
- [Lob17] J. R. LOBRY. *Fiche TD avec le logiciel $\text{\textcircled{R}}$: tdr4a, Ajustement au modèle de Lotka-Volterra*. Disponible sur <http://pbil.univ-lyon1.fr/R/pdf/tdr4a.pdf>. 2017.