Modèles de croissance démographique et scénarios

DDRS, Tronc commun 3A (Départements MAT, INFO, MECA, GBM)

Jérôme Bastien

Université Lyon 1, Polytech

Printemps 2025

Version du 21 mai 2025

Lien de téléchargement

Ce document est disponible sur
`http://utbmjb.chez-alice.fr`, rubrique DDRS
ou
`http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/DDRS/croissance_scenarios.pdf`

Merci ! ...

aux collègues qui n'ont pas hésité à me donner un peu de leur temps pour discuter avec moi et m'apporter de nombreuses ressources :

- Serge Fenet (Université Lyon 1), membre du LIRIS et de l'équipe STEEP (https://perso.liris.cnrs.fr/serge.fenet/homepage/ et https://team.inria.fr/steep/fr/) ;
- Christine Solnon (INSA de Lyon), membre du CITI (http://perso.citi.insa-lyon.fr/csolnon/ ; voir aussi les ressources de cours de DDRS, disponibles sur https://moodle.insa-lyon.fr/enrol/index.php?id=8384 et https://moodle.insa-lyon.fr/course/view.php?id=7968, pour les étudiants en informatique de l'INSA de Lyon) ;
- Jean R. Lobry (Université Lyon 1), membre du LBBE (https://pbil.univ-lyon1.fr/members/lobry/, https://pbil.univ-lyon1.fr/R/ https://lbbe-web.univ-lyon1.fr/fr. Voir aussi [Lob17]).

Organisation

1. Trois séances de TD/TP (voir `http://utbmjb.chez-alice.fr`, rubrique DDRS) sur des simulations numériques à faire à partir de ce document ou des données à chercher sur Internet, avec Matlab, Octave (ou autres ?), voir annexe A des documents de TD.
2. Un rendu à faire par binôme ou trinôme sur les exercices de TD.

Objectifs

Cet enseignement, dispensé à la suite des recommandations de la CTI, est une toute petite introduction aux DDRS. Il a pour ambition de vous faire manipuler (en théorie comme en pratique) des modèles simples ou plus complexes de croisssance de populations, en s'appuyant sur des notions simples de mathématiques, en principe déjà acquises ou revues en 3A [1].

1. ce qui est le cas des étudiants des départements INFO et MAT, à qui il ne serait pas pardonné de les avoir oubliées .... puisque elles ont été traitées avec votre obligé !

Objectifs

Cet enseignement, dispensé à la suite des recommandations de la CTI, est une toute petite introduction aux DDRS. Il a pour ambition de vous faire manipuler (en théorie comme en pratique) des modèles simples ou plus complexes de croisssance de populations, en s'appuyant sur des notions simples de mathématiques, en principe déjà acquises ou revues en 3A [1].

L'objectif est double : vous apprendre à savoir critiquer de façon scientifique des courbes de croissance et essayer de les mettre en regard avec les notions de ressources et d'aborder divers scénarios.

1. ce qui est le cas des étudiants des départements INFO et MAT, à qui il ne serait pas pardonné de les avoir oubliées .... puisque elles ont été traitées avec votre obligé !

Plan

1. Modèles simples de croissance démographique (Malthus et Verhulst)
2. La transition démographique et la prospective démographique
3. Modèles à populations multiples
4. Perspectives et conclusions

Sommaire

1. Modèles simples de croissance démographique (Malthus et Verhulst)
2. La transition démographique et la prospective démographique
3. Modèles à populations multiples
4. Perspectives et conclusions

Notion de modèle

1. Équation différentielle ordinaire ou aux dérivées partielles (ex. des ondes, de la chaleur, principe fondamentale de la dynamique ...) ;

Notion de modèle

1. Équation différentielle ordinaire ou aux dérivées partielles (ex. des ondes, de la chaleur, principe fondamentale de la dynamique ...) ;
2. Hypothèses faites *a priori* ;

Notion de modèle

1. Équation différentielle ordinaire ou aux dérivées partielles (ex. des ondes, de la chaleur, principe fondamentale de la dynamique ...) ;
2. Hypothèses faites *a priori* ;
3. Calcul, comparaison à l'expérience et calage des paramètres *a posteriori* ;

Notion de modèle

1. Équation différentielle ordinaire ou aux dérivées partielles (ex. des ondes, de la chaleur, principe fondamentale de la dynamique ...) ;
2. Hypothèses faites *a priori* ;
3. Calcul, comparaison à l'expérience et calage des paramètres *a posteriori* ;
4. Rejet, validation ou amélioration du modèle ?

Modèle de population à "grand nombre" d'éléments

Rappels sur la dérivée

Soit une quantité y qui évolue[2] avec le temps (qui décrit $[t_0, T]$ ou $[t_0, +\infty[$) et dont la valeur à l'instant t est notée $y(t)$; l'évolution avec le temps de cette quantité est donc donnée par la fonction $t \mapsto y(t)$, que nous supposerons dérivable.

2. Voir par exemple [Bas22c, chapitre 2] ou [Bas22a, chapitre 2] et [Pia12a].

Modèle de population à "grand nombre" d'éléments

Rappels sur la dérivée

Soit une quantité y qui évolue[2] avec le temps (qui décrit $[t_0, T]$ ou $[t_0, +\infty[$) et dont la valeur à l'instant t est notée $y(t)$; l'évolution avec le temps de cette quantité est donc donnée par la fonction $t \mapsto y(t)$, que nous supposerons dérivable.

1. L'accroissement de cette quantité entre les instants t et $t + \Delta t$ est la quantité $y(t + \Delta t) - y(t)$;

2. Voir par exemple [Bas22c, chapitre 2] ou [Bas22a, chapitre 2] et [Pia12a].

Modèle de population à "grand nombre" d'éléments

Rappels sur la dérivée

Soit une quantité y qui évolue[2] avec le temps (qui décrit $[t_0, T]$ ou $[t_0, +\infty[$) et dont la valeur à l'instant t est notée $y(t)$; l'évolution avec le temps de cette quantité est donc donnée par la fonction $t \mapsto y(t)$, que nous supposerons dérivable.

1. L'accroissement de cette quantité entre les instants t et $t + \Delta t$ est la quantité $y(t + \Delta t) - y(t)$;
2. La vitesse moyenne d'évolution entre les instants t et $t + \Delta t$ est la quantité $\dfrac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t}$;

2. Voir par exemple [Bas22c, chapitre 2] ou [Bas22a, chapitre 2] et [Pia12a].

Modèle de population à "grand nombre" d'éléments

Rappels sur la dérivée

Soit une quantité y qui évolue[2] avec le temps (qui décrit $[t_0, T]$ ou $[t_0, +\infty[$) et dont la valeur à l'instant t est notée $y(t)$; l'évolution avec le temps de cette quantité est donc donnée par la fonction $t \mapsto y(t)$, que nous supposerons dérivable.

1. L'accroissement de cette quantité entre les instants t et $t + \Delta t$ est la quantité $y(t + \Delta t) - y(t)$;
2. La vitesse moyenne d'évolution entre les instants t et $t + \Delta t$ est la quantité $\dfrac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t}$;
3. La vitesse instantanée d'évolution entre les instants t et $t + \Delta t$ est la limite quand Δt tend vers 0 de $\dfrac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t}$, qui vaut $y'(t)$.

2. Voir par exemple [Bas22c, chapitre 2] ou [Bas22a, chapitre 2] et [Pia12a].

Modèle de population à "grand nombre" d'éléments

Rappels sur la dérivée

1. Le taux moyen d'évolution de cette quantité entre les instants t et $t + \Delta\ t$ est la quantité $\dfrac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t y(t)}$.

Modèle de population à "grand nombre" d'éléments

Rappels sur la dérivée

1. Le taux moyen d'évolution de cette quantité entre les instants t et $t + \Delta\ t$ est la quantité $\dfrac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t y(t)}$.
2. Le taux instantané d'évolution de cette quantité à l'instant t est la quantité $y'(t)/y(t)$.

Modèle de population à "grand nombre" d'éléments

Approximation essentielle

Lorsque la quantité retenue est le nombre $N(t)$ d'individus à l'instant t dans une population donnée, on ne peut considérer la fonction $N : t \mapsto N(t)$ puisque c'est une fonction à valeurs entières, constante par morceaux, non dérivable.

Modèle de population à "grand nombre" d'éléments

Approximation essentielle

Lorsque la quantité retenue est le nombre $N(t)$ d'individus à l'instant t dans une population donnée, on ne peut considérer la fonction $N : t \mapsto N(t)$ puisque c'est une fonction à valeurs entières, constante par morceaux, non dérivable.
Cependant, si la population est "grande", cela est légitime et l'erreur ainsi faite est négligeable si on la rapporte à une population suffisamment nombreuse.

Modèle de population à "grand nombre" d'éléments

Approximation essentielle

Lorsque la quantité retenue est le nombre $N(t)$ d'individus à l'instant t dans une population donnée, on ne peut considérer la fonction $N : t \mapsto N(t)$ puisque c'est une fonction à valeurs entières, constante par morceaux, non dérivable.
Cependant, si la population est "grande", cela est légitime et l'erreur ainsi faite est négligeable si on la rapporte à une population suffisamment nombreuse.
Dans ce cas, $N'(t)$ a aussi un sens.

Modèle de population à "grand nombre" d'éléments

Exemple de la désintégration du Carbone 14

Voir par exemple section 4.1 du TD 4 de [Bas22d] ou exercices 6.10 à 6.12 du TD 6 de [Bas22b].
Le modèle de la désintégration du carbone 14, utilisé pour dater des objets d'origine organique contenant du carbone, prévoit que le nombre de désintégrations d'atomes de Carbone 14 par unité de temps est proportionnel à ce même nombre[3] :

$$N'(t) = -\lambda N(t), \tag{1}$$

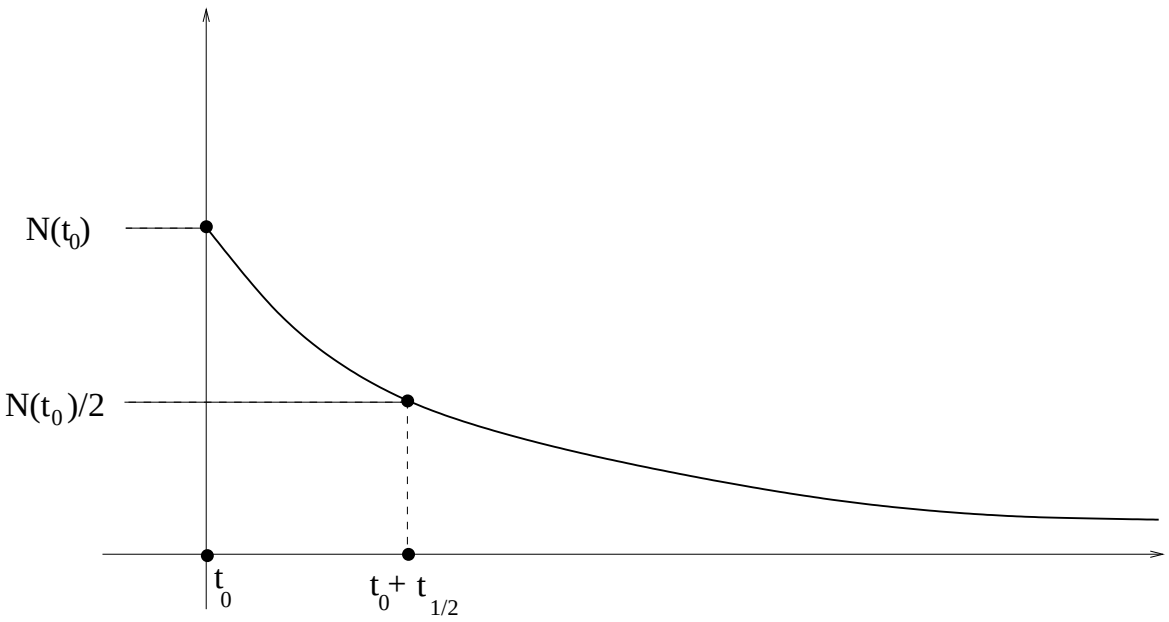
où $\lambda > 0$ et dont la solution est donnée par

$$N(t) = N(t_0)e^{-\lambda(t-t_0)}. \tag{2}$$

3. le taux de décroissance est constant.

Modèle de population à "grand nombre" d'éléments

Exemple de la désintégration du Carbone 14



La demi-vie $t_{1/2}$ correspond au délais nécessaire pour que $N(t_0)$ soit divisé par 2 :

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}. \tag{3}$$

Modèle de population à "grand nombre" d'éléments

Croissance exponentielle

De même, une donnée croissante dont la variation est proportionnelle à elle-même[4] vérifie

$$N'(t) = \lambda N(t), \tag{4}$$

où $\lambda > 0$ et

$$N(t) = N(t_0)e^{\lambda(t-t_0)}. \tag{5}$$

4. Le taux de croissance est constant.

Modèle de population à "grand nombre" d'éléments

Croissance exponentielle

De même, une donnée croissante dont la variation est proportionnelle à elle-même[4] vérifie

$$N'(t) = \lambda N(t), \tag{4}$$

où $\lambda > 0$ et

$$N(t) = N(t_0)e^{\lambda(t-t_0)}. \tag{5}$$

Le concept de demi-vie est remplacé par celui de doublement : N est multiplié par 2 tous les t_2 unités de temps avec, comme dans (3) :

$$t_2 = \frac{\ln 2}{\lambda}. \tag{6}$$

4. Le taux de croissance est constant.

Modèle de population à "grand nombre" d'éléments

Croissance exponentielle

De même, une donnée croissante dont la variation est proportionnelle à elle-même[4] vérifie

$$N'(t) = \lambda N(t), \tag{4}$$

où $\lambda > 0$ et

$$N(t) = N(t_0)e^{\lambda(t-t_0)}. \tag{5}$$

Le concept de demi-vie est remplacé par celui de doublement : N est multiplié par 2 tous les t_2 unités de temps avec, comme dans (3) :

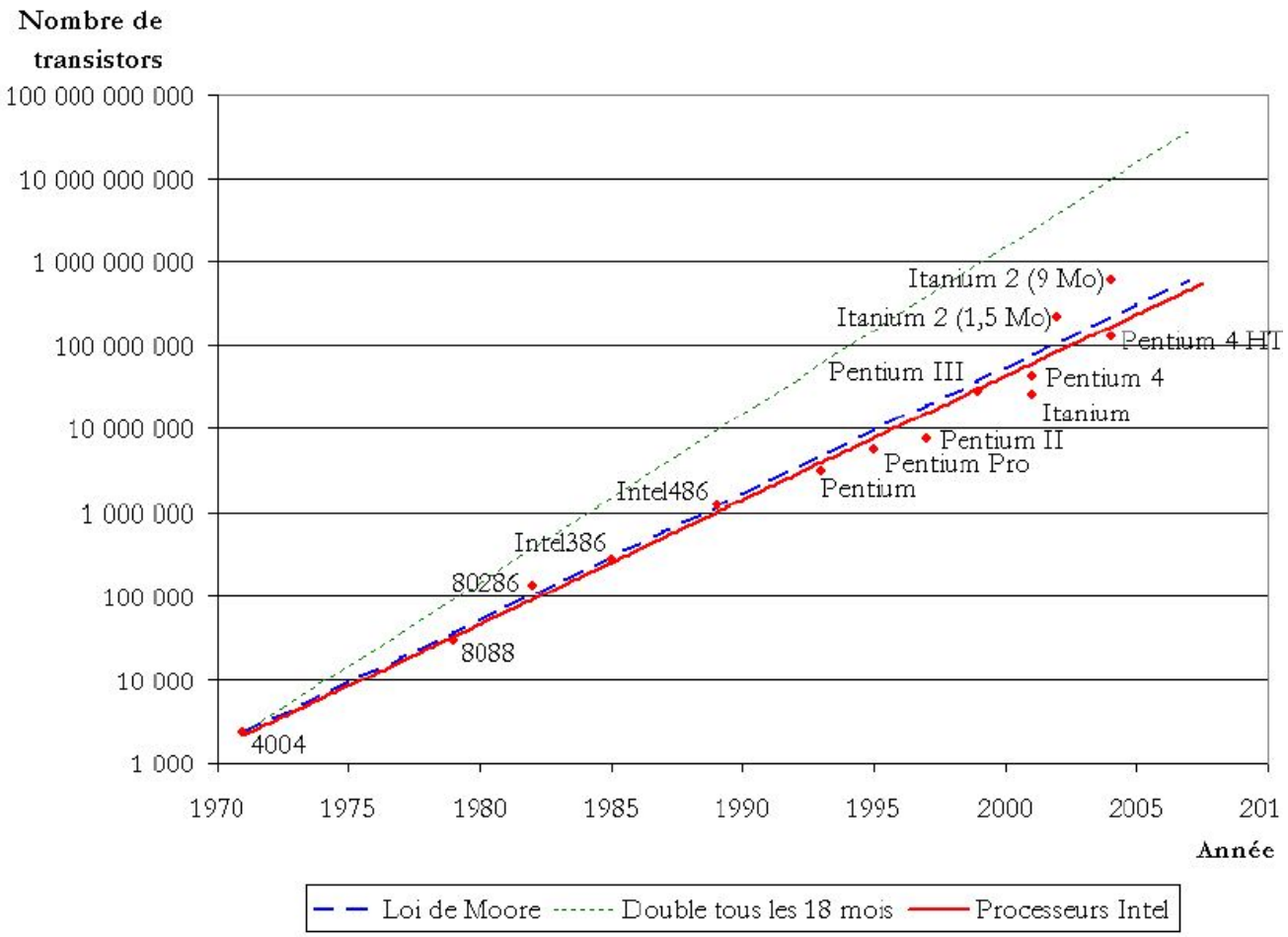
$$t_2 = \frac{\ln 2}{\lambda}. \tag{6}$$

Réciproquement une donnée qui double tous les t_2 unités de temps suit une lois exponentielle (moyennant une hypothèse supplémentaire (exercice 11.7 du TD 11 de [Bas22b])).

4. Le taux de croissance est constant.

Modèle de population à "grand nombre" d'éléments

Exemple de la Loi de Moore



Le nombre de transistors dans un PC double tous les deux ans (exercice 11.7 du TD 11 de [Bas22b]).

Modèle continu de Malthus

Voir [Pia12a], [Ban23, Transparents 69 à 93] [5] et [Per12].

Malhtus est un économiste Britannique (1766-1834).

5. De façon plus générale, d'autres ressources sur l'anthropocène ou le DDRS sont disponible sur `https://moodle.univ-lyon1.fr/user/view.php?id=74596&course=3117` ou `https://moodle.univ-lyon1.fr/course/view.php?id=3117`. On pourra aussi consulter [FBP23].

Modèle continu de Malthus

Hypothèses

Considérons une population donnée, de nombre $N(t)$ d'individus à l'instant t . Nous supposerons que :

1. cette population se reproduit de manière sexuée ;

Modèle continu de Malthus

Hypothèses

Considérons une population donnée, de nombre $N(t)$ d'individus à l'instant t . Nous supposerons que :

1. cette population se reproduit de manière sexuée ;
2. il n'y aura pas de contrainte environnementale au sens que les ressources seront supposées toujours suffisantes ;

Modèle continu de Malthus

Hypothèses

Considérons une population donnée, de nombre $N(t)$ d'individus à l'instant t . Nous supposerons que :

1. cette population se reproduit de manière sexuée ;
2. il n'y aura pas de contrainte environnementale au sens que les ressources seront supposées toujours suffisantes ;
3. le nombre de rapports par unité de temps est constant (par individu) ;

Modèle continu de Malthus

Hypothèses

Considérons une population donnée, de nombre $N(t)$ d'individus à l'instant t . Nous supposerons que :

1. cette population se reproduit de manière sexuée ;
2. il n'y aura pas de contrainte environnementale au sens que les ressources seront supposées toujours suffisantes ;
3. le nombre de rapports par unité de temps est constant (par individu) ;
4. le taux de fécondité d'un rapport reste constant ;

Modèle continu de Malthus

Hypothèses

Considérons une population donnée, de nombre $N(t)$ d'individus à l'instant t . Nous supposerons que :

1. cette population se reproduit de manière sexuée ;
2. il n'y aura pas de contrainte environnementale au sens que les ressources seront supposées toujours suffisantes ;
3. le nombre de rapports par unité de temps est constant (par individu) ;
4. le taux de fécondité d'un rapport reste constant ;
5. le taux de mortalité par unité de temps est constant.

Modèle continu de Malthus

Hypothèses

Sous les hypothèses précédentes, on peut montrer que le taux de natalité par unité de temps est constant.

Modèle continu de Malthus

Hypothèses

Sous les hypothèses précédentes, on peut montrer que le taux de natalité par unité de temps est constant.

Il suffit, en fait, que le taux de natalité et de mortalité par unité de temps soient constants.

Modèle de Malthus

Hypothèses

Le temps t est par exemple mesuré en années. On note α et β les taux de mortalité et de natalité [6] par an, supposés constants. Soient $h < 1$ et t_0 fixés. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$t_n = nh + t_0.$$

6. en fraction de la population, en % ou ‰.
7. Voir point 1 du transparent 10.

Modèle de Malthus

Hypothèses

Le temps t est par exemple mesuré en années. On note α et β les taux de mortalité et de natalité [6] par an, supposés constants. Soient $h < 1$ et t_0 fixés. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$t_n = nh + t_0.$$

En reprenant le taux de croissance moyen [7], l'augmentation de la population entre t_n et t_{n+1} vaut

$$N(t_{n+1}) - N(t_n) = \underbrace{\alpha h N(t_n)}_{\text{accroissement de la population}} - \underbrace{\beta h N(t_n)}_{\text{diminution de la population}},$$

6. en fraction de la population, en % ou ‰.
7. Voir point 1 du transparent 10.

Modèle de Malthus

Hypothèses

Le temps t est par exemple mesuré en années. On note α et β les taux de mortalité et de natalité [6] par an, supposés constants. Soient $h < 1$ et t_0 fixés. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$t_n = nh + t_0.$$

En reprenant le taux de croissance moyen [7], l'augmentation de la population entre t_n et t_{n+1} vaut

$$N(t_{n+1}) - N(t_n) = \underbrace{\alpha h N(t_n)}_{\text{accroissement de la population}} - \underbrace{\beta h N(t_n)}_{\text{diminution de la population}},$$

et donc, puisque $t_{n+1} - t_n = h$,

$$\frac{N(t_{n+1}) - N(t_n)}{h} = rN(t_n), \tag{7}$$

où $r = \alpha - \beta$ est le taux de croissance de la population (augmentation algébrique de la population par an).

6. en fraction de la population, en % ou ‰.
7. Voir point 1 du transparent 10.

Modèle discret de Malthus

Résultats

Si on note $N_n = N(t_n)$, on réecrit (7) sous la forme

$$N(t_{n+1}) = (1 + hr)N(t_n), \tag{8}$$

et donc on obtient une suite géométrique

$$\forall n \geq 0, \quad N(t_n) = (1 + hr)^n N(t_0), \tag{9}$$

de raison $\rho = 1 + hr > 0$ (si h est assez petit).

Modèle discret de Malthus

Résultats

Si on note $N_n = N(t_n)$, on réecrit (7) sous la forme

$$N(t_{n+1}) = (1 + hr)N(t_n), \tag{8}$$

et donc on obtient une suite géométrique

$$\forall n \geq 0, \quad N(t_n) = (1 + hr)^n N(t_0), \tag{9}$$

de raison $\rho = 1 + hr > 0$ (si h est assez petit).
On a $r > 0 \iff \rho > 1$ et donc si

1. $r < 0$, décroissance de la population ;

Modèle discret de Malthus

Résultats

Si on note $N_n = N(t_n)$, on réecrit (7) sous la forme

$$N(t_{n+1}) = (1 + hr)N(t_n), \tag{8}$$

et donc on obtient une suite géométrique

$$\forall n \geq 0, \quad N(t_n) = (1 + hr)^n N(t_0), \tag{9}$$

de raison $\rho = 1 + hr > 0$ (si h est assez petit).
On a $r > 0 \iff \rho > 1$ et donc si

1. $r < 0$, décroissance de la population ;
2. $r = 0$, constance de la population ;

Modèle discret de Malthus

Résultats

Si on note $N_n = N(t_n)$, on réecrit (7) sous la forme

$$N(t_{n+1}) = (1 + hr)N(t_n), \tag{8}$$

et donc on obtient une suite géométrique

$$\forall n \geq 0, \quad N(t_n) = (1 + hr)^n N(t_0), \tag{9}$$

de raison $\rho = 1 + hr > 0$ (si h est assez petit).
On a $r > 0 \iff \rho > 1$ et donc si

1. $r < 0$, décroissance de la population ;
2. $r = 0$, constance de la population ;
3. $r > 0$, croissance infinie de la population.

Modèle discret de Malthus

Résultats

Si on note $N_n = N(t_n)$, on réecrit (7) sous la forme

$$N(t_{n+1}) = (1 + hr)N(t_n), \tag{8}$$

et donc on obtient une suite géométrique

$$\forall n \geq 0, \quad N(t_n) = (1 + hr)^n N(t_0), \tag{9}$$

de raison $\rho = 1 + hr > 0$ (si h est assez petit).
On a $r > 0 \iff \rho > 1$ et donc si

1. $r < 0$, décroissance de la population ;
2. $r = 0$, constance de la population ;
3. $r > 0$, croissance infinie de la population.

Attention, souvent hr est remplacé par r.

Modèle continu de Malthus

Résultats

On fait l'approximation suivante, d'autant plus valable que h est petit :

$$\frac{N(t_{n+1}) - N(t_n)}{h} \approx N'(t_n)$$

Modèle continu de Malthus

Résultats

On fait l'approximation suivante, d'autant plus valable que h est petit :

$$\frac{N(t_{n+1}) - N(t_n)}{h} \approx N'(t_n)$$

et donc (7) devient

$$\forall t \geq t_0, \quad N'(t) = rN(t), \tag{10}$$

identique à (1). La solution est

$$\forall t \geq t_0, \quad N(t) = N(t_0)e^{r(t-t_0)}. \tag{11}$$

Modèle continu de Malthus

Résultats

On fait l'approximation suivante, d'autant plus valable que h est petit :

$$\frac{N(t_{n+1}) - N(t_n)}{h} \approx N'(t_n)$$

et donc (7) devient

$$\forall t \geq t_0, \quad N'(t) = rN(t), \tag{10}$$

identique à (1). La solution est

$$\forall t \geq t_0, \quad N(t) = N(t_0)e^{r(t-t_0)}. \tag{11}$$

On obtient les mêmes conclusions que le transparent précédent, selon le signe de r.

Modèle continu de Malthus

passage continu→discret

Le schéma d'Euler explicite (Voir par exemple votre cours de MNB ou chapitre 5 de [DB22] et [BM03, chapitre 5 et exercice 5.6 p. 214]) pour l'équation différentielle (10) est donnée par (7) et donc (9) !

Modèle continu de Malthus

passage continu→discret

Le schéma d'Euler explicite (Voir par exemple votre cours de MNB ou chapitre 5 de [DB22] et [BM03, chapitre 5 et exercice 5.6 p. 214]) pour l'équation différentielle (10) est donnée par (7) et donc (9) !

Convergence du modèle discret vers le modèle continu, quand h tend vers zéro.

Modèle de Malthus

linéarisation

1. Modèle continu : t proche de t_0 :

$$N(t) = N(t_0)e^{r(t-t_0)} \Longrightarrow N(t) \approx N(t_0)(1 + r(t - t_0)).$$

Modèle de Malthus

linéarisation

1. Modèle continu : t proche de t_0 :

$$N(t) = N(t_0)e^{r(t-t_0)} \Longrightarrow N(t) \approx N(t_0)(1 + r(t - t_0)).$$

2. Modèle discret : n petit

$$\begin{aligned} N(t_n) = (1 + hr)^n N(t_0) \Longrightarrow N(t) &\approx N(t_0)(1 + nhr), \\ &= N(t_0)(1 + r(t_n - t_0)) \end{aligned}$$

Modèle de Malthus

linéarisation

1. Modèle continu : t proche de t_0 :

$$N(t) = N(t_0)e^{r(t-t_0)} \Longrightarrow N(t) \approx N(t_0)(1 + r(t - t_0)).$$

2. Modèle discret : n petit

$$\begin{aligned} N(t_n) = (1 + hr)^n N(t_0) \Longrightarrow N(t) &\approx N(t_0)(1 + nhr), \\ &= N(t_0)(1 + r(t_n - t_0)) \end{aligned}$$

3. $\Longrightarrow$ les deux quantités coïncident et r prend tout son sens !

Modèle de Malthus

linéarisation

1. Modèle continu : t proche de t_0 :

$$N(t) = N(t_0)e^{r(t-t_0)} \Longrightarrow N(t) \approx N(t_0)(1 + r(t - t_0)).$$

2. Modèle discret : n petit

$$\begin{aligned} N(t_n) = (1 + hr)^n N(t_0) \Longrightarrow N(t) &\approx N(t_0)(1 + nhr), \\ &= N(t_0)(1 + r(t_n - t_0)) \end{aligned}$$

3. $\Longrightarrow$ les deux quantités coïncident et r prend tout son sens !
4. $\Longrightarrow$ apparition d'une suite arithmétique pour le modèle discret et d'une fonction affine pour le modèle continu.

Modèle de Malthus

Résumé

Sur `https://fr.wikipedia.org/wiki/Thomas_Malthus` : "Malthus prédit mathématiquement que sans freins, la population augmente de façon exponentielle ou géométrique (par exemple : 1, 2, 4, 8, 16, 32...) tandis que les ressources ne croissent que de façon arithmétique (1, 2, 3, 4, 5, 6...).

Modèle de Malthus

Résumé

Sur `https://fr.wikipedia.org/wiki/Thomas_Malthus` :
"Malthus prédit mathématiquement que sans freins, la population augmente de façon exponentielle ou géométrique (par exemple : 1, 2, 4, 8, 16, 32...) tandis que les ressources ne croissent que de façon arithmétique (1, 2, 3, 4, 5, 6...).
Il en conclut le caractère inévitable de catastrophes démographiques, à moins de limiter la croissance de la population.

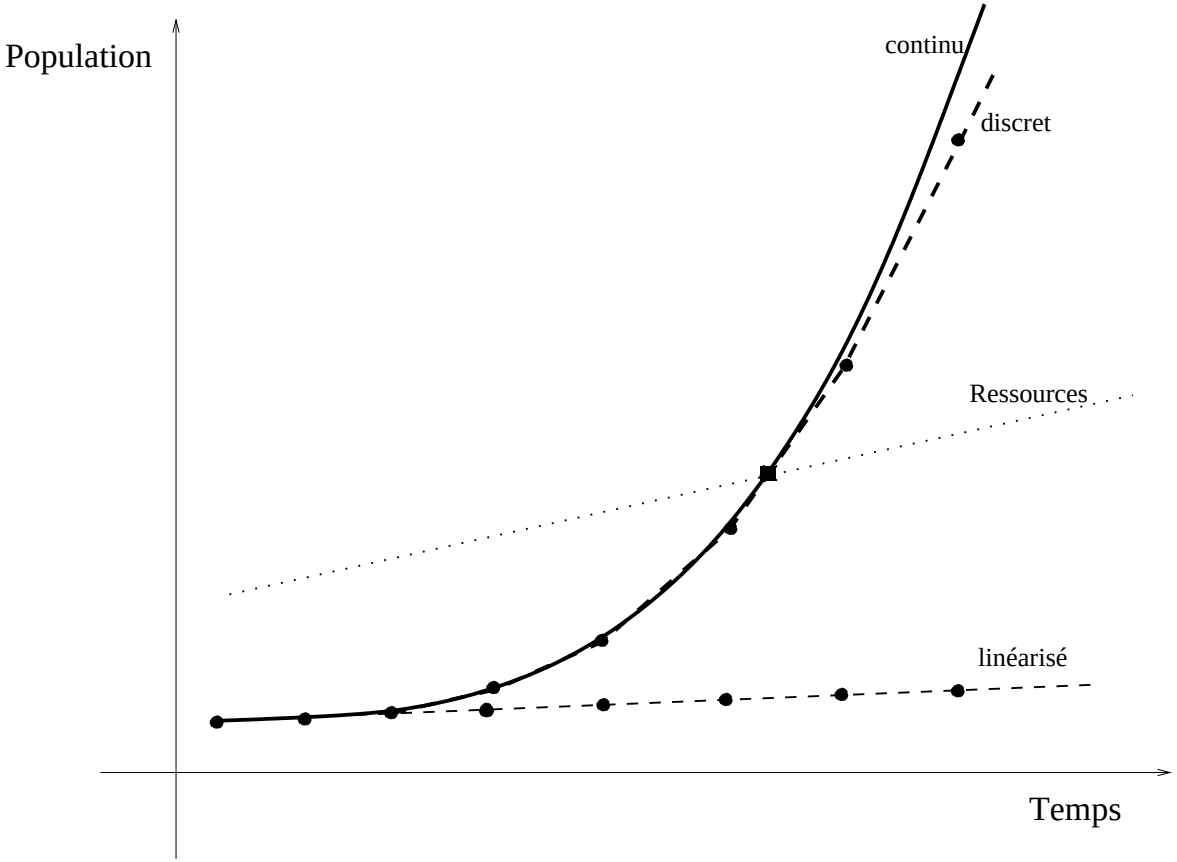
Modèle de Malthus

Résumé

Sur `https://fr.wikipedia.org/wiki/Thomas_Malthus` :
"Malthus prédit mathématiquement que sans freins, la population augmente de façon exponentielle ou géométrique (par exemple : 1, 2, 4, 8, 16, 32...) tandis que les ressources ne croissent que de façon arithmétique (1, 2, 3, 4, 5, 6...).
Il en conclut le caractère inévitable de catastrophes démographiques, à moins de limiter la croissance de la population.
Le pronostic pessimiste de Malthus s'est révélé faux, car le monde a connu une grande augmentation des ressources ..... De deux habitants de la planète sur trois en malnutrition en 1950, on est ainsi passé à un sur sept en 2012, alors que la planète passait dans le même temps de deux milliards et demi d'habitants à plus de six milliards."

Modèle de Malthus

Résumé



Modèle (continu) de Malthus

Identification

1. On suppose connus $(t_i, \mathcal{N}_i)_{0 \leq i \leq P}$, donnés expérimentalement. On cherche à identifier N_0 et r tel que (11) ait lieu avec $N(t_i) \approx \mathcal{N}_i$, c'est-à-dire :

$$\forall i \in \{0, ..., P\}, \quad \mathcal{N}_i \approx N_0 e^{r(t_i - t_0)}. \tag{12}$$

Modèle (continu) de Malthus

Identification

1. On suppose connus $(t_i, \mathcal{N}_i)_{0 \leq i \leq P}$, donnés expérimentalement. On cherche à identifier N_0 et r tel que (11) ait lieu avec $N(t_i) \approx \mathcal{N}_i$, c'est-à-dire :

$$\forall i \in \{0, ..., P\}, \quad \mathcal{N}_i \approx N_0 e^{r(t_i - t_0)}. \tag{12}$$

2. Il suffit d'écrire :

$$\ln(\mathcal{N}_i) \approx r(t_i - t_0) + \ln(N_0), \tag{13}$$

et de faire une régression linaire sur le nuage de points $(t_i - t_0, \ln(\mathcal{N}_i))_{0 \leq i \leq P}$, dont la pente fournit r et l'ordonnée à l'origine $\ln(N_0)$.

Modèle (continu) de Malthus

Identification (Régression Linéaire)

C'est en fait un cas particulier de la théorie de l'approximation polynômiale au sens des moindres carrés comme c'est présenté dans la section 4.3 de [Bas22a] ou la section 2.8 de [DB22].

Modèle (continu) de Malthus

Identification (Régression Linéaire)

C'est en fait un cas particulier de la théorie de l'approximation polynômiale au sens des moindres carrés comme c'est présenté dans la section 4.3 de [Bas22a] ou la section 2.8 de [DB22].

Il existe, dans ce cas particulier de la régression linéaire, des formules donnant explicitement les coefficients de la droite (voir Annexe J de [Bas22a]).

Modèle de Malthus

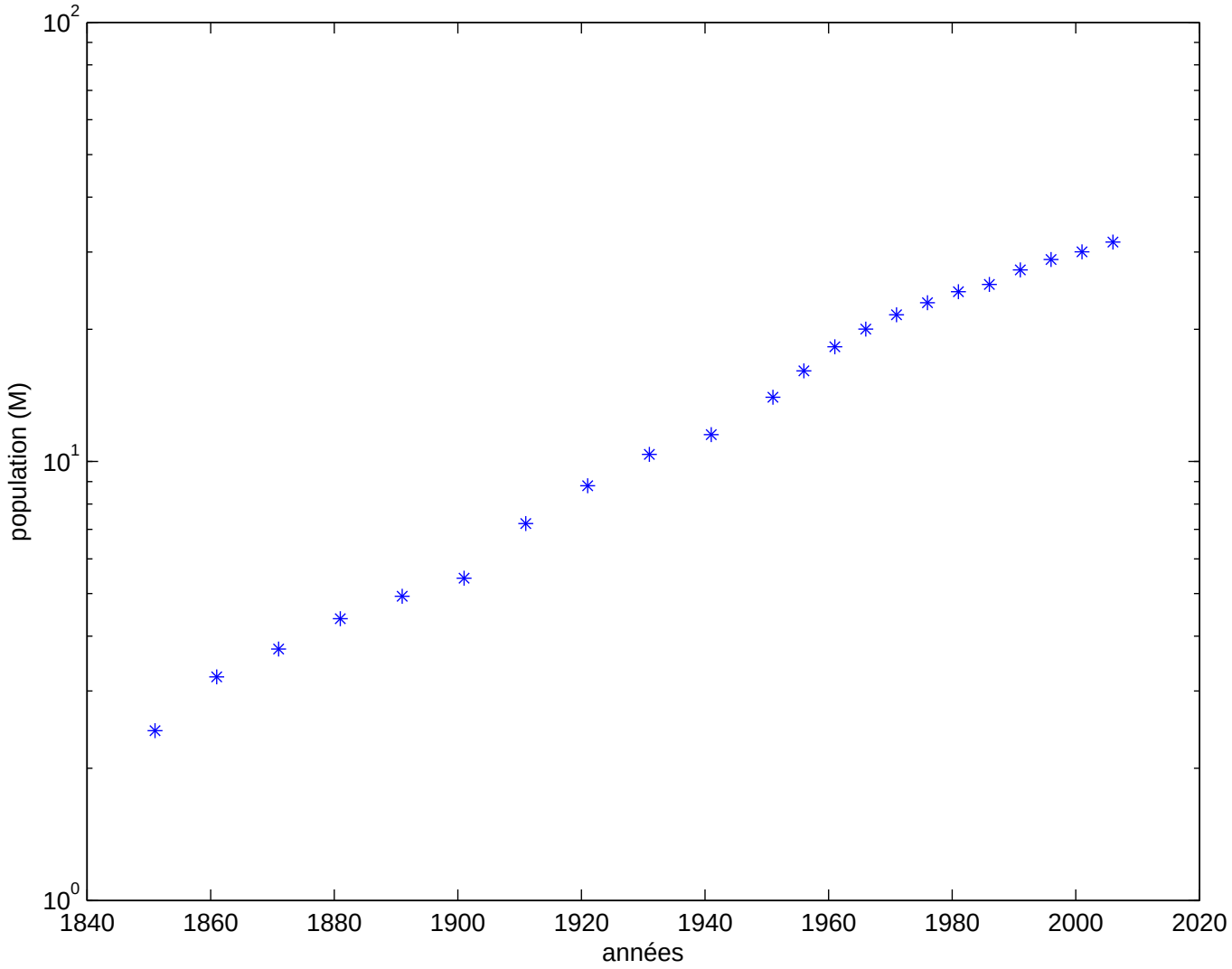
Simulations (Population du Canada entre 1851 et 2006).

Données issues de [Pia12a] sur la population du Canada entre les années 1851 et 2006.

Années	Population (M)
1851	2.436297
1861	3.229633
1871	3.737257
1881	4.381256
1891	4.932206
1901	5.418663
1911	7.221662
1921	8.800429
1931	10.376379
1941	11.506655
1951	14.009429
1956	16.080791
1961	18.238247
1966	20.014880
1971	21.568305
1976	22.992595
1981	24.343177
1986	25.309330
1991	27.296856
1996	28.846758
2001	30.007094
2006	31.612897

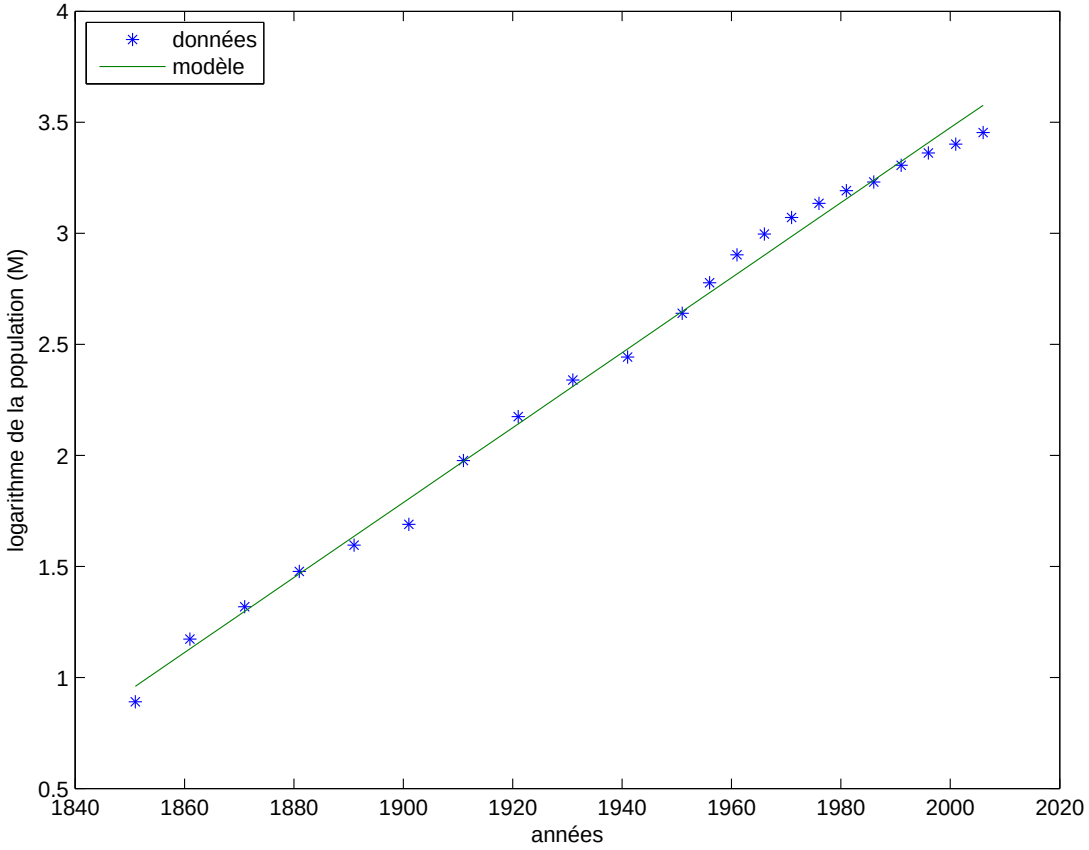
Modèle de Malthus

Simulations (Population du Canada entre 1851 et 2006).



Modèle de Malthus

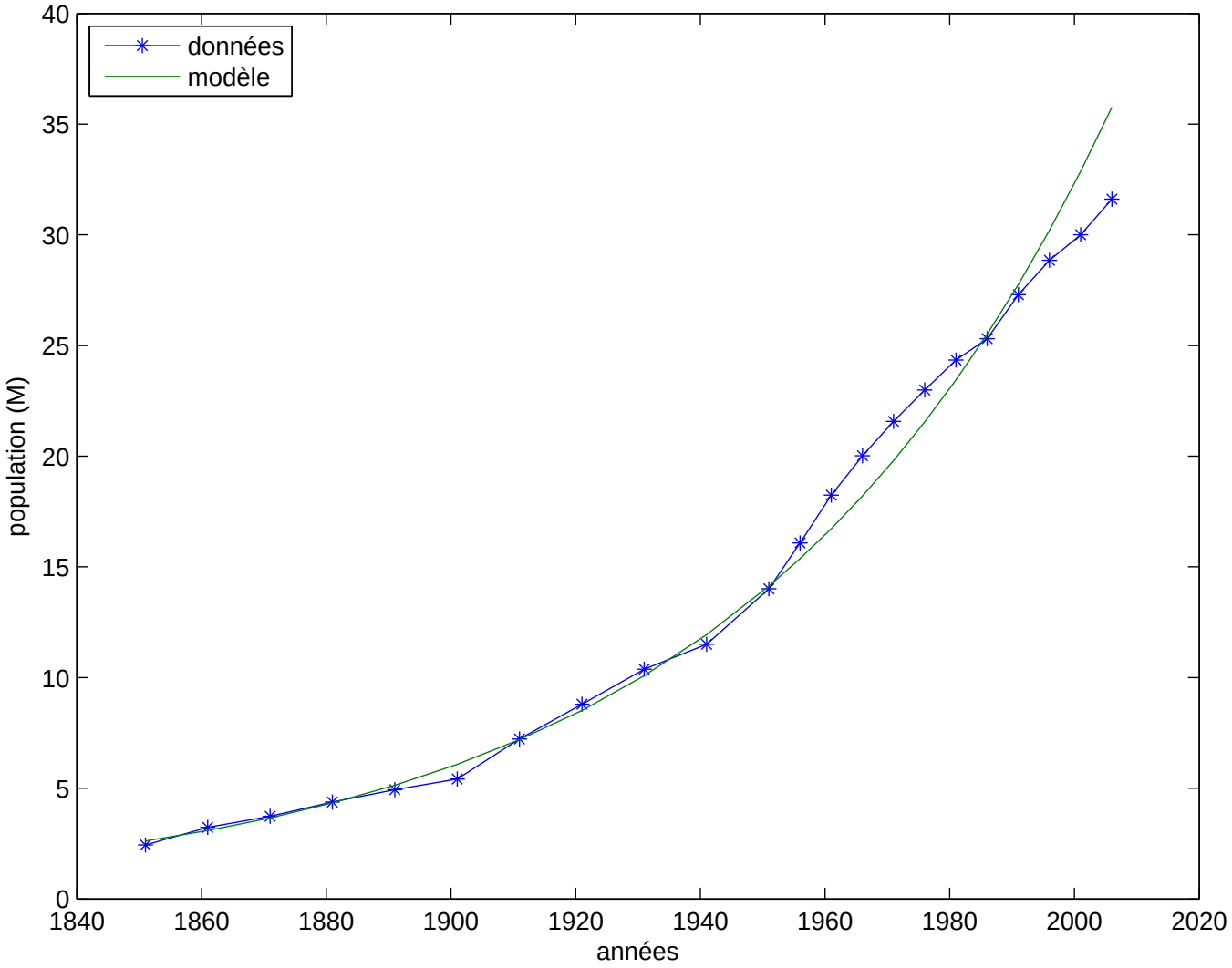
Simulations (Population du Canada entre 1851 et 2006).



On obtient un accroissement (annuel) de la population $r = 1.688205\%$ et une corrélation égale à 0.997054.

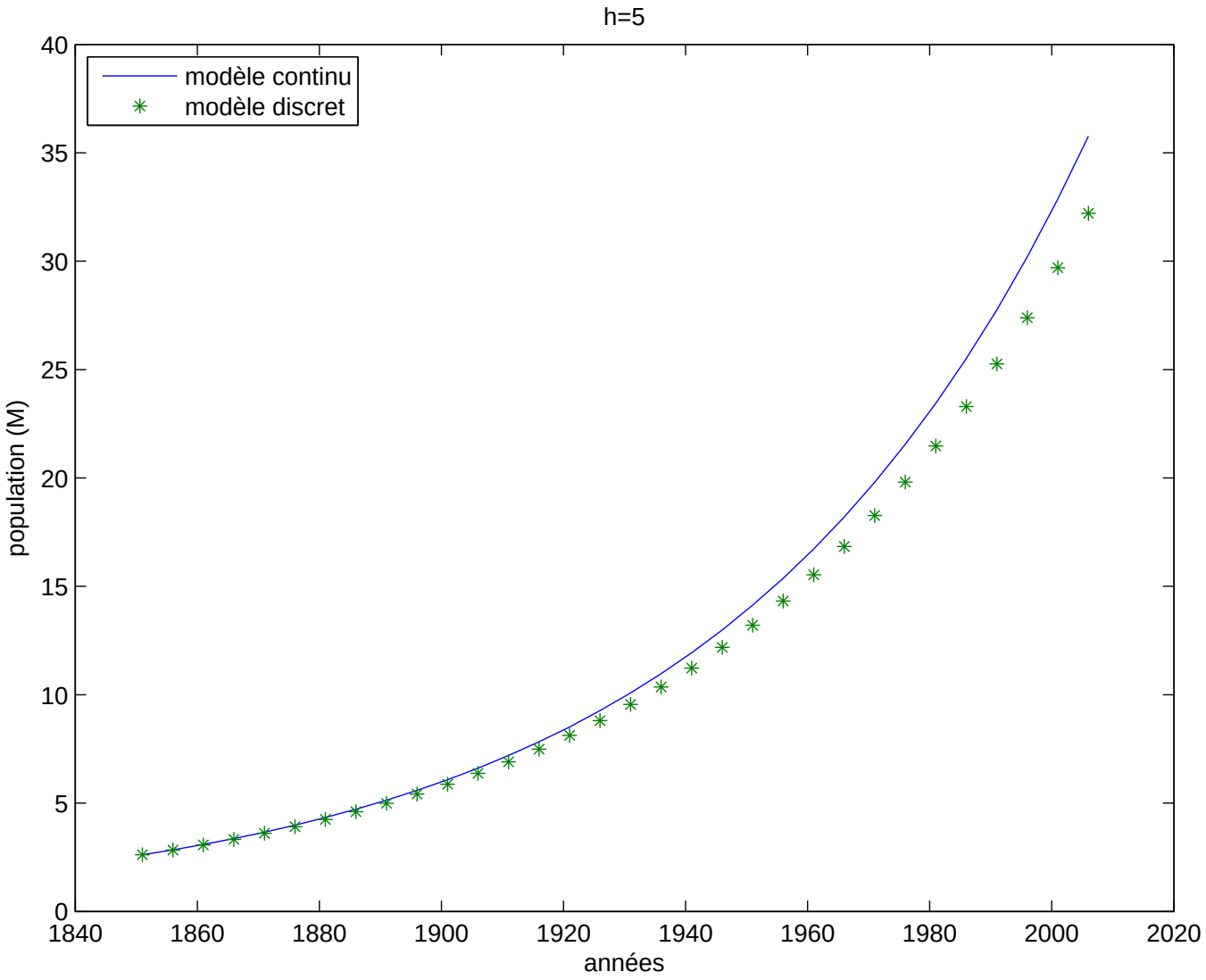
Modèle de Malthus

Simulations (Population du Canada entre 1851 et 2006).



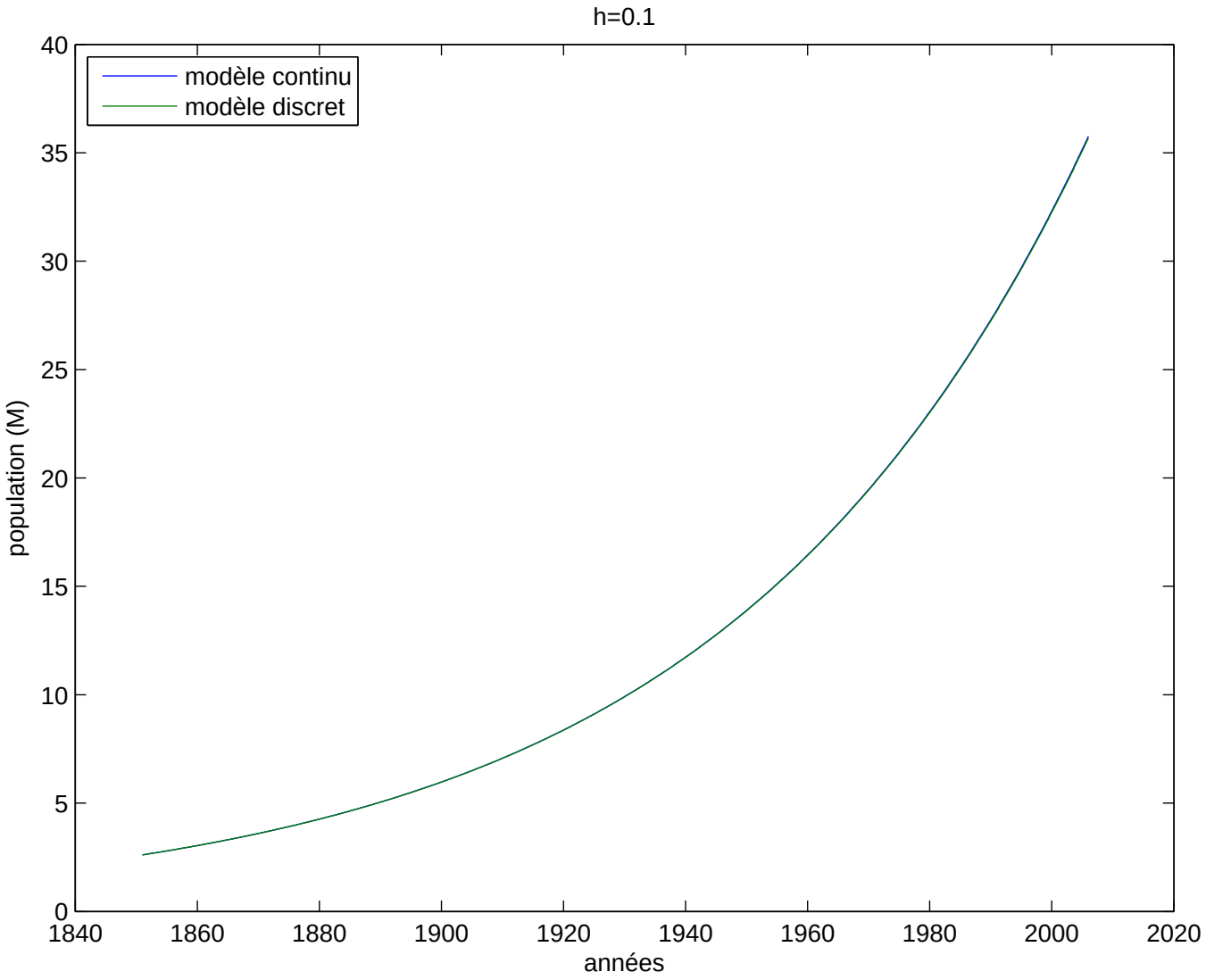
Modèle de Malthus

Simulations (Population du Canada entre 1851 et 2006).



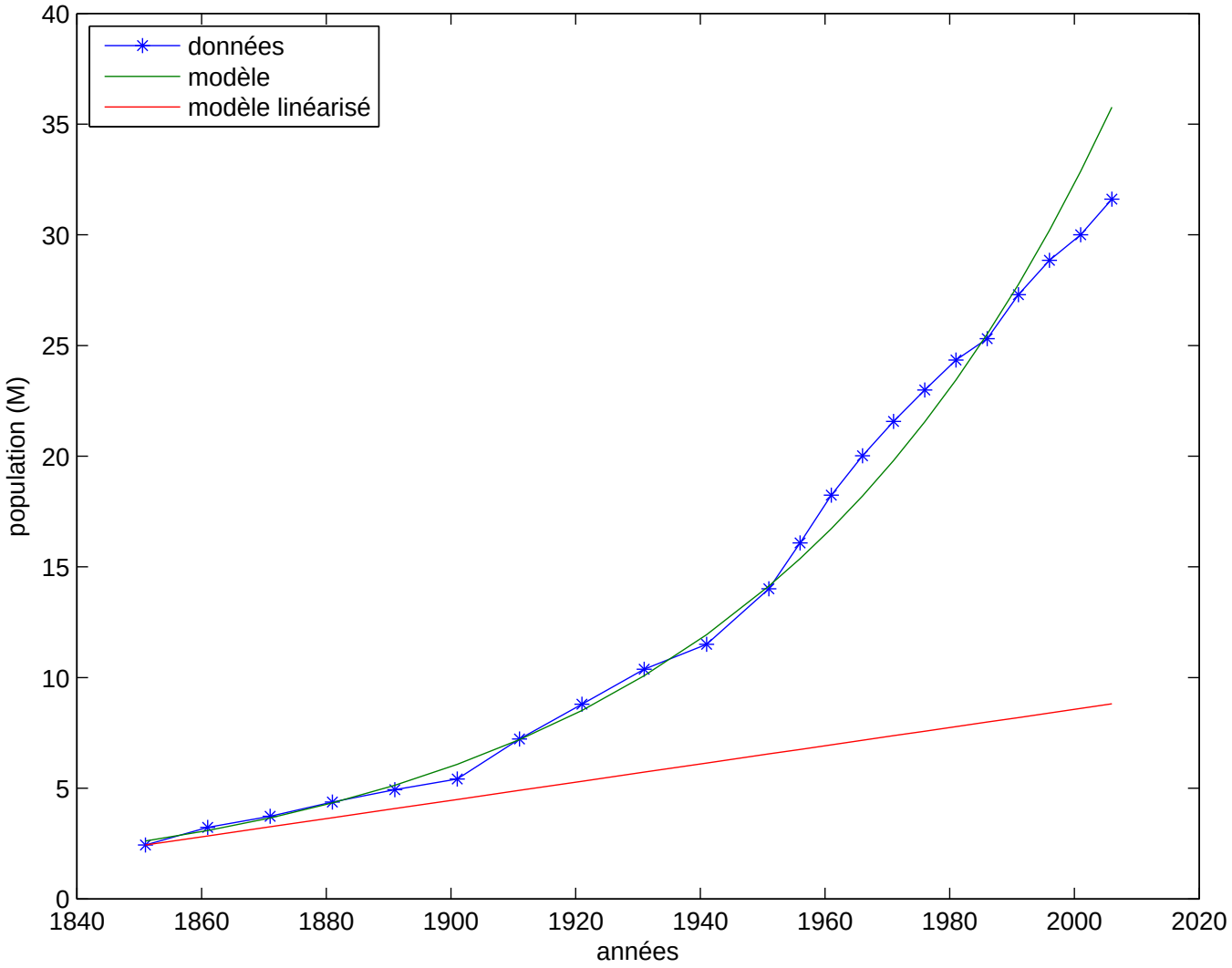
Modèle de Malthus

Simulations (Population du Canada entre 1851 et 2006).



Modèle de Malthus

Simulations (Population du Canada entre 1851 et 2006).



Modèle de Malthus

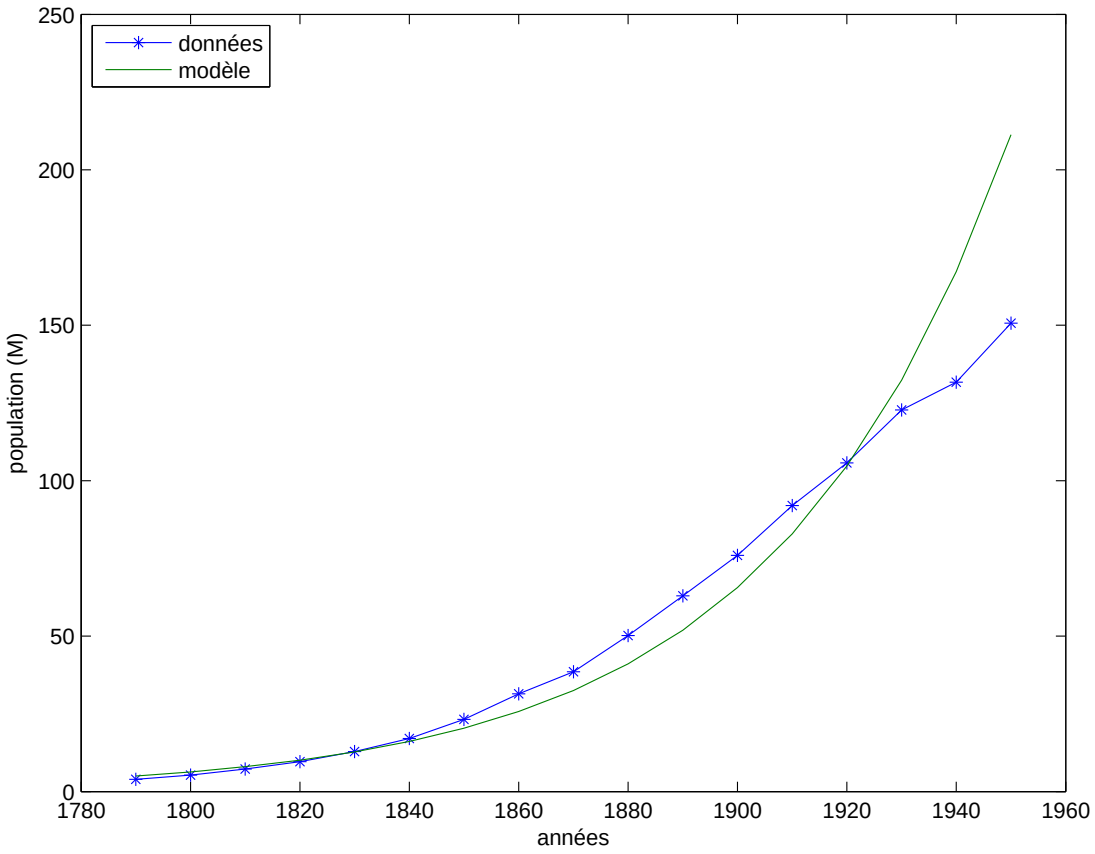
Simulations (Population des USA entre 1790 et 1950).

Données issues de [Pia12a] sur la population des USA entre les années 1790 et 1950.

Années	Population (M)
1790	3.929
1800	5.308
1810	7.240
1820	9.638
1830	12.866
1840	17.069
1850	23.192
1860	31.443
1870	38.558
1880	50.156
1890	62.948
1900	75.995
1910	91.972
1920	105.711
1930	122.775
1940	131.669
1950	150.697

Modèle de Malthus

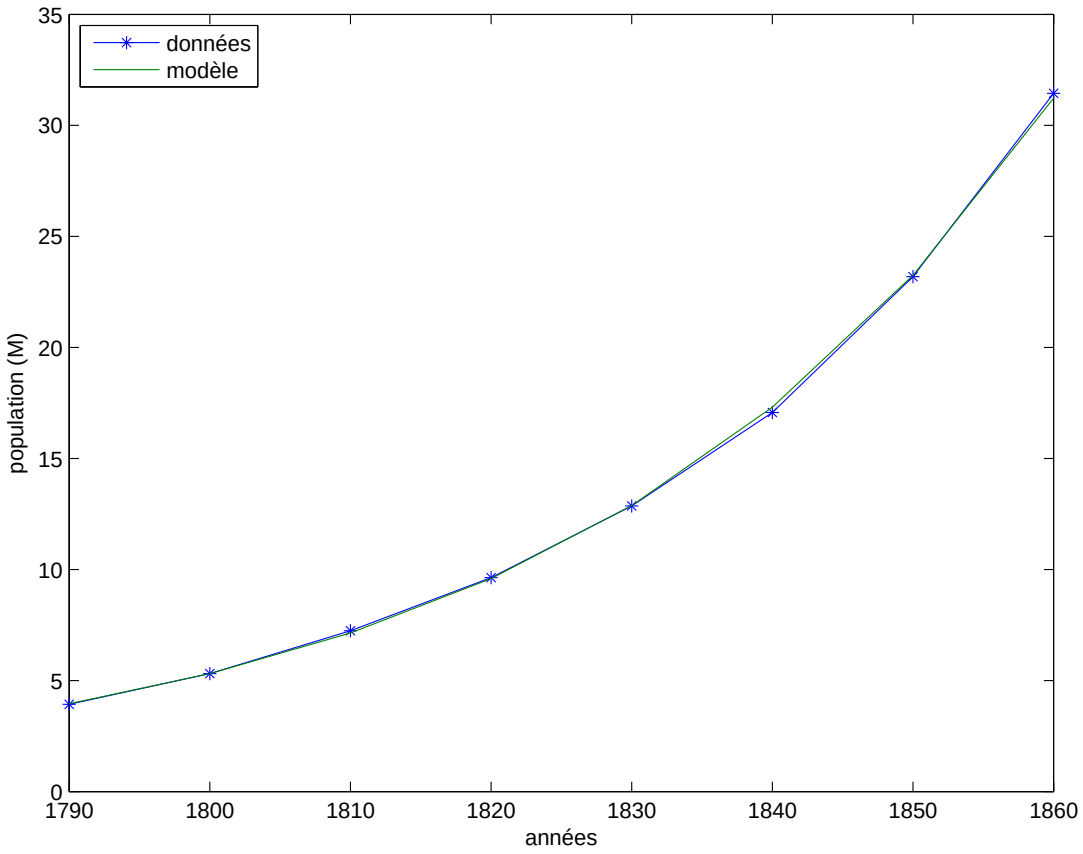
Simulations (Population des USA entre 1790 et 1950).



Entre 1790 et 1950 : accroissement $r = 2.338817\%$ et corrélation 0.989486.

Modèle de Malthus

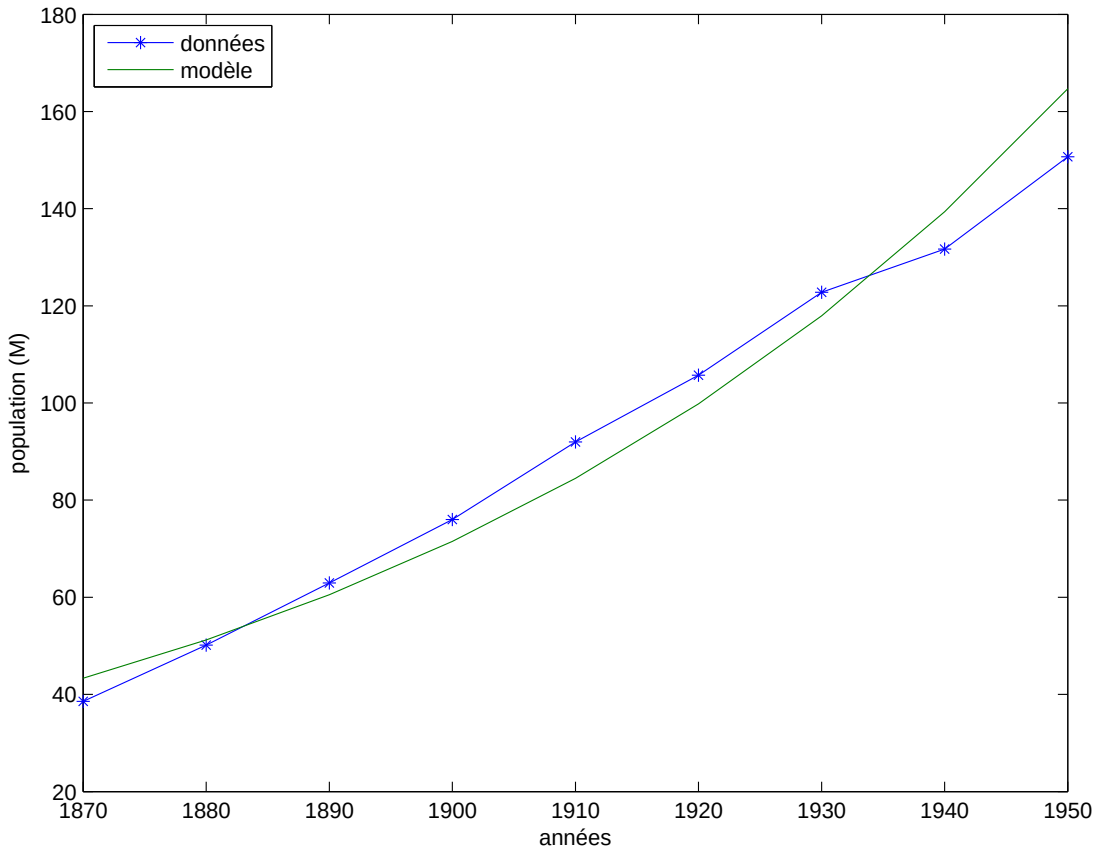
Simulations (Population des USA entre 1790 et 1950).



Entre 1790 et 1860 : accroissement $r = 2.951584\%$ et corrélation 0.999930.

Modèle de Malthus

Simulations (Population des USA entre 1790 et 1950).



Entre 1870 et 1950 : accroissement $r = 1.669003\%$ et corrélation 0.987496.

Modèle de Malthus

Critiques et conséquences

Naturellement, la croissance exponentielle ne peut se prolonger.

8. voir https://fr.wikipedia.org/wiki/Malthusianisme.

Modèle de Malthus

Critiques et conséquences

Naturellement, la croissance exponentielle ne peut se prolonger.

La population tend à croître plus rapidement que ses ressources, jusqu'à ce qu'interviennent des freins ou des limites[8] à cette croissance (nommés checks). Ces derniers entraînent la population à un niveau permettant de nourrir l'ensemble.

8. voir https://fr.wikipedia.org/wiki/Malthusianisme.

Modèle de Malthus

Critiques et conséquences

Naturellement, la croissance exponentielle ne peut se prolonger.

La population tend à croître plus rapidement que ses ressources, jusqu'à ce qu'interviennent des freins ou des limites [8] à cette croissance (nommés checks). Ces derniers entraînent la population à un niveau permettant de nourrir l'ensemble.

Freins de type "obstacle répressif" (famines, épidémie) ou de type "obstacle préventifs" (décisions conscientes prises en connaissance de cause pour freiner la croissance démographique : avortement, contrôle des naissances, célibat ...).

8. voir `https://fr.wikipedia.org/wiki/Malthusianisme`.

Modèle de Malthus

Critiques et conséquences

Naturellement, la croissance exponentielle ne peut se prolonger.

La population tend à croître plus rapidement que ses ressources, jusqu'à ce qu'interviennent des freins ou des limites [8] à cette croissance (nommés checks). Ces derniers entraînent la population à un niveau permettant de nourrir l'ensemble.

Freins de type "obstacle répressif" (famines, épidémie) ou de type "obstacle préventifs" (décisions conscientes prises en connaissance de cause pour freiner la croissance démographique : avortement, contrôle des naissances, célibat ...).

Ces freins seront pris en compte mathématiquement par le modèle de Verhulst.

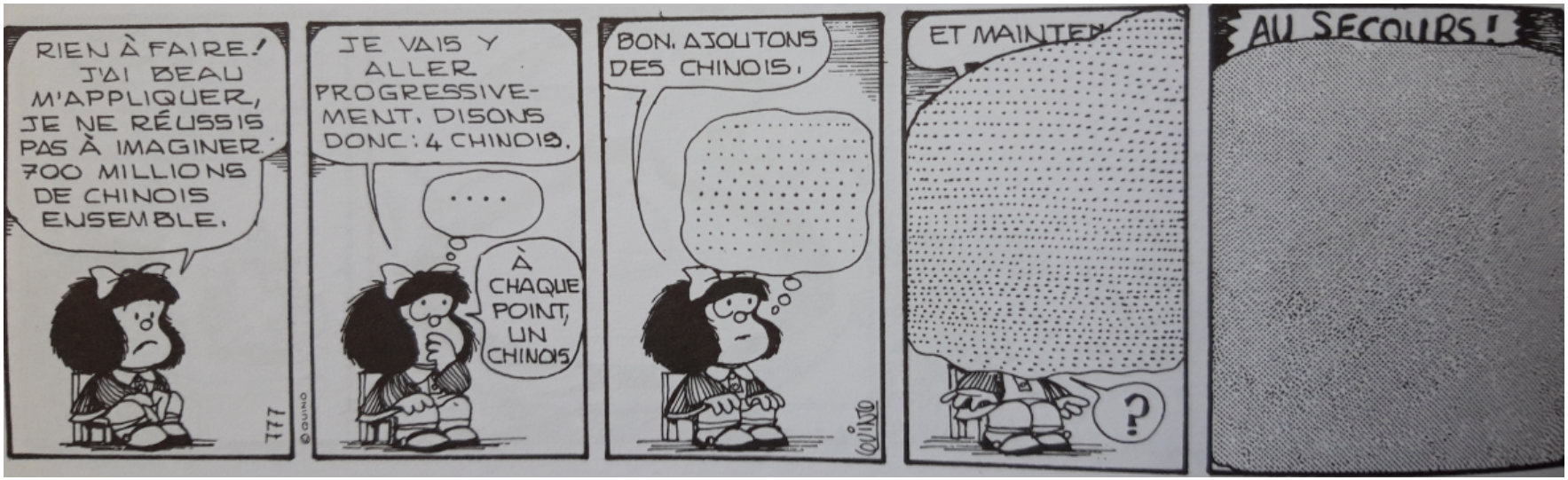
8. voir `https://fr.wikipedia.org/wiki/Malthusianisme`.

Modèle de Malthus

Critiques politiques

Marx critiquera violemment les propos de Malthus. Selon lui, la surpopulation n'est que le fruit de la propriété privée. "L'armée de réserve" des travailleurs pèse certes sur les salaires, mais elle résulte de l'accumulation du capital et de la réduction des effectifs ouvriers.

Modèle de Malthus



Issu de [Qui99]

Modèle de Verhulst

Hypothèses

Voir par exemple [Ban23, Transparents 72 et 73] et `https://fr.wikipedia.org/wiki/Modèle_de_Verhulst`.

9. mathématicien Belge 1804-1849.

Modèle de Verhulst

Hypothèses

Voir par exemple [Ban23, Transparents 72 et 73] et `https://fr.wikipedia.org/wiki/Modèle_de_Verhulst`.
Le modèle de Verhulst[9] suppose que :

1. le taux de natalité et le taux de mortalité par unité de temps sont des fonctions affines respectivement décroissante et croissante du nombre d'individus ;
2. lorsqu'une population est de petite taille, elle a tendance à croître

9. mathématicien Belge 1804-1849.

Modèle de Verhulst

Hypothèses

Voir par exemple [Ban23, Transparents 72 et 73] et `https://fr.wikipedia.org/wiki/Modèle_de_Verhulst`.
Le modèle de Verhulst[9] suppose que :

1. le taux de natalité et le taux de mortalité par unité de temps sont des fonctions affines respectivement décroissante et croissante du nombre d'individus ;
2. lorsqu'une population est de petite taille, elle a tendance à croître

Comme le modèle de Malthus, il existe une version continue et une version discrète, non présentée ici.

9. mathématicien Belge 1804-1849.

Modèle de Verhulst

Mise en place mathématique

Si on appelle :

$N(t)$, le nombre d'individus à l'instant t ,

$\alpha(N(t))$, le taux de natalité par unité de temps, dépendant de $N(t)$,

$\beta(N(t))$, le taux de mortalité par unité de temps, dépendant de $N(t)$,

10. voir transparents 19 et 21.

Modèle de Verhulst

Mise en place mathématique

Si on appelle :

$N(t)$, le nombre d'individus à l'instant t ,
$\alpha(N(t))$, le taux de natalité par unité de temps, dépendant de $N(t)$,
$\beta(N(t))$, le taux de mortalité par unité de temps, dépendant de $N(t)$,

alors, en raisonnnant comme pour le modèle de Malthus [10] (où α et β sont constants), on obtient l'équation différentielle

$$\begin{aligned} N'(t) &= N(t)\left(\underbrace{\alpha(N(t))}_{\text{accroissement de la population}} - \underbrace{\beta(N(t))}_{\text{diminution de la population}}\right), \\ &= N(t) \underbrace{r(N(t))}_{\text{taux de croissance}}, \end{aligned}$$

10. voir transparents 19 et 21.

Modèle de Verhulst

Mise en place mathématique

Si α et β sont des fonctions affines respectivement strictement décroissante et strictement croissante alors $\alpha - \beta$ est une fonction affine strictement décroissante du type $N \mapsto a - bN$ où $b > 0$. Notons que Verhulst a proposé d'autre modèles plus généraux, en s'inspirant de loi de friction fluide.

Modèle de Verhulst

Mise en place mathématique

Si α et β sont des fonctions affines respectivement strictement décroissante et strictement croissante alors $\alpha - \beta$ est une fonction affine strictement décroissante du type $N \mapsto a - bN$ où $b > 0$.
Notons que Verhulst a proposé d'autre modèles plus généraux, en s'inspirant de loi de friction fluide.
De plus, quand N tend vers zéro, $a - bN$ tend vers a qui doit être scrictement positif selon la seconde hypothèse de Verhulst. Bref, $a > 0$.

Modèle de Verhulst

Mise en place mathématique

Si α et β sont des fonctions affines respectivement strictement décroissante et strictement croissante alors $\alpha - \beta$ est une fonction affine strictement décroissante du type $N \mapsto a - bN$ où $b > 0$.
Notons que Verhulst a proposé d'autre modèles plus généraux, en s'inspirant de loi de friction fluide.
De plus, quand N tend vers zéro, $a - bN$ tend vers a qui doit être scrictement positif selon la seconde hypothèse de Verhulst. Bref, $a > 0$.
On a donc l'équation différentielle

$$N'(t) = N(t)(a - bN(t)), \tag{14}$$

avec l'habituelle condition initiale $N(t_0) = N_0$.

Modèle de Verhulst

Mise en place mathématique

Si α et β sont des fonctions affines respectivement strictement décroissante et strictement croissante alors $\alpha - \beta$ est une fonction affine strictement décroissante du type $N \mapsto a - bN$ où $b > 0$.
Notons que Verhulst a proposé d'autre modèles plus généraux, en s'inspirant de loi de friction fluide.
De plus, quand N tend vers zéro, $a - bN$ tend vers a qui doit être scrictement positif selon la seconde hypothèse de Verhulst. Bref, $a > 0$.
On a donc l'équation différentielle

$$N'(t) = N(t)(a - bN(t)), \tag{14}$$

avec l'habituelle condition initiale $N(t_0) = N_0$.
En posant $K = a/b > 0$, (14) devient

$$N'(t) = aN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right). \tag{15}$$

Modèle de Verhulst

Mise en place mathématique

Le taux de croissance $r(N)$ est donc défini par

$$r(N) = a\left(1 - \frac{N}{K}\right). \tag{16}$$

Modèle de Verhulst

Mise en place mathématique

Le taux de croissance $r(N)$ est donc défini par

$$r(N) = a\left(1 - \frac{N}{K}\right). \tag{16}$$

Nous verrons que, sous des hypothèses habituelles à préciser :

$$\text{La fonction } t \mapsto r(N(t)) \text{ est positive et décroissante.} \tag{17}$$

Modèle de Verhulst

Analyse *a priori*

On pourra trouver une analyse *a priori* des termes aN et $-bN^2$ dans [Pia12b], notamment le fait que

Modèle de Verhulst

Analyse *a priori*

On pourra trouver une analyse *a priori* des termes aN et $-bN^2$ dans [Pia12b], notamment le fait que

1. aN, représente, comme dans le modèle de Malthus, l'augmentation naturelle de la population,

Modèle de Verhulst

Analyse *a priori*

On pourra trouver une analyse *a priori* des termes aN et $-bN^2$ dans [Pia12b], notamment le fait que

1. aN, représente, comme dans le modèle de Malthus, l'augmentation naturelle de la population,
2. $-bN^2$ représente la diminuation de la population, due au manque de ressources si la population croît trop.

Modèle de Verhulst

Analyse *a priori* : comportement pour les petites valeurs et grandes valeurs de N

1. Si N est proche de zéro, le terme $-bN^2$ est négligeable devant aN et (15) se réécrit

$$N'(t) = aN(t), \tag{18}$$

et on retrouve l'équation différentielle (10) du modèle de Malthus.

Modèle de Verhulst

Analyse *a priori* : comportement pour les petites valeurs et grandes valeurs de N

1. Si N est proche de zéro, le terme $-bN^2$ est négligeable devant aN et (15) se réécrit

$$N'(t) = aN(t), \tag{18}$$

   et on retrouve l'équation différentielle (10) du modèle de Malthus.

2. Si N croît (ce qui sera le cas), alors le terme $-bN^2$ prend de l'importance et vient amortir la croissance exponentielle du modèle de Malthus. Nous verrons que $N(t)$ a une limite finie quand t tend vers l'infini.

Modèle de Verhulst

Résolution

A faire en TD.

Modèle de Verhulst

Expression complète

On se place dans le cas où N_0 (et donc N) est strictement positif. On a

$$\text{si } N_0 = K, \text{ alors } N(t) = K, \text{ définie sur } \mathbb{R}, \tag{19a}$$

$$\text{si } N_0 \neq K, \text{ alors } N(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N_0} - 1\right) e^{-a(t-t_0)}} \text{ définie sur } D \tag{19b}$$

$$\text{avec } D = \begin{cases} \left]t_0 + \frac{1}{a}\ln\left(1 - \frac{K}{N_0}\right), +\infty\right[& \text{si } N_0 > K, \\ \mathbb{R}, & \text{si } 0 < N_0 < K. \end{cases} \tag{19c}$$

Modèle de Verhulst

Expression complète

On se place dans le cas où N_0 (et donc N) est strictement positif. On a

$$\text{si } N_0 = K, \text{ alors } N(t) = K, \text{ définie sur } \mathbb{R}, \tag{19a}$$

$$\text{si } N_0 \neq K, \text{ alors } N(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N_0} - 1\right) e^{-a(t-t_0)}} \text{ définie sur } D \tag{19b}$$

$$\text{avec } D = \begin{cases} \left]t_0 + \frac{1}{a}\ln\left(1 - \frac{K}{N_0}\right), +\infty\right[& \text{si } N_0 > K, \\ \mathbb{R}, & \text{si } 0 < N_0 < K. \end{cases} \tag{19c}$$

Pour toute la suite, on n'étudie que les modèles de croissance et on supposera que $0 < N_0 < K$. Nous verrons que N est strictement croissante et tend vers K quand t tend vers l'infini.

Modèle de Verhulst

Expression complète

On se place dans le cas où N_0 (et donc N) est strictement positif. On a

$$\text{si } N_0 = K, \text{ alors } N(t) = K, \text{ définie sur } \mathbb{R}, \tag{19a}$$

$$\text{si } N_0 \neq K, \text{ alors } N(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N_0} - 1\right) e^{-a(t-t_0)}} \text{ définie sur } D \tag{19b}$$

$$\text{avec } D = \begin{cases} \left]t_0 + \frac{1}{a}\ln\left(1 - \frac{K}{N_0}\right), +\infty\right[& \text{si } N_0 > K, \\ \mathbb{R}, & \text{si } 0 < N_0 < K. \end{cases} \tag{19c}$$

Pour toute la suite, on n'étudie que les modèles de croissance et on supposera que $0 < N_0 < K$. Nous verrons que N est strictement croissante et tend vers K quand t tend vers l'infini. K est donc appelée la capacité d'accueil.

Modèle de Verhulst

Étude sommaire

On vérifie que :

- d'après (19b), il vient $\lim_{t\to-\infty} N(t) = 0$, $\lim_{t\to+\infty} N(t) = K$ et $0 < N < K$;

Modèle de Verhulst

Étude sommaire

On vérifie que :

- d'après (19b), il vient $\lim_{t\to-\infty} N(t) = 0$, $\lim_{t\to+\infty} N(t) = K$ et $0 < N < K$;
- d'après (15), $N' > 0$ et N est strictement croissante ;

Modèle de Verhulst

Étude sommaire

On vérifie que :

- d'après (19b), il vient $\lim_{t\to-\infty} N(t) = 0$, $\lim_{t\to+\infty} N(t) = K$ et $0 < N < K$;
- d'après (15), $N' > 0$ et N est strictement croissante ;
- Grâce à (15), on a

$$N''(t) = a\left(N'\left(1-\frac{N}{K}\right) + N\left(-\frac{N'}{K}\right)\right) = aN'\left(1-\frac{2N}{K}\right),$$

et N'' s'annule en un unique instant $\widehat{t}$ défini par

$$\widehat{t} = t_0 + \frac{1}{a}\ln\left(\frac{K}{N_0} - 1\right) \tag{20}$$

et N est strictement convexe sur $\left]-\infty, \widehat{t}\right]$ et strictement concave sur $\left[\widehat{t}, +\infty\right[$.

Modèle de Verhulst

Étude sommaire

On vérifie que :

- d'après (19b), il vient $\lim_{t\to-\infty} N(t) = 0$, $\lim_{t\to+\infty} N(t) = K$ et $0 < N < K$;
- d'après (15), $N' > 0$ et N est strictement croissante ;
- Grâce à (15), on a

$$N''(t) = a\left(N'\left(1-\frac{N}{K}\right) + N\left(-\frac{N'}{K}\right)\right) = aN'\left(1-\frac{2N}{K}\right),$$

et N'' s'annule en un unique instant $\widehat{t}$ défini par

$$\widehat{t} = t_0 + \frac{1}{a}\ln\left(\frac{K}{N_0} - 1\right) \tag{20}$$

et N est strictement convexe sur $\left]-\infty, \widehat{t}\right]$ et strictement concave sur $\left[\widehat{t}, +\infty\right[$.

- On en déduit aussi (17).

Modèle de Verhulst

Étude sommaire

- On a aussi
$$N\left(\widehat{t}\right) = \frac{K}{2}. \tag{21}$$
- La courbe est symétrique par rapport au point d'inflexion $\left(\widehat{t}, \frac{K}{2}\right)$.

Modèle de Verhulst

Notation et représentation

Pour toute la suite, on pose, pour $K > 0$, $N_0 \in]0, K[$, $a > 0$, $t_0 \in \mathbb{R}$,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad N_{K,N_0,a,t_0}(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N_0} - 1\right) e^{-a(t-t_0)}}, \tag{22}$$

notée parfois $N(t)$ quand il n'y a pas d'ambiguïté. La fonction définie par (22) est appelée fonction logistique, liée à la fonction sigmoïde.

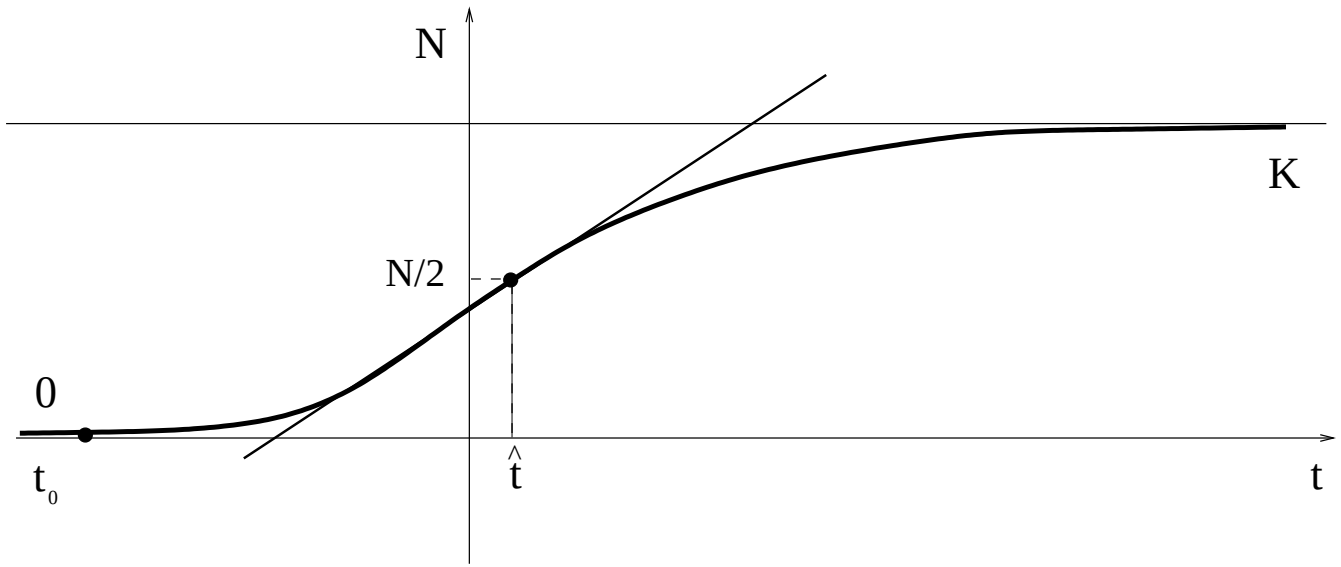
Modèle de Verhulst

Notation et représentation

Pour toute la suite, on pose, pour $K > 0$, $N_0 \in]0, K[$, $a > 0$, $t_0 \in \mathbb{R}$,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad N_{K,N_0,a,t_0}(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N_0} - 1\right) e^{-a(t-t_0)}}, \tag{22}$$

notée parfois $N(t)$ quand il n'y a pas d'ambiguïté. La fonction définie par (22) est appelée fonction logistique, liée à la fonction sigmoïde.



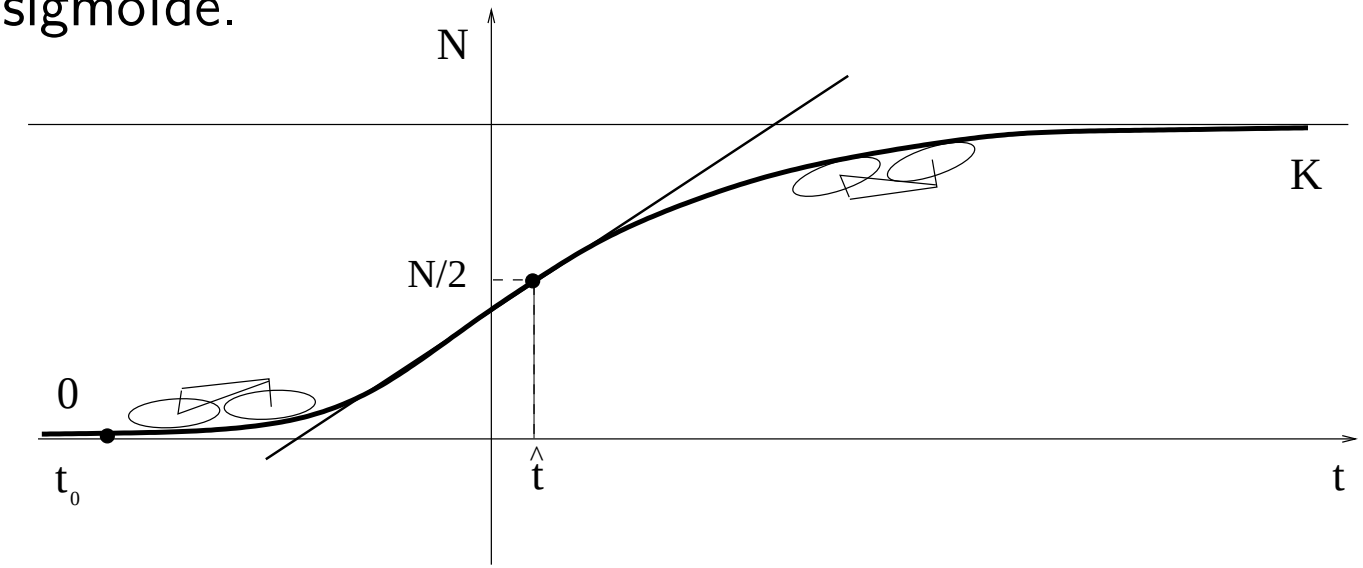
Modèle de Verhulst

Notation et représentation

Pour toute la suite, on pose, pour $K > 0$, $N_0 \in]0, K[$, $a > 0$, $t_0 \in \mathbb{R}$,

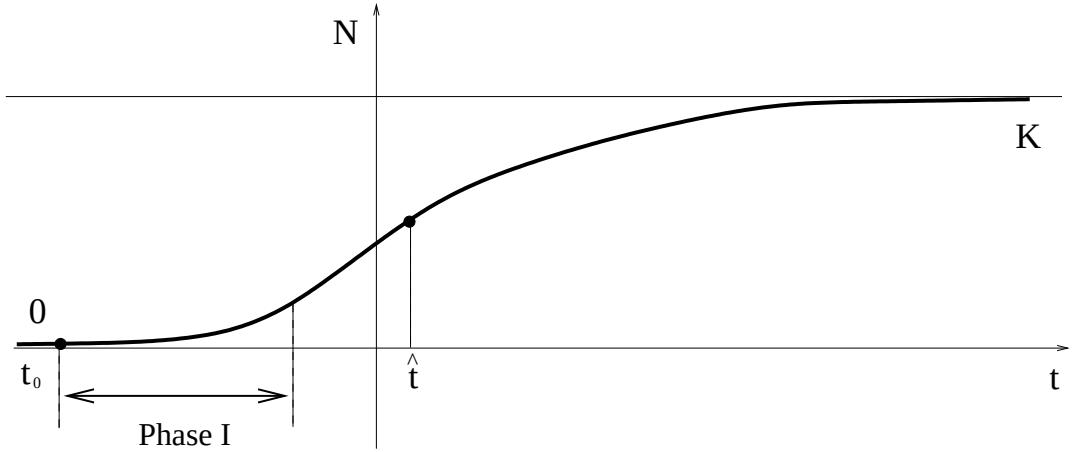
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad N_{K,N_0,a,t_0}(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N_0} - 1\right) e^{-a(t-t_0)}}, \tag{22}$$

notée parfois $N(t)$ quand il n'y a pas d'ambiguïté. La fonction définie par (22) est appelée fonction logistique, liée à la fonction sigmoïde.



Modèle de Verhulst

Étude sommaire et Analyse *a posteriori*



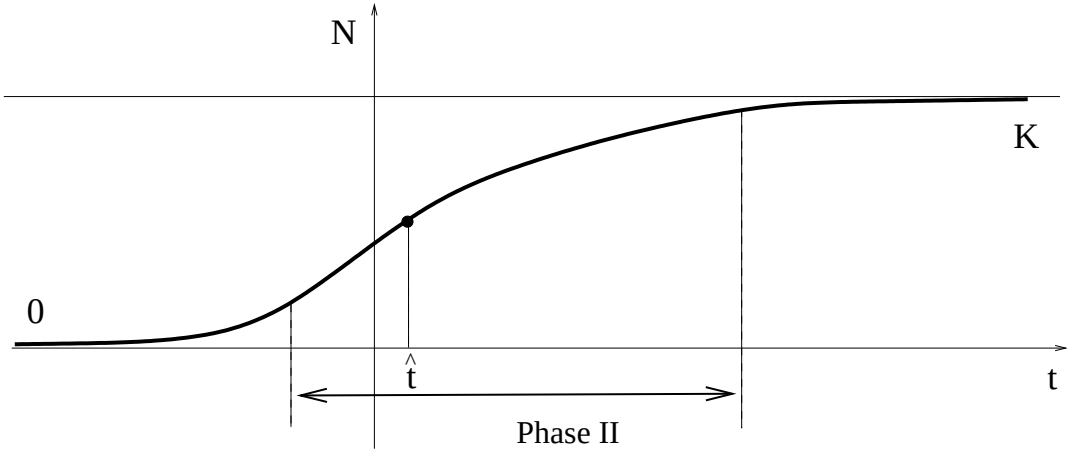
Phase I :
Si $N_0 \ll K$ et $t \approx t_0$, alors on a $\frac{K}{N_0} - 1 \approx \frac{K}{N_0}$ et donc

$$N(t) \approx \frac{K}{1 + \frac{K}{N_0} e^{-a(t-t_0)}} \approx \frac{K}{\frac{K}{N_0} e^{-a(t-t_0)}} = N_0 e^{a(t-t_0)}$$

et on retrouve le comportement de Malthus du transparent 44 : le taux de croissance r défini par (16) est maximal et proche de a.

Modèle de Verhulst

Étude sommaire et Analyse *a posteriori*

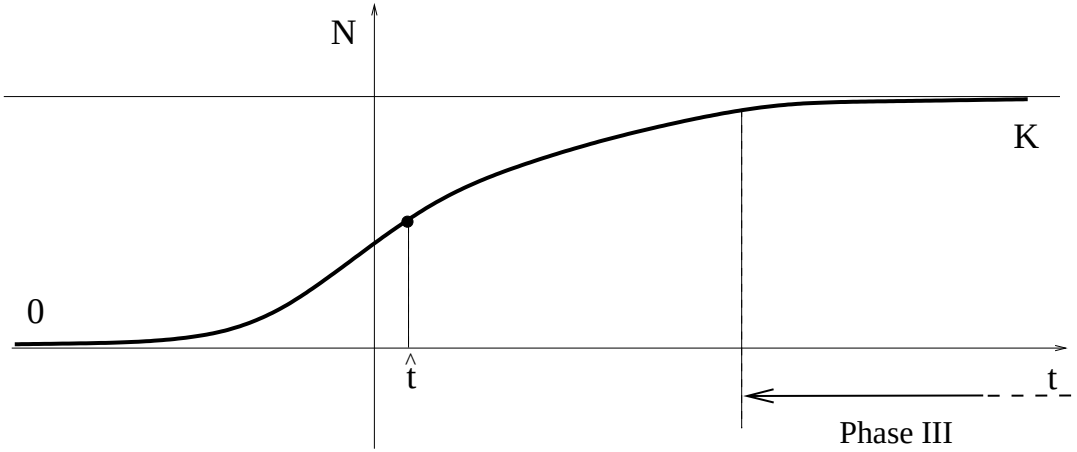


Phase II :

Ensuite, la courbe s'infléchit, le taux de croissance r décroît et la courbe de population est convexe jusqu'à $\widehat{t}$ et concave ensuite.

Modèle de Verhulst

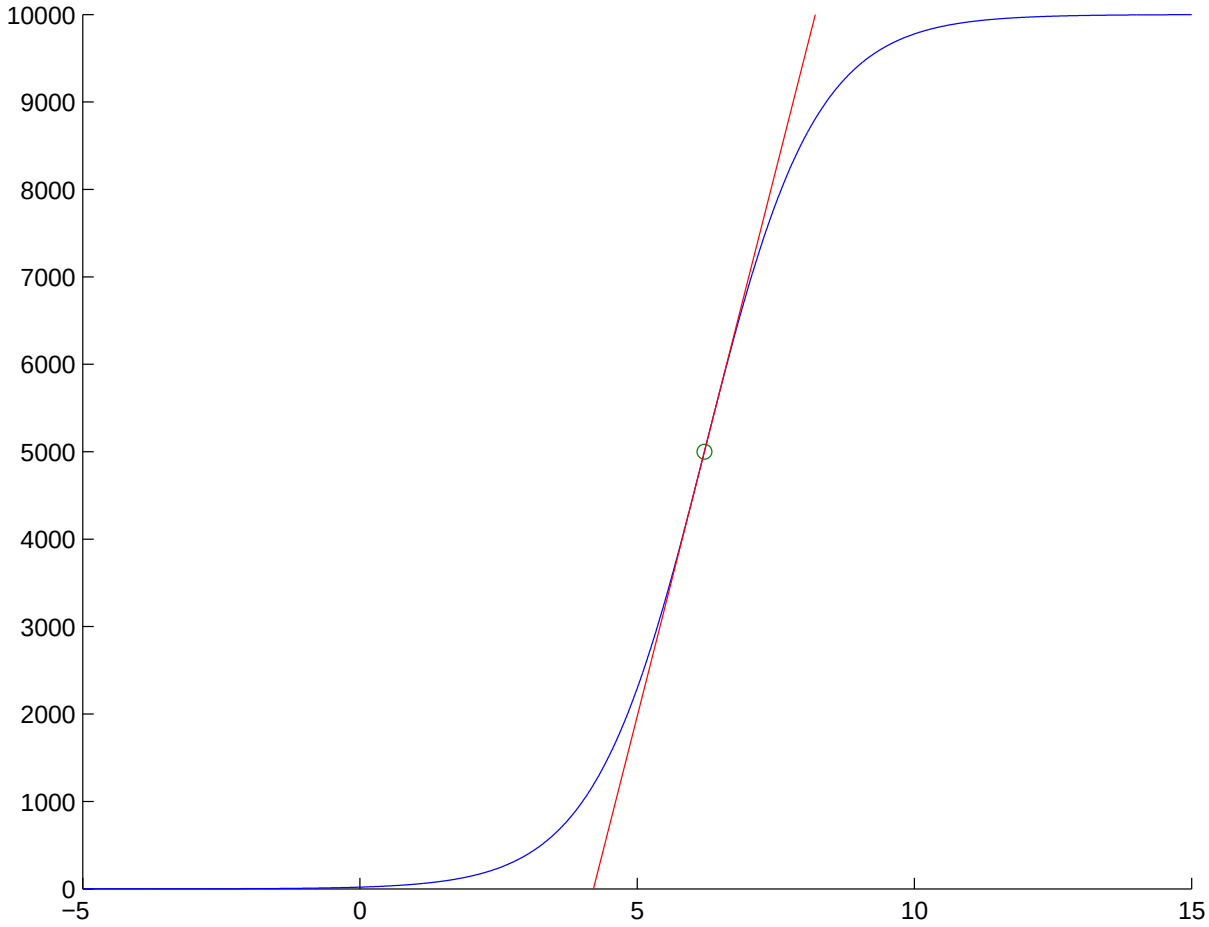
Étude sommaire et Analyse *a posteriori*



Phase III :
Enfin, si $t \gg t_0$, $N(t) \approx \lim_{t \to +\infty} N(t) = K$ et le taux de croissance tend vers zéro.

Modèle de Verhulst

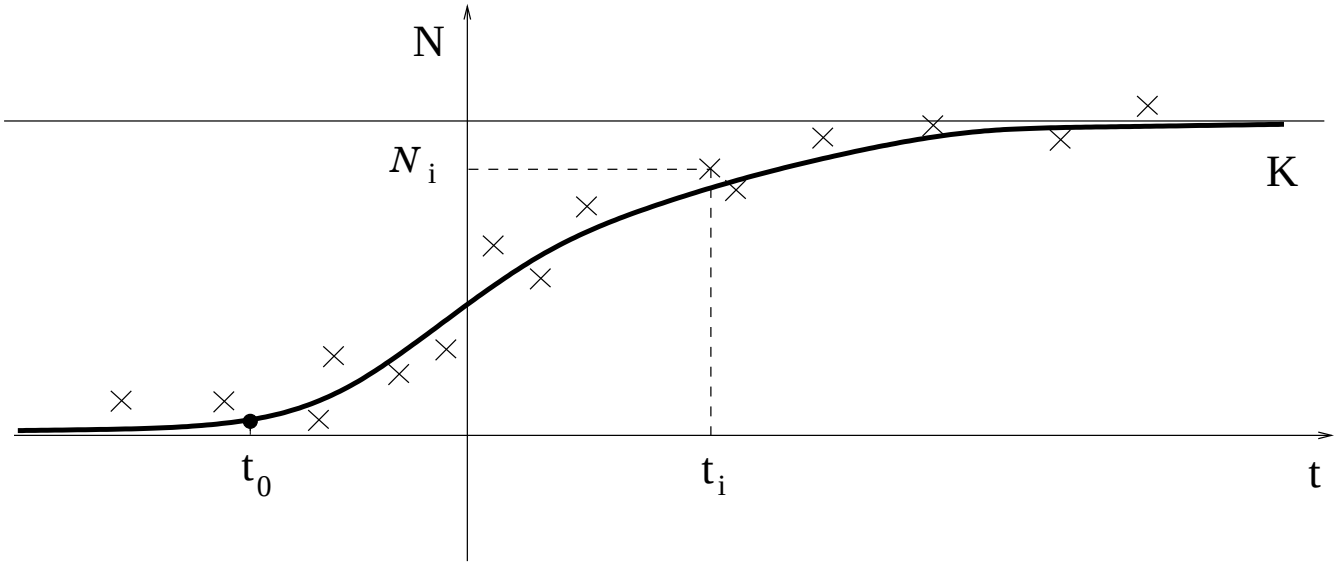
Représentation pour $K = 10000$, $N_0 = 20$, $a = 1$, $t_0 = 0$



Modèle de Verhulst

Régression logistique

Contrairement à la régression linéaire simple à mettre en œuvre pour le modèle de Malthus (voir (13)), il faut trouver les paramètres $K > 0$, $N_0 \in]0, K[$, $a > 0$, $t_0 \in \mathbb{R}$ tels que la fonction N_{K,N_0,a,t_0} définie par (22) passe le plus proche possible du nuage de points expérimental $(t_i, \mathcal{N}_i))_{0 \leq i \leq P}$.



Modèle de Verhulst

Régression logistique (identification approchée)

On utilise tout d'abord l'identification approchée à partir d'une méthode proposée dans [Per11, Annexe 3 : régressions logistiques] : la méthode dite de Perrin.

Modèle de Verhulst

Régression logistique (identification approchée)

On utilise tout d'abord l'identification approchée à partir d'une méthode proposée dans [Per11, Annexe 3 : régressions logistiques] : la méthode dite de Perrin.

On ne pas fait nécessairement l'hypothèse que les points t_i sont équidistants comme c'est fait dans [Per11]. On écrit, d'après (15), pour tout $i \in \{0, ..., P-1\}$:

$$\frac{N'(t_i)}{N(t_i)} = a\left(1 - \frac{N(t_i)}{K}\right).$$

et l'approximation

$$N'(t_i) \approx \frac{N(t_{i+1}) - N(t_i)}{t_{i+1} - t_i},$$

Modèle de Verhulst

Régression logistique (identification approchée)

On utilise tout d'abord l'identification approchée à partir d'une méthode proposée dans [Per11, Annexe 3 : régressions logistiques] : la méthode dite de Perrin.

On ne pas fait nécessairement l'hypothèse que les points t_i sont équidistants comme c'est fait dans [Per11]. On écrit, d'après (15), pour tout $i \in \{0, ..., P-1\}$:

$$\frac{N'(t_i)}{N(t_i)} = a\left(1 - \frac{N(t_i)}{K}\right).$$

et l'approximation

$$N'(t_i) \approx \frac{N(t_{i+1}) - N(t_i)}{t_{i+1} - t_i},$$

et donc

$$\frac{1}{t_{i+1} - t_i}\left(\frac{\mathcal{N}_{i+1}}{\mathcal{N}_i} - 1\right) \approx a - \frac{a}{K}\mathcal{N}_i$$

Modèle de Verhulst

Régression logistique (identification approchée)

On a donc finalement :

$$\forall i \in \{0, ..., P-1\}, \quad Y_i \approx a - \frac{a}{K} X_i \tag{23}$$

où

$$Y_i = \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \left(\frac{\mathcal{N}_{i+1}}{\mathcal{N}_i} - 1 \right), \tag{24a}$$

$$X_i = \mathcal{N}_i. \tag{24b}$$

Il suffit donc de faire une régression linéaire habituelle sur le nuage de points $(X_i, Y_i)_{0 \leq i \leq P-1}$, qui fournira a et a/K donc K.

Modèle de Verhulst

Régression logistique (identification approchée)

On a donc finalement :

$$\forall i \in \{0, ..., P-1\}, \quad Y_i \approx a - \frac{a}{K} X_i \tag{23}$$

où

$$Y_i = \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \left(\frac{\mathcal{N}_{i+1}}{\mathcal{N}_i} - 1 \right), \tag{24a}$$

$$X_i = \mathcal{N}_i. \tag{24b}$$

Il suffit donc de faire une régression linéaire habituelle sur le nuage de points $(X_i, Y_i)_{0 \leq i \leq P-1}$, qui fournira a et a/K donc K. Enfin, t_0 est connu et N_0 sera choisi égal à $N(t_0)$.

Modèle de Verhulst

Régression logistique (identification approchée)

On a donc finalement :

$$\forall i \in \{0, ..., P-1\}, \quad Y_i \approx a - \frac{a}{K} X_i \tag{23}$$

où

$$Y_i = \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \left(\frac{\mathcal{N}_{i+1}}{\mathcal{N}_i} - 1 \right), \tag{24a}$$

$$X_i = \mathcal{N}_i. \tag{24b}$$

Il suffit donc de faire une régression linéaire habituelle sur le nuage de points $(X_i, Y_i)_{0 \leq i \leq P-1}$, qui fournira a et a/K donc K. Enfin, t_0 est connu et N_0 sera choisi égal à $N(t_0)$. Malheureusement, comme le dit lui même Daniel Perrin, ces résultats sont parfois "sujets à caution".

Modèle de Verhulst

Régression logistique (problème aux moindres carrés)

Pour palier cette difficulté, on affine la recherche de (K, N_0, a) en utilisant la méthode des moindres carrés (utilisée aussi en régression linéaire). On cherche à minimiser l'écart entre la courbe théorique donnée par N_{K,N_0,a,t_0} et les données $\mathcal{N}_i$. Ici, t_0 est fixé.

Modèle de Verhulst

Régression logistique (problème aux moindres carrés)

Pour palier cette difficulté, on affine la recherche de (K, N_0, a) en utilisant la méthode des moindres carrés (utilisée aussi en régression linéaire). On cherche à minimiser l'écart entre la courbe théorique donnée par N_{K,N_0,a,t_0} et les données $\mathcal{N}_i$. Ici, t_0 est fixé.
On considère donc la somme des écarts aux carrés :

$$\eta_{K,a,N_0,t_0} = \sum_{i=1}^{P} (\mathcal{N}_i - N_{K,N_0,a,t_0}(t_i))^2. \tag{25}$$

et on cherche le triplet de paramètres $(K_0, N_{0,0}, a_0) \in \mathbb{R}_+^{*\,3}$ tel que

$$\eta_{K_0,a_0,N_{0,0},t_0} = \min_{(K,a,N_0)\in\mathbb{R}_+^{*\,3}} \eta_{K,a,N_0,t_0}, \tag{26}$$

et on vérifiera *a posteriori* que l'on a bien $0 < N_{0,0} < K_0$.

Modèle de Verhulst

Régression logistique (problème aux moindres carrés)

1. C'est un problème classique (minimisation sous contraintes) que sait résoudre par exemple la fonction `lsqcurvefit.m` de Matlab. Attention, un mimimum local est exhibé qui n'est pas nécessairement global !

Modèle de Verhulst

Régression logistique (problème aux moindres carrés)

1. C'est un problème classique (minimisation sous contraintes) que sait résoudre par exemple la fonction `lsqcurvefit.m` de Matlab. Attention, un mimimum local est exhibé qui n'est pas nécessairement global !
2. Il faut aussi partir d'une estimation initiale de (K, a, N_0) qui sera fournie par l'approximation donnée par la régression linaire (24).

Modèle de Verhulst

Régression logistique (problème aux moindres carrés)

1. C'est un problème classique (minimisation sous contraintes) que sait résoudre par exemple la fonction `lsqcurvefit.m` de Matlab. Attention, un mimimum local est exhibé qui n'est pas nécessairement global !
2. Il faut aussi partir d'une estimation initiale de (K, a, N_0) qui sera fournie par l'approximation donnée par la régression linaire (24).
3. Pour l'algorithme utilisé, voir l'aide de la fonction `lsqcurvefit.m` de Matlab.

Modèle de Verhulst

Régression logistique (problème aux moindres carrés)

1. C'est un problème classique (minimisation sous contraintes) que sait résoudre par exemple la fonction `lsqcurvefit.m` de Matlab. Attention, un mimimum local est exhibé qui n'est pas nécessairement global !
2. Il faut aussi partir d'une estimation initiale de (K, a, N_0) qui sera fournie par l'approximation donnée par la régression linaire (24).
3. Pour l'algorithme utilisé, voir l'aide de la fonction `lsqcurvefit.m` de Matlab.
4. Notons que les contraintes $(K, N_0, a) \in \mathbb{R}_+^{*\,3}$ ne sont pas habituelles et seront remplacées par des contraintes du type $(K, N_0, a) \in [\varepsilon, +\infty[^3$ où $\varepsilon > 0$ sera choisi petit (eps sous matlab).

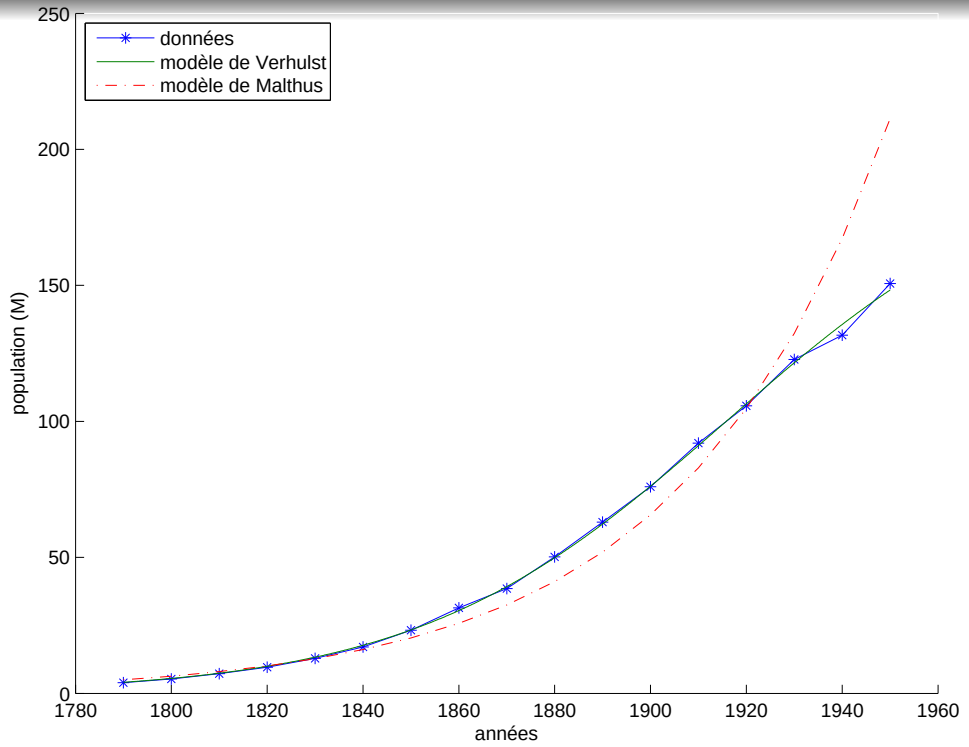
Modèle de Verhulst

Simulations (Population des USA entre 1790 et 1950).

Données issues de [Pia12a] sur la population des USA entre les années 1790 et 1950, déjà données.

Modèle de Verhulst

Simulations (Population des USA entre 1790 et 1950).



On obtient

$$K = 200.033501, \tag{27a}$$

$$a = 0.030778, \tag{27b}$$

$$N_0 = 4.078243, \tag{27c}$$

$$t_0 = 1790. \tag{27d}$$

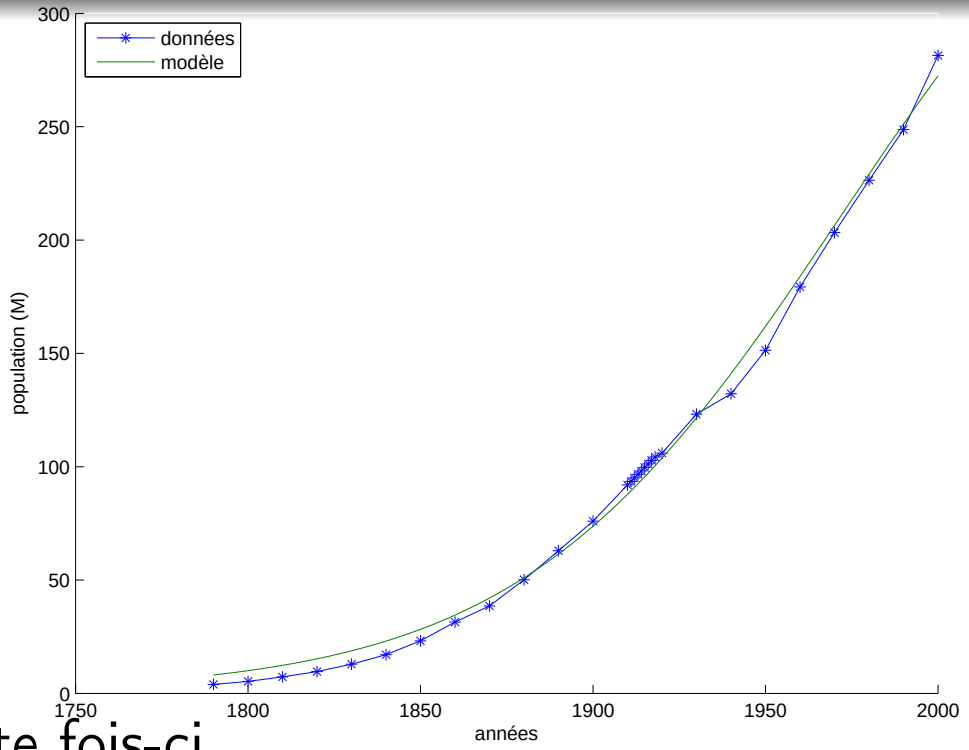
Modèle de Verhulst

Simulations (Population des USA entre 1790 et 2020).

Données issues de [Per11] sur la population des USA.

Modèle de Verhulst

Simulations (Population des USA entre 1790 et 2020).



On obtient cette fois-ci

$$K = 418.433659, \tag{28a}$$

$$a = 0.021651, \tag{28b}$$

$$N_0 = 8.110990, \tag{28c}$$

$$t_0 = 1790. \tag{28d}$$

Modèle de Verhulst

Simulations (Population des USA entre 1790 et 2020).

On se sert de ces données et de l'identification donnée par (28) pour faire une projection sur les années 2010 et 2020 obtenue sur `https://fr.wikipedia.org/wiki/Démographie_des_États-Unis` données ci-dessous

Années	Population (M)
2 010	$308,746$
2 020	$331,449$

Modèle de Verhulst

Simulations (Population des USA entre 1790 et 2020).

On se sert de ces données et de l'identification donnée par (28) pour faire une projection sur les années 2010 et 2020 obtenue sur `https://fr.wikipedia.org/wiki/Démographie_des_États-Unis` données ci-dessous

Années	Population (M)
2 010	$308,746$
2 020	$331,449$

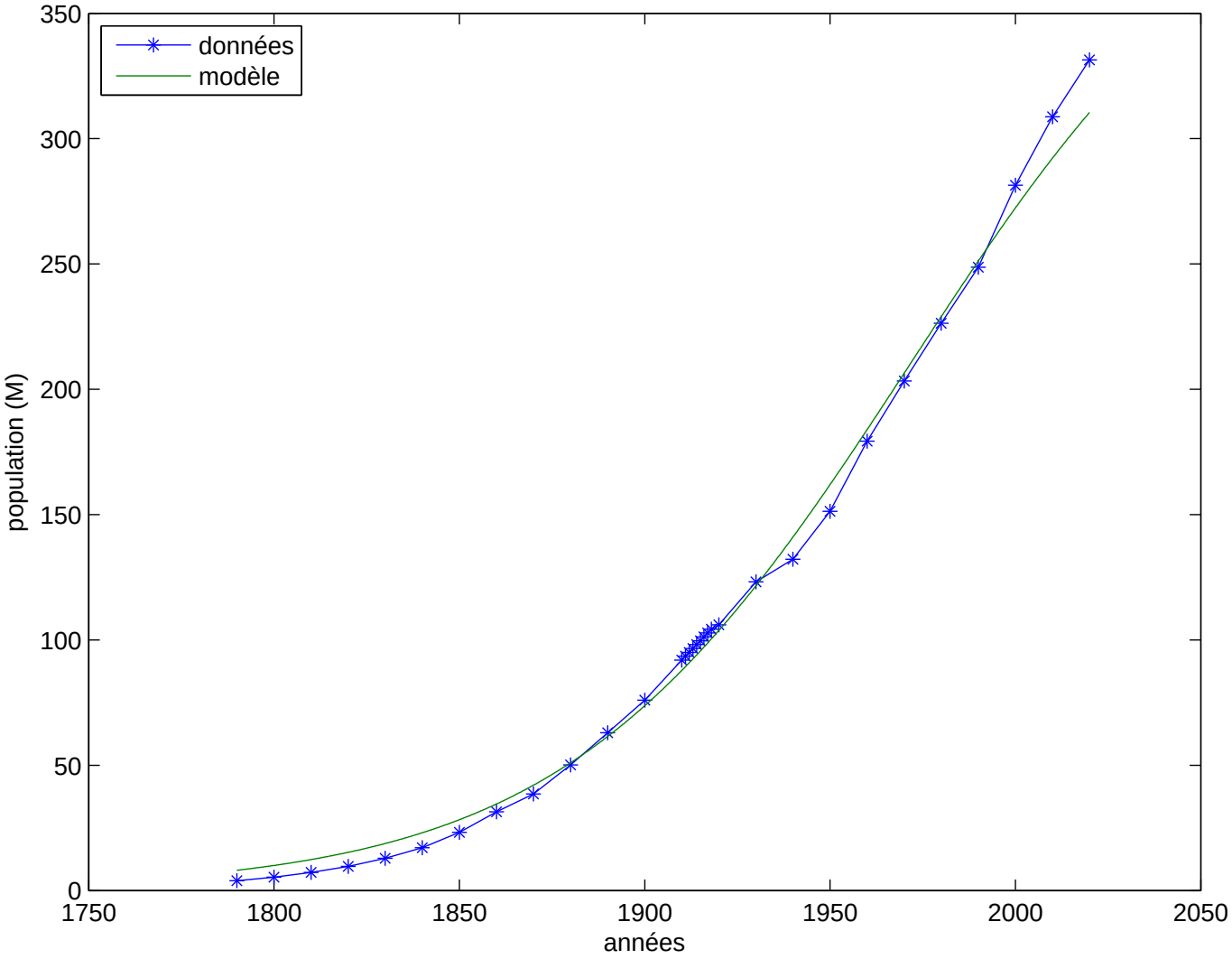
On obtient cette fois-ci les populations suivantes :

Années	Population (M)
2 010	$292,214$
2 020	$310,444$

et la figure transparent suivant.

Modèle de Verhulst

Simulations (Population des USA entre 1790 et 2020).



Modèle de Verhulst

Simulations (Population d'un groupe d'éléphants dans le Parc Kruger entre 1905 et 2000).

Données issues de [Mat]. Extraits :

"L'éléphant africain de la savane se comptait par millions dans la savane africaine avant qu'il ne soit décimé, durant des siècles par des chasseurs, notamment pour exploiter l'ivoire de ses défenses ... À la fin du XIXe siècle, cette population étant pratiquement arrivée à extinction en Afrique du Sud, il fut décidé la création d'un parc naturel, le parc Kruger à la frontière entre l'Afrique du Sud et le Mozambique. Le premier responsable du parc en 1903 ne trouva aucun éléphant à son arrivée mais un petit groupe de 10 éléphants furent repérés en 1905, vraisemblablement venu du Mozambique. Des mesures de protection strictes, à la fois des animaux et de leur habitat furent décidées dans ce parc et maintenues tout au long du XXe siècle. Elles permirent une croissance "naturelle" de cette population, qui fut d'abord lente jusque dans les années 30, puis très rapide jusque dans les années 60. C'est alors qu'on observa à la fois un ralentissement du taux de croissance et, en même temps, un début de dégradation par les éléphants d'autres espèces de l'écosystème comme les baobabs par exemple."

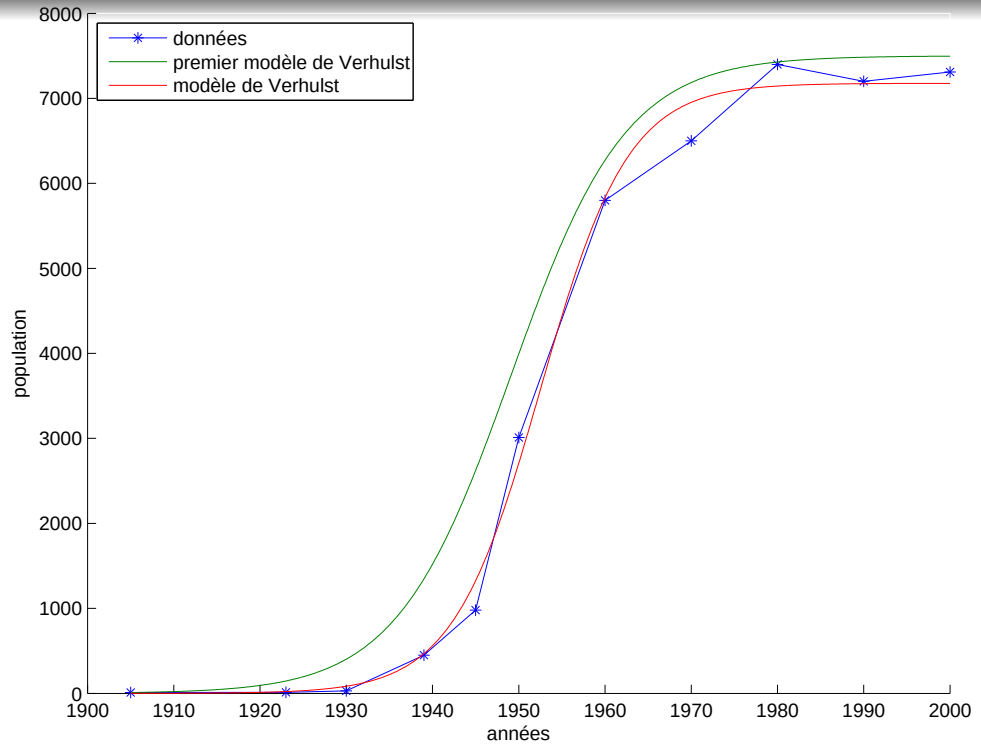
Modèle de Verhulst

Simulations (Population d'un groupe d'éléphants dans le Parc Kruger entre 1905 et 2000).

Années	Population
1 905	10
1 923	13
1 930	29
1 939	450
1 945	980
1 950	3 010
1 960	5 800
1 970	6 500
1 980	7 400
1 990	7 200
2 000	7 310

Modèle de Verhulst

Simulations (Population d'un groupe d'éléphants dans le Parc Kruger entre 1905 et 2000).



On obtient

$$K = 7177.156359,$$
$$a = 0.196672,$$
$$N_0 = 0.623226,$$
$$t_0 = 1905.$$

Modèle de Verhulst

Simulations (Population d'un groupe d'éléphants dans le Parc Kruger entre 1905 et 2000).

On obtient un résultat de meilleure qualité que celui obtenu dans [Mat] donné par (voir (25))

$$K = 7500, \tag{29}$$

$$\eta_{K,a,N_0,t_0} = 5.43581\,10^6. \tag{30}$$

puisque que l'on obtient un écart plus faible :

$$\eta_{K,a,N_0,t_0} = 5.03908\,10^5.$$

Modèles de Malthus et Verhulst

généralisation

Les équations différentielles gérant les modèles de Malthus et Verhulst, données par (10) et (15) sont du type

$$N'(t) = r\left(N(t)\right) N(t) \tag{31}$$

où le taux de la croissance de la population r est constant (modèle de Malthus) ou est une fonction décroissante de N, donné par (16)).

Modèles de Malthus et Verhulst

généralisation

Les équations différentielles gérant les modèles de Malthus et Verhulst, données par (10) et (15) sont du type

$$N'(t) = r\left(N(t)\right) N(t) \tag{31}$$

où le taux de la croissance de la population r est constant (modèle de Malthus) ou est une fonction décroissante de N, donné par (16)).

Nous pourrions utiliser d'autres modèles décrits par des équations différentielles du type

$$N'(t) = r\left(N(t)\right) N(t) \tag{32}$$

où r est une fonction quelconque.

Modèle de Verhulst

Critiques

Nous avons rencontré les difficultés suivantes avec le modèle de Verhulst :

1. Si le modèle décrit la réalité sur une plage de temps donnée, il n'est pas aisé de faire des projections, en extrapolant les données [11].

11. Voir le transparent 61 et l'exercice de TD 1.3 (et le point 2(c)iii page 4 de sa correction).

Modèle de Verhulst

Critiques

Nous avons rencontré les difficultés suivantes avec le modèle de Verhulst :

1. Si le modèle décrit la réalité sur une plage de temps donnée, il n'est pas aisé de faire des projections, en extrapolant les données [11].
2. L'hypothèse de base de Verhulst est la décroissance de r (en fonction de N ou de t) ce qui implique la décroissance de $r(N(t))$, voir transparents 41 ou (17)).

11. Voir le transparent 61 et l'exercice de TD 1.3 (et le point 2(c)iii page 4 de sa correction).

Modèle de Verhulst

Critiques

Nous avons rencontré les difficultés suivantes avec le modèle de Verhulst :

1. Si le modèle décrit la réalité sur une plage de temps donnée, il n'est pas aisé de faire des projections, en extrapolant les données [11].
2. L'hypothèse de base de Verhulst est la décroissance de r (en fonction de N ou de t) ce qui implique la décroissance de $r(N(t))$, voir transparents 41 ou (17)). Le cas non étudié ($N_0 > K$) est aussi possible, mais dans ce cas, N est décroissante et tend encore vers la capacité d'accueil K [Per11 ; Pia13 ; Pia12b]. Bref, dans tous les cas, r est décroissant et N est monotone.

11. Voir le transparent 61 et l'exercice de TD 1.3 (et le point 2(c)iii page 4 de sa correction).

Modèle de Verhulst

Critiques

Notons que de façon générale, si y est une solution maximale de l'équation différentielle autonome [12]

$$\begin{aligned} &\forall t \geq t_0, \quad y'(t) = f(y(t)), \\ &y(t_0) = y_0, \end{aligned}$$

alors si y prend ses valeurs dans une partie de $\mathbb{R}$ où f ne s'annule pas, y est strictement monotone.

12. Dont on suppose l'existence et l'unicité de la solution. Voir par exemple [BM03, Chapitre 5] ou [DB22, chapitre "Équations différentielles (ordinaires)"], [Sch01 ; CM84 ; Puj].

Modèle de Verhulst

Critiques

Notons que de façon générale, si y est une solution maximale de l'équation différentielle autonome [12]

$$\begin{aligned} &\forall t \geq t_0, \quad y'(t) = f(y(t)), \\ &y(t_0) = y_0, \end{aligned}$$

alors si y prend ses valeurs dans une partie de $\mathbb{R}$ où f ne s'annule pas, y est strictement monotone.
En effet, si y n'est pas strictement monotone, y' s'annule en un réel t (sinon y' est de signe strict constant et y est strictement monotone) et $f(y(t)) = y'(t) = 0$, ce qui est absurde.

12. Dont on suppose l'existence et l'unicité de la solution. Voir par exemple [BM03, Chapitre 5] ou [DB22, chapitre "Équations différentielles (ordinaires)"], [Sch01 ; CM84 ; Puj].

Modèle de Verhulst

Critiques

Notons que de façon générale, si y est une solution maximale de l'équation différentielle autonome [12]

$$\begin{aligned} &\forall t \geq t_0, \quad y'(t) = f(y(t)), \\ &y(t_0) = y_0, \end{aligned}$$

alors si y prend ses valeurs dans une partie de $\mathbb{R}$ où f ne s'annule pas, y est strictement monotone.
En effet, si y n'est pas strictement monotone, y' s'annule en un réel t (sinon y' est de signe strict constant et y est strictement monotone) et $f(y(t)) = y'(t) = 0$, ce qui est absurde.

C'est bien le cas de la solution du modèle de Verhulst.

12. Dont on suppose l'existence et l'unicité de la solution. Voir par exemple [BM03, Chapitre 5] ou [DB22, chapitre "Équations différentielles (ordinaires)"], [Sch01 ; CM84 ; Puj].

Modèle de Verhulst

Critiques

Ces deux difficultés impliquent de choisir d'autres modèles pour rendre compte de

- transition démographique et
- la prospective démographique,

deux thématiques qui constituent les partie suivantes de cet exposé.

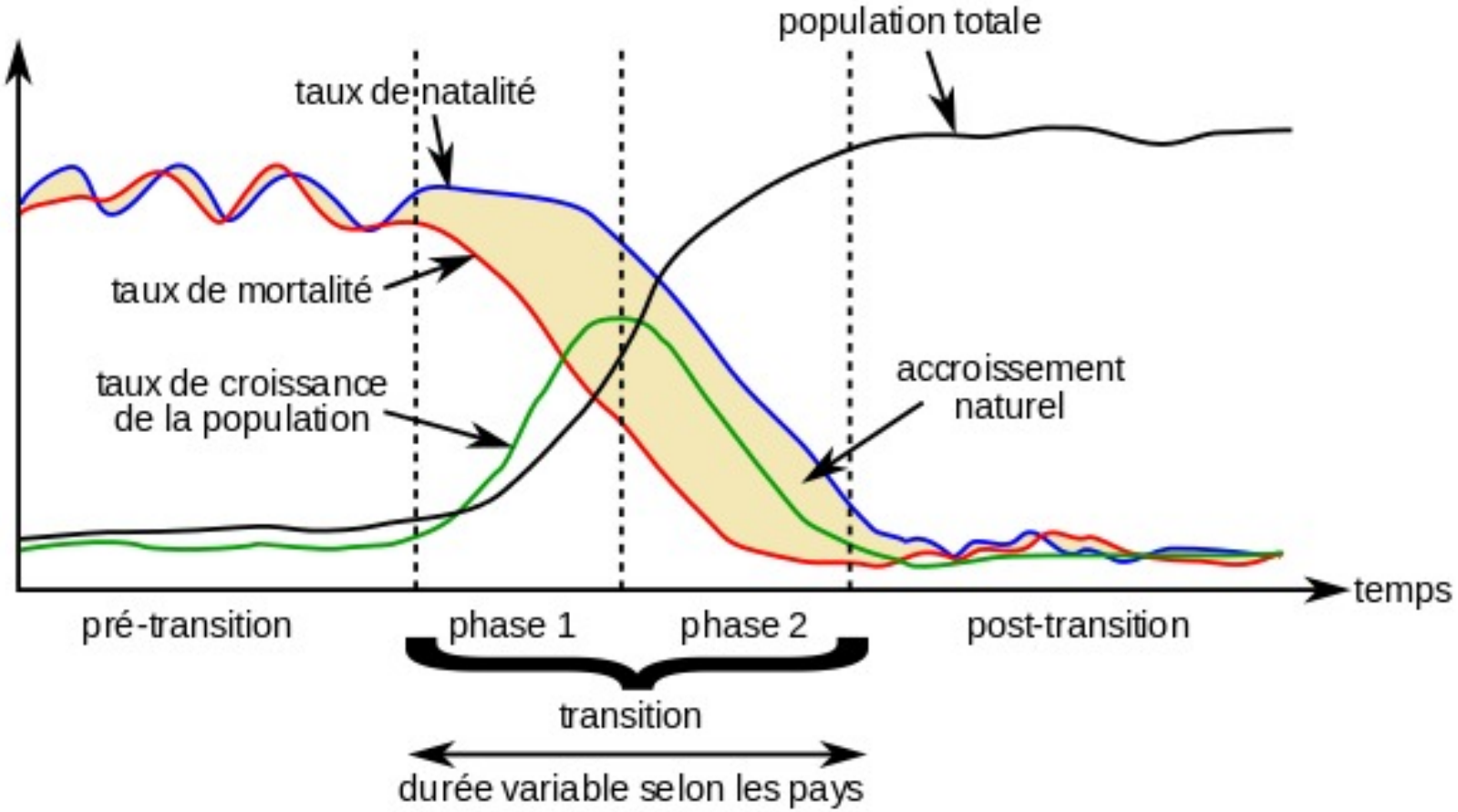
Sommaire

1. Modèles simples de croissance démographique (Malthus et Verhulst)
2. La transition démographique et la prospective démographique
3. Modèles à populations multiples
4. Perspectives et conclusions

Transition démographique

Principe : trois phases

On renvoie à https://fr.wikipedia.org/wiki/Transition_démographique et https://www.kartable.fr/ressources/geographie/cours/des-trajectoires-demographiques-differenciees/51043



Courbe typique de la transition démographique avec trois phases.

Transition démographique

modélisation

Cette étape de transition est nécessaire avant de passer à suite (prospectives).

Le taux de croissance de la population est croissant puis décroissant et le modèle de Verhulst ne peut être utilisé ici (transparent 68).

Transition démographique

modélisation

Cette étape de transition est nécessaire avant de passer à suite (prospectives).

Le taux de croissance de la population est croissant puis décroissant et le modèle de Verhulst ne peut être utilisé ici (transparent 68).

Peut-on trouver un modèle avec l'équation différentielle (31) où r n'est pas nécessairement croissant ?

Transition démographique

modélisation

Cette étape de transition est nécessaire avant de passer à suite (prospectives).

Le taux de croissance de la population est croissant puis décroissant et le modèle de Verhulst ne peut être utilisé ici (transparent 68).

Peut-on trouver un modèle avec l'équation différentielle (31) où r n'est pas nécessairement croissant ?

Attention, en vertu du transparent 69, il est fondamental que

$$r \text{ soit strictement positif et } N \text{ strictement croissant.} \tag{33}$$

Transition démographique

Tentative de modélisation

Nous procédons comme précédemment (à partir du transparent 53 à 54) : soit $t_0 \in \mathbb{R}$. On cherche une fonction $r_\xi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ qui dépend de plusieurs paramètres, notés ξ qui appartiennent à une partie de $\mathbb{R}^n$ et on détermine ξ pour que la solution de

$$N'(t) = r_\xi\left(N(t)\right) N(t), \tag{34a}$$

$$N(t_0) = N_0, \tag{34b}$$

soit la plus proche de possible des données expérimentales $(t_i, \mathcal{N}_i)_{0 \leq i \leq P}$.

Transition démographique

Tentative de modélisation

Nous procédons comme précédemment (à partir du transparent 53 à 54) : soit $t_0 \in \mathbb{R}$. On cherche une fonction $r_\xi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ qui dépend de plusieurs paramètres, notés ξ qui appartiennent à une partie de $\mathbb{R}^n$ et on détermine ξ pour que la solution de

$$N'(t) = r_\xi\left(N(t)\right) N(t), \tag{34a}$$

$$N(t_0) = N_0, \tag{34b}$$

soit la plus proche de possible des données expérimentales $(t_i, \mathcal{N}_i)_{0 \leq i \leq P}$.

D'après (33), il est nécessaire que

La fonction r_ξ est strictement positive ; (35a)

Les valeurs $(\mathcal{N}_i)_{0 \leq i \leq P}$ sont strictement croissantes. (35b)

Transition démographique

Tentative de modélisation

1. On écrit comme dans le transparent 54 :

$$\forall i \in \{0, ..., P-1\}, \quad Y_i = r_\xi(\mathcal{N}_i), \tag{36}$$

où

$$Y_i = \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \left(\frac{\mathcal{N}_{i+1}}{\mathcal{N}_i} - 1 \right). \tag{37}$$

Transition démographique

Tentative de modélisation

1. On écrit comme dans le transparent 54 :

$$\forall i \in \{0, ..., P-1\}, \quad Y_i = r_\xi(\mathcal{N}_i), \tag{36}$$

où

$$Y_i = \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \left(\frac{\mathcal{N}_{i+1}}{\mathcal{N}_i} - 1 \right). \tag{37}$$

2. Selon le type de la fonction r_ξ, on déterminera le meilleur paramètre ξ_0 de façon à minimiser la quantité

$$\eta_\xi = \sum_{i=0}^{P-1} \left(Y_i - r_\xi(X_i) \right)^2. \tag{38}$$

On utilise ici implicitement l'hypothèse (35b).

Transition démographique

Tentative de modélisation

1. On procède ensuite comme dans le transparent 55 : on pose

$$\widehat{\eta}_{\xi,N_0} = \sum_{i=0}^{P} \left(\mathcal{N}_i - N_{\xi,N_0}(t_i)\right)^2 , \tag{39}$$

où N_{ξ,N_0} est la solution de (34).

Transition démographique

Tentative de modélisation

1. On procède ensuite comme dans le transparent 55 : on pose

$$\widehat{\eta}_{\xi,N_0} = \sum_{i=0}^{P} \left(\mathcal{N}_i - N_{\xi,N_0}(t_i)\right)^2, \tag{39}$$

   où N_{ξ,N_0} est la solution de (34).
2. On cherche la valeur de (ξ, N_0) qui minimise $\widehat{\eta}_{\xi,N_0}$ en prenant comme valeur initiale $(\xi_0, N(t_0))$ où ξ_0 a été déterminé précédemment.

Transition démographique

Tentative de modélisation : localement, vers le modèle de Malthus

Si on choisit r_ξ constante, on retrouve le modèle de Malthus.

Transition démographique

Tentative de modélisation : localement, vers le modèle de Malthus

Si on choisit r_ξ constante, on retrouve le modèle de Malthus.

Ou si on l'on fait un dévéloppement limité à l'ordre 0 en N_0 de r_ξ :

$$r_\xi(N) = r_\xi(N_0),$$

puisque (34a) devient, pour $t \approx t_0$

$$N'(t) = r_\xi\left(N(t)\right) N(t) = r_\xi(N_0) N(t),$$

et on retrouve l'équation différentielle (10).

Transition démographique

Tentative de modélisation : localement, vers le modèle de Verhulst

Si on choisit r_ξ affine avec

$$r_\xi(N_0) > 0, \tag{40a}$$

$$r'_\xi(N_0) < 0, \tag{40b}$$

la fonction $N \mapsto r(N)$ est strictement positive et strictement décroissante (pour N proche de $N_0 > 0$) et on retrouve le modèle de Verhulst décrit par l'équation différentielle (15).

Transition démographique

Tentative de modélisation : localement, vers le modèle de Verhulst

Si on choisit r_ξ affine avec

$$r_\xi(N_0) > 0, \tag{40a}$$
$$r'_\xi(N_0) < 0, \tag{40b}$$

la fonction $N \mapsto r(N)$ est strictement positive et strictement décroissante (pour N proche de $N_0 > 0$) et on retrouve le modèle de Verhulst décrit par l'équation différentielle (15).

Ou si on l'on fait un dévéloppement limité à l'ordre 1 en N en N_0 de r_ξ :

$$\begin{aligned} r_\xi(N) &= r_\xi(N_0) + r'_\xi(N_0)(N - N_0), \\ &= \big(r_\xi(N_0) - r'_\xi(N_0)N_0\big) + r'_\xi(N_0)N \end{aligned}$$

et on retrouve, avec les hypothèses (40), pour $t \approx t_0$ l'équation différentielle (31) avec (15).

Prospective démographique

Enjeux de l'humanité

La plupart des pays du monde ont (pour ceux dits "développés") dépassé ou sont en train de franchir (ceux dit "en développement") la phase de transition. L'enjeux est donc de prévoir la progression de la démographie mondiale, après cette phase.

Prospective démographique

Enjeux de l'humanité

La plupart des pays du monde ont (pour ceux dits "développés") dépassé ou sont en train de franchir (ceux dit "en développement") la phase de transition. L'enjeux est donc de prévoir la progression de la démographie mondiale, après cette phase.

L'ONU a prévu quatre scénarios jusqu'en 2100. Voir `https://fr.wikipedia.org/wiki/Prospective_démographique`, [Pis11] et les données dans `https://population.un.org/wpp/`.

Prospective démographique

Population mondiale

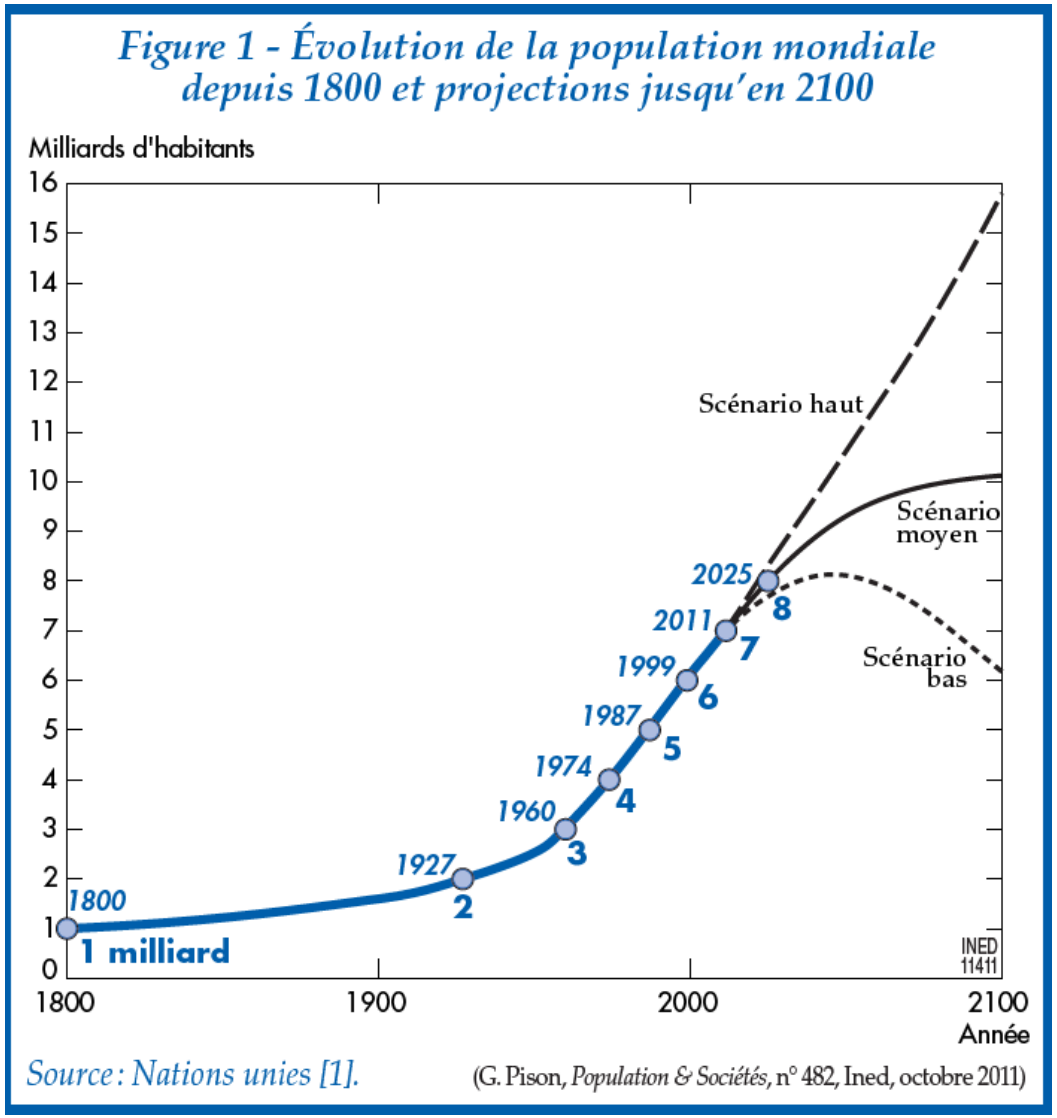


Figure issue de [Pis11]

Prospective démographique

Population mondiale (hypothèse de fertilité constante)

Figure 1. Population of the world, 1950-2100, according to different projections and variants

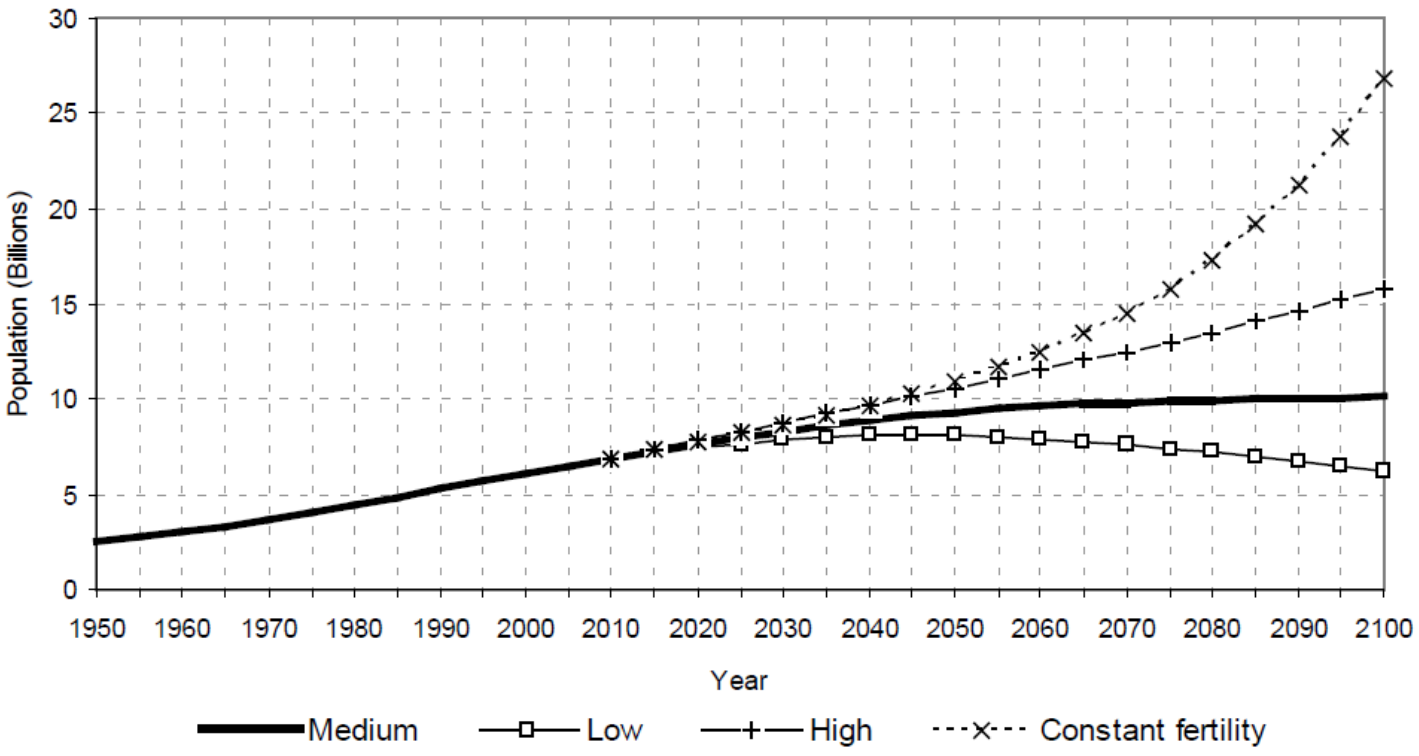


Figure issue de `https://www.un.org/en/development/desa/population/publications/pdf/trends/WPP2010/WPP2010_Volume-I_Comprehensive-Tables.pdf`

Prospective démographique

Population mondiale : différentes scénarios et projection en 2100.

scénario	population (G)
bas	6.17
moyen	10.10
haut	15.98
fertilité constante	26.65

Données issues de [Pis11] et `https://www.un.org/en/development/desa/population/publications/pdf/trends/WPP2010/WPP2010_Volume-I_Comprehensive-Tables.pdf`

Prospective démographique

Taux de croissance

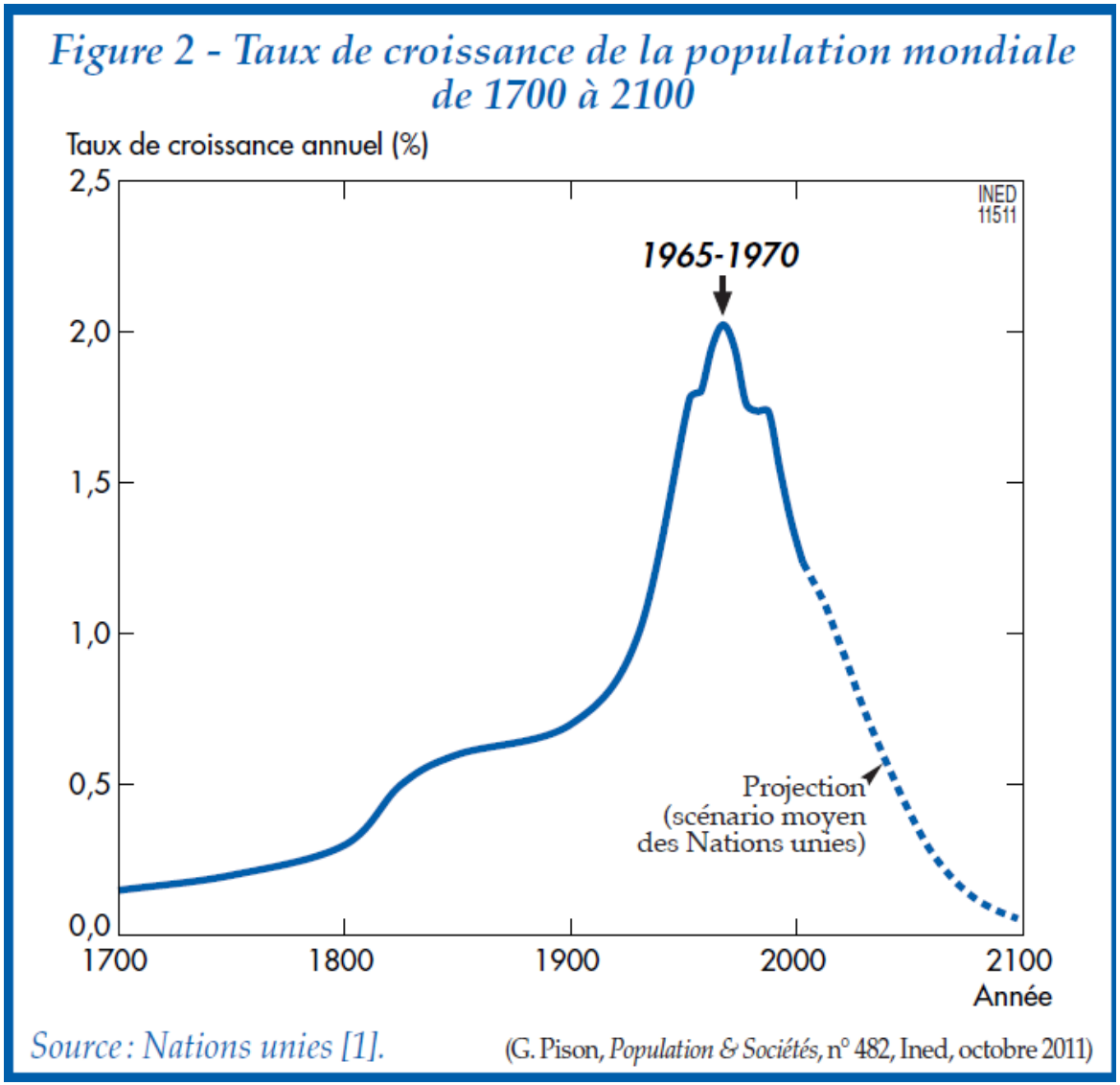


Figure issue de [Pis11]

Prospective démographique

Différentes hypothèses sur le taux de croissance

Le taux de croissance est décroissant, on est dans la phase de post-transition.

Prospective démographique

Différentes hypothèses sur le taux de croissance

Le taux de croissance est décroissant, on est dans la phase de post-transition.

Vues les difficultés de la modélisation de Verhulst (voir transparents 68 et 69), il n'est pas possible de prendre en compte des cas où la population décroît. On souhaite donc se passer de l'hypothèse (33).

Prospective démographique

Différentes hypothèses sur le taux de croissance

Le taux de croissance est décroissant, on est dans la phase de post-transition.

Vues les difficultés de la modélisation de Verhulst (voir transparents 68 et 69), il n'est pas possible de prendre en compte des cas où la population décroît. On souhaite donc se passer de l'hypothèse (33).

Le taux de croissance ne dépend pas que la taille de la population, mais du temps et de nombreux facteurs.

Prospective démographiques

Critiques des modèles présentés

1. Hétérogénéité de la population dans le monde ;

Prospective démographiques

Critiques des modèles présentés

1. Hétérogénéité de la population dans le monde ;
2. Hétérogénéité de la population dans chaque pays ;

Prospective démographiques

Critiques des modèles présentés

1. Hétérogénéité de la population dans le monde ;
2. Hétérogénéité de la population dans chaque pays ;
3. Absence de prise en compte de l'immigration et de l'émigration ;

Prospective démographiques

Critiques des modèles présentés

1. Hétérogénéité de la population dans le monde ;
2. Hétérogénéité de la population dans chaque pays ;
3. Absence de prise en compte de l'immigration et de l'émigration ;
4. Forte dépendance des taux de natalité et de mortalité avec de nombreux facteurs (sociaux-culturels, politiques, scientifiques ...) ou d'autres événements (épidémies, guerres, retour de guerre ...)

Prospective démographique

Liens avec le climat

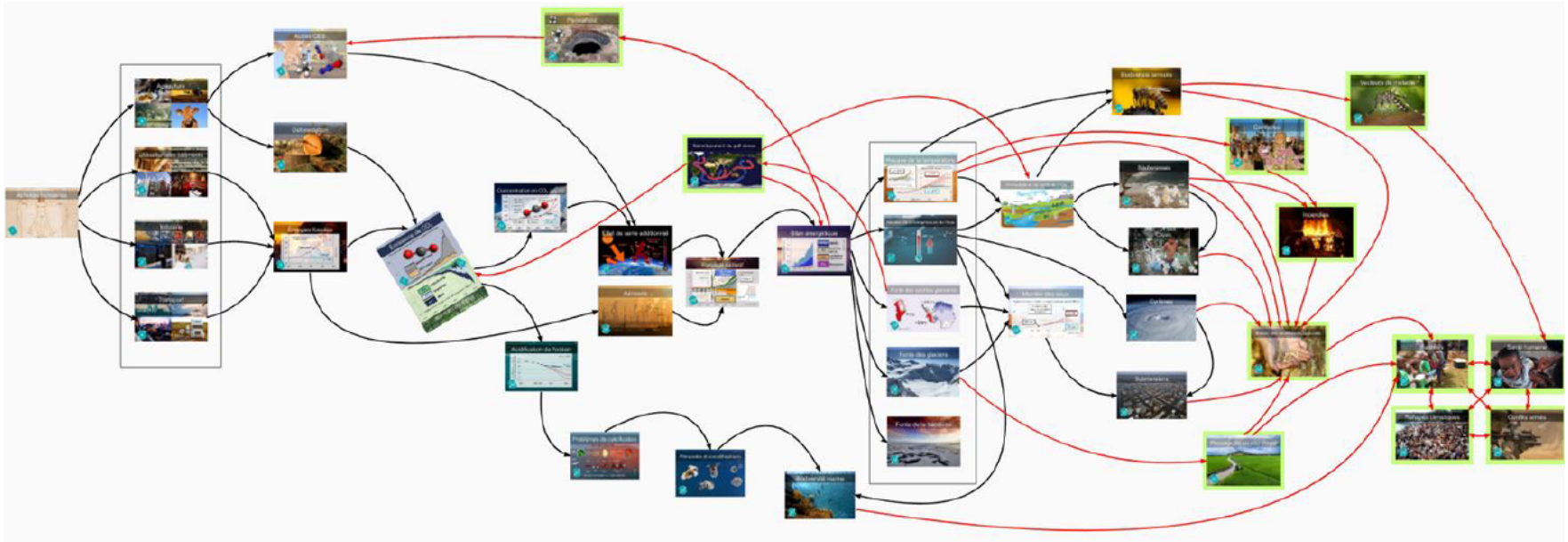
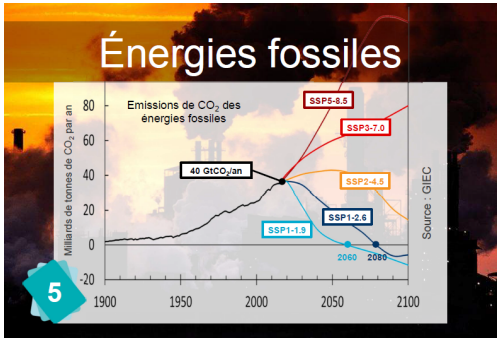
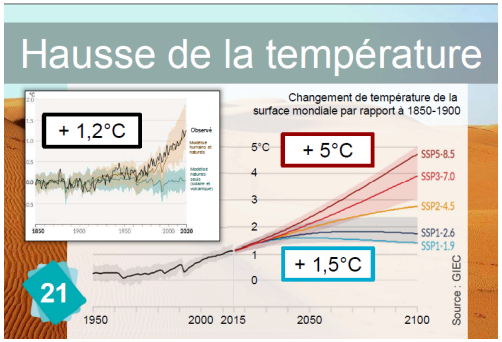


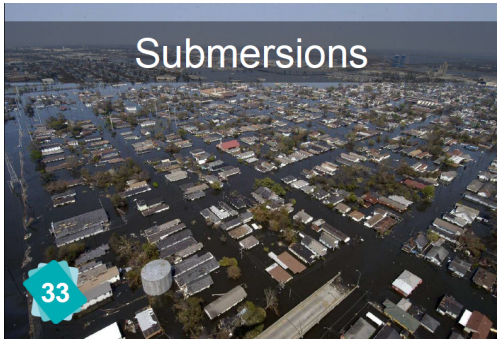
Figure (et suivantes) issues de la fresque du climat [Rin23].

Prospective démographique

Liens avec le climat

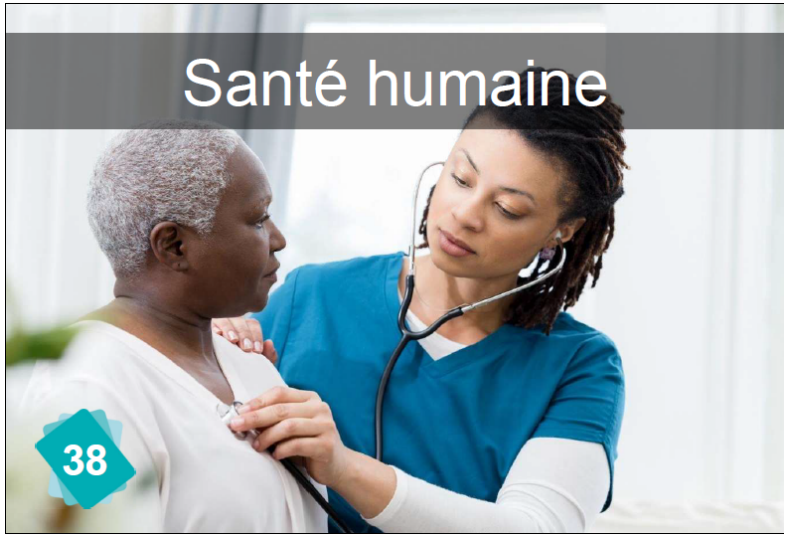






Prospective démographique

Liens avec le climat (carré d'as)



Prospective démographique

Dynamique des populations et d'autres types de modèles

Vers d'autres modèles, intermédiaires entre les modèles simples de Malthus et Verhulst et le modèle très complexe world 3, très sommairement introduit en section 4.

Sommaire

1. Modèles simples de croissance démographique (Malthus et Verhulst)
2. La transition démographique et la prospective démographique
3. Modèles à populations multiples
4. Perspectives et conclusions

Critique du modèle de Verhulst

Histoire du modèle de Lotka-Volterra

On introduit un modèle deux espèces, où les sorts des deux "populations" sont liés.

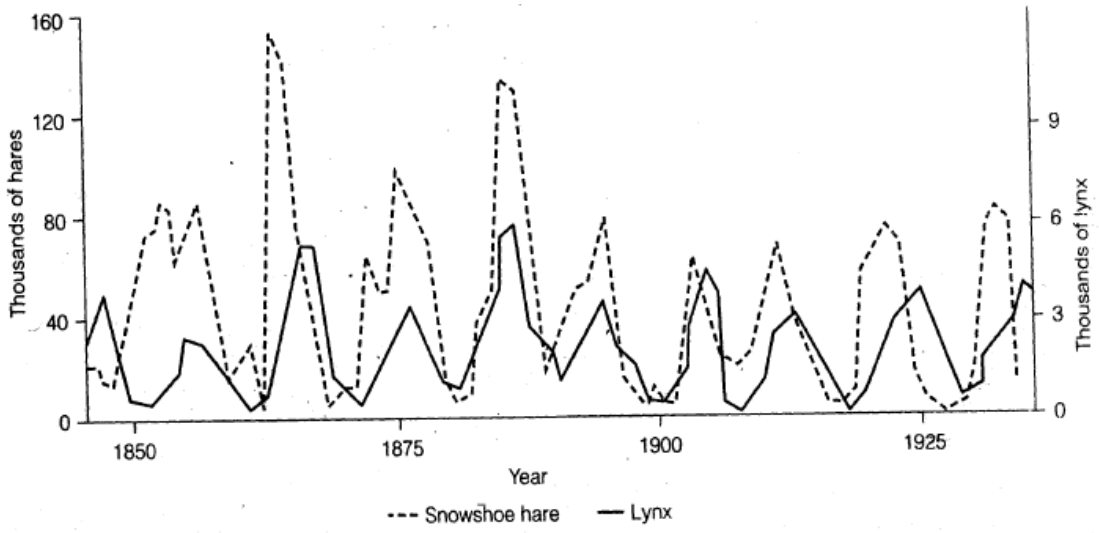
Critique du modèle de Verhulst

Histoire du modèle de Lotka-Volterra

On introduit un modèle deux espèces, où les sorts des deux "populations" sont liés.
On pourra la passionnante histoire de l'émergence du modèle de Lotka-Volterra par exemple dans [Mat00 ; Lob17] à partir des travaux de MacLulich [Mac37], cité dans [Odu71] à partir de l'observation du nombres de lièvres et de Lynxs dans la mythique baie d'Hudson.

Modèle de Lotka-Volterra

Histoire du modèle



Tout a commencé par le nombre de Lynx et de lièvres, relevés en Baie d'Hudson, entre 1845 et 1935 comme le montre la figure ci-dessus, issue de [Odu71, Chapitre 6, "Population Ecology"] (p. 248 de la première édition), avec la légende suivante :

"Fluctuations in the abundance of the lynx (*Felis Lynx*) and the snowshoes-hare (*Lepus americanus*), as indicated by the pelts receveid by the Hudsan Bay Company (redrawn from MacLulich 1937 and Keith 1963)."

Modèle de Lotka-Volterra

Histoire du modèle

Il est apparemment difficile de comprendre comment ces données ont été collectées, mais ce qui est important est qu'on observait un comportement périodique des deux populations, avec un léger déphasage

Modèle de Lotka-Volterra

Histoire du modèle

Il est apparemment difficile de comprendre comment ces données ont été collectées, mais ce qui est important est qu'on observait un comportement périodique des deux populations, avec un léger déphasage
et donc une interaction entre proie et prédateurs, avec une corrélation spécifique entre ces deux populations, indépendante d'autres causes externes.

Modèle de Lotka-Volterra

Histoire du modèle

Extrait de [Mat00] "La paternité du premier modèle conçu pour transcrire ce genre d'interactions (comportements de type compétition et des relations prédateur-proie) a fait l'objet d'une querelle de priorité entre Alfred Lotka et Vito Volterra au début du XXe siècle. Il semble cependant que le mérite de l'élaboration du premier modèle de type prédateur-proie appliqué à une situation biologique revienne à Volterra."

Modèle de Lotka-Volterra

Histoire du modèle

Extrait de [Mat00] "La paternité du premier modèle conçu pour transcrire ce genre d'interactions (comportements de type compétition et des relations prédateur-proie) a fait l'objet d'une querelle de priorité entre Alfred Lotka et Vito Volterra au début du XXe siècle. Il semble cependant que le mérite de l'élaboration du premier modèle de type prédateur-proie appliqué à une situation biologique revienne à Volterra."
Ce dernier a donc a étudié les rapports entre les sardines et son prédateur dans la Haute Adriatique suite aux rélevés du biologiste D'Ancona [DAn26] portant sur la pêche.

Modèle de Lotka-Volterra

Histoire du modèle

Extrait de [Mat00] "La paternité du premier modèle conçu pour transcrire ce genre d'interactions (comportements de type compétition et des relations prédateur-proie) a fait l'objet d'une querelle de priorité entre Alfred Lotka et Vito Volterra au début du XXe siècle. Il semble cependant que le mérite de l'élaboration du premier modèle de type prédateur-proie appliqué à une situation biologique revienne à Volterra."

Ce dernier a donc a étudié les rapports entre les sardines et son prédateur dans la Haute Adriatique suite aux rélevés du biologiste D'Ancona [DAn26] portant sur la pêche.

Volterra a proposé son modèle à D'Ancona. Présentons-le maintenant.

Modèle de Lotka-Volterra

Description et hypothèse du modèle

De nombreuses références existent sur ce modèle : la référence historique [Vol31], ou par exemple [Mur93, Chapitre 3], [Tou22 ; Via25]. Voir aussi `https://fr.wikipedia.org/wiki/%C3%89quations_de_pr%C3%A9dation_de_Lotka-Volterra`.

Modèle de Lotka-Volterra

Description et hypothèse du modèle

Comme décrit dans [Via25], on considère deux populations de tailles respectives $x(t) > 0$, les proies et $y(t) > 0$ les prédateurs. On supppose que les proies, seules, suivent la loi de Malthus (10)

$$\forall t \geq 0, \quad \frac{x'(t)}{x(t)} = a, \tag{41}$$

avec $a > 0$, qui traduit une croissance sans limite en l'absence de prédateurs et la nourriture abondante.

Modèle de Lotka-Volterra

Description et hypothèse du modèle

Comme décrit dans [Via25], on considère deux populations de tailles respectives $x(t) > 0$, les proies et $y(t) > 0$ les prédateurs. On supppose que les proies, seules, suivent la loi de Malthus (10)

$$\forall t \geq 0, \quad \frac{x'(t)}{x(t)} = a, \tag{41}$$

avec $a > 0$, qui traduit une croissance sans limite en l'absence de prédateurs et la nourriture abondante. Les prédateurs, quant à eux, suivent la loi de Malthus (10)

$$\forall t \geq 0, \quad \frac{y'(t)}{y(t)} = -c, \tag{42}$$

avec $c > 0$, qui traduit une décroissance en l'absence de proies, faute de nourriture.

Modèle de Lotka-Volterra

Description et hypothèse du modèle

Il existe une interaction entre les proies et les prédateurs, prise en compte de la façon suivante : le taux de prédation (taux de décroissance des proies dû aux prédateurs) est supposé proportionnel au nombre de prédateurs et on remplace donc (41) par

$$\forall t \geq 0, \quad \frac{x'(t)}{x(t)} = a - by(t),$$

avec $b > 0$.

Modèle de Lotka-Volterra

Description et hypothèse du modèle

Il existe une interaction entre les proies et les prédateurs, prise en compte de la façon suivante : le taux de prédation (taux de décroissance des proies dû aux prédateurs) est supposé proportionnel au nombre de prédateurs et on remplace donc (41) par

$$\forall t \geq 0, \quad \frac{x'(t)}{x(t)} = a - by(t),$$

avec $b > 0$. De la même façon, le taux de variation du nombre de prédateurs est proportionnel à la quantité de nourriture à leur disposition, c'est-à-dire au nombre de proies et on remplace donc (42) par

$$\forall t \geq 0, \quad \frac{y'(t)}{y(t)} = -c + dx(t),$$

avec $c > 0$.

Modèle de Lotka-Volterra

Description et hypothèse du modèle

On a donc le système différentiel, dit de Lotka-Volterra, suivant :

$$x' = ax - bxy, \tag{43a}$$
$$y' = -cy + dxy, \tag{43b}$$
$$x(0) = x_0, \tag{43c}$$
$$y(0) = y_0, \tag{43d}$$

avec a, b, c, d, x_0, $y_0 > 0$.

Modèle de Lotka-Volterra

Propriété de périodicité

D'après [Via25, le Théorème 4.1], les solutions du système de Volterra-Lotka (43) sont périodiques.

Modèle de Lotka-Volterra

Champs des vitesses d'une équation différentielle autonome dans $\mathbb{R}^2$

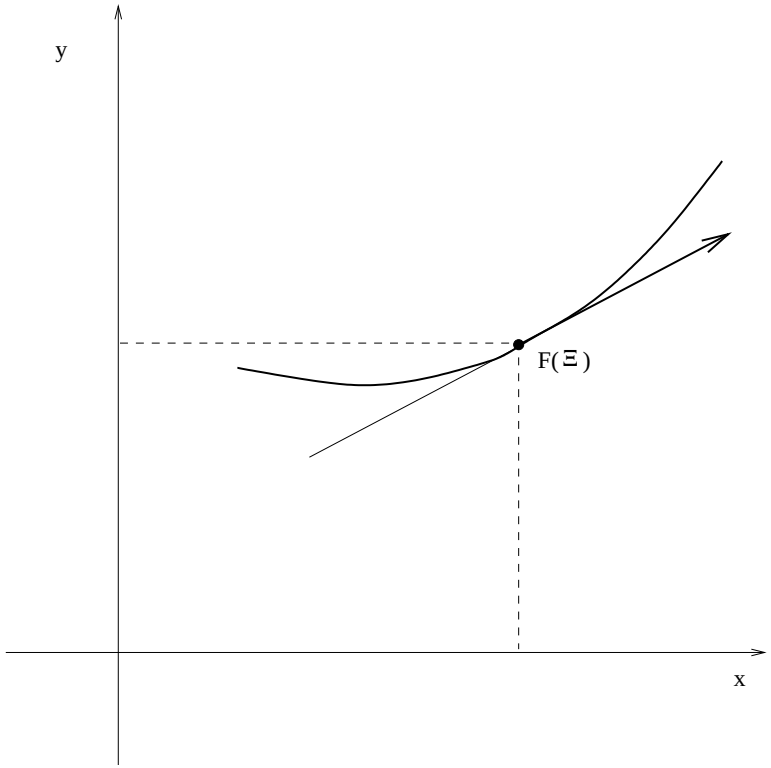
Soient F est une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ et $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ est une solution de

$$X'(t) = F(X(t)), \tag{44}$$

Alors F, est appellé le champ des vitesse vectorielle. On représente en chaque point Ξ de $\mathbb{R}^2$ le vecteur défini par $F(\Xi)$. En ce point, la trajectoire de la solution de (44) telle que $X(t) = \Xi$ est tangente à $F(\Xi)$.

Modèle de Lotka-Volterra

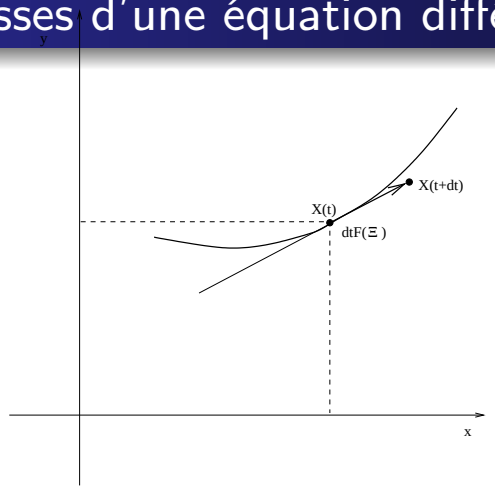
Champs des vitesses d'une équation différentielle autonome dans $\mathbb{R}^2$



En effet, en ce point, la trajectoire est tangent au vecteur vitesse $X'(t)$, égal à $F(X(t))$.

Modèle de Lotka-Volterra

Champs discret des vitesses d'une équation différentielle autonome dans $\mathbb{R}^2$



On trace un champ des vitesse discret comme le montre la figure ci-dessus. c'est-à-dire, pour dt "petit", on trace en chaque point Ξ le vecteur $dtF(\Xi)$. On passe de $X(t) = \Xi$ à $X(t + dt)$ en rajoutant à Ξ, le vecteur $dtF(\Xi)$, puisque l'on a

$$X'(t) \approx \frac{X(t + dt) - X(t)}{dt},$$

et donc $X(t + dt) = dtX'(t) + X(t)$, et d'après (44)

$$X(t + dt) \approx dtF(X(t)) + X(t). \tag{45}$$

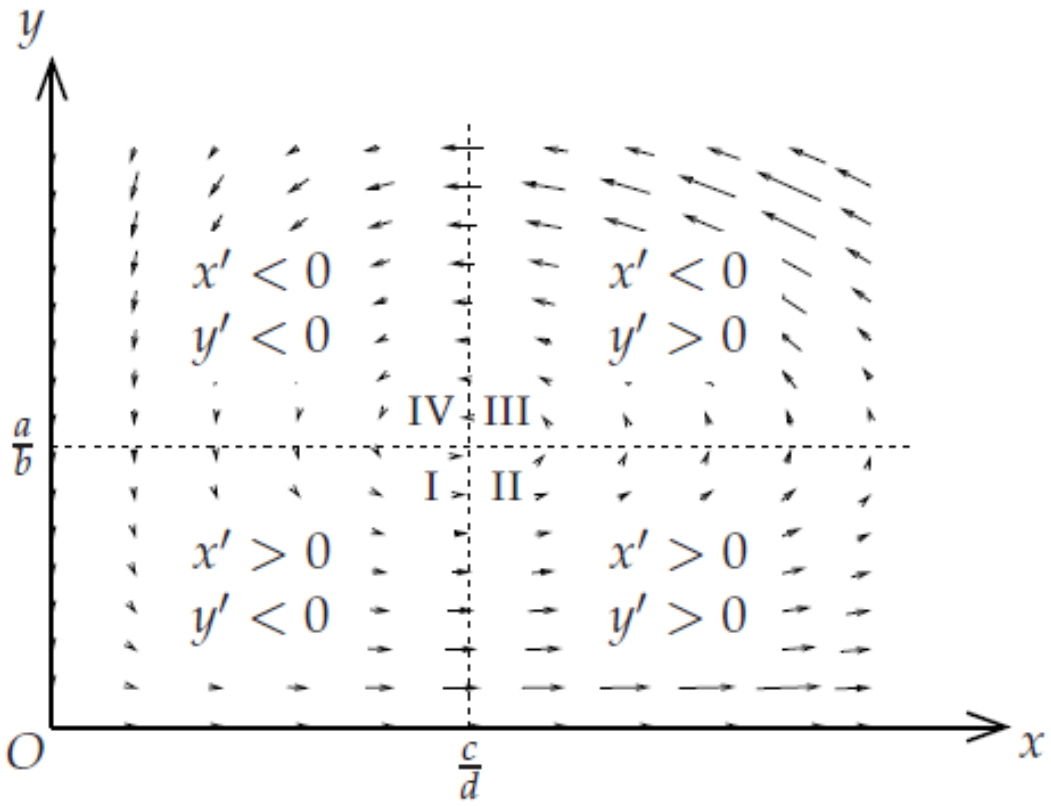
Modèle de Lotka-Volterra

Champs discret des vitesses d'un équation différentielle autonome dans $\mathbb{R}^2$

On peut donc "suivre" une trajectoire sur le champ des vitesses discret.
Notons que (45) n'est rien d'autre que le schéma numérique d'Euler explicite déjà cité qui approche l'équation différentielle (44).

Modèle de Lotka-Volterra

Champs des vitesses de l'équation différentielle de Lotka-Volterra (43a)-(43b)



Ci-dessus est reproduite la figure de [Via25, p. 8]. Il y est montré, pour établir la périodicité des solutions, que, dans le plan (x, y), on peut "suivre" une solution et revenir au point de départ. On décrit donc un cycle. Voir aussi exercice de TD 2.1 et tranparent 108.

Modèle de Lotka-Volterra

Calcul de la solution de l'équation différentielle de Lotka-Volterra (43a)-(43b)

On utilisera le schéma numérique de Runge-Kutta 4 (voir par exemple votre cours de MNB ou chapitre 5 de [DB22] et [BM03, chapitre 5]) ou la fonction de matlab `ode45` (voir le descriptif de la fonction matlab utilisée en TD, page 4 des sujets de TD).

Modèle de Lotka-Volterra

Simulation sur un exemple fictif

Choisissons arbitrairement

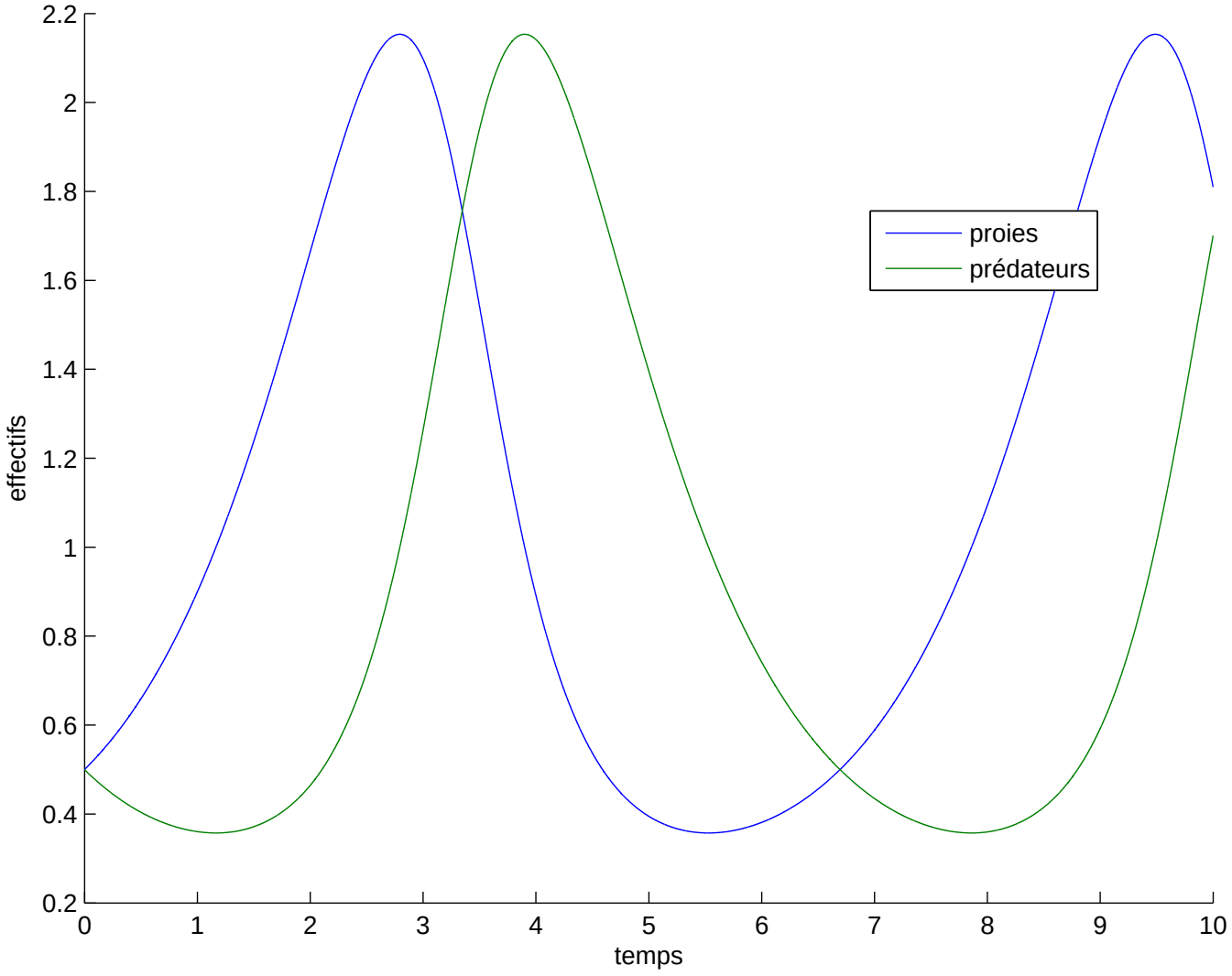
$$a = 1, \quad b = 1, \quad c = 1, \quad d = 1, \tag{46a}$$

$$x_0 = 0,50, \quad y_0 = 0,50, \tag{46b}$$

$$T = 10. \tag{46c}$$

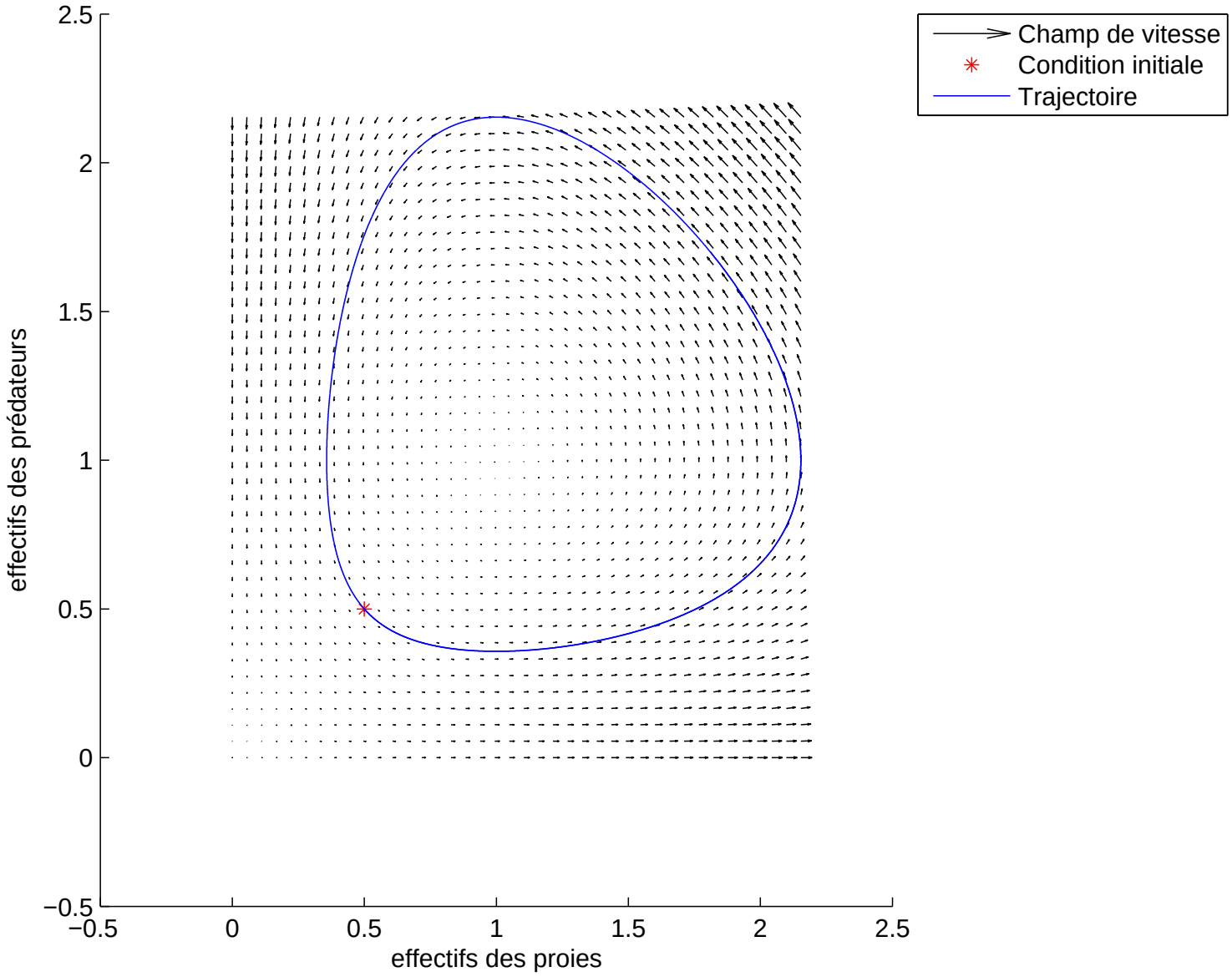
Modèle de Lotka-Volterra

Simulation sur un exemple fictif



Modèle de Lotka-Volterra

Simulation sur un exemple fictif



Modèle de Lotka-Volterra

Cycle proie/prédateur

On observe un comportement périodique avec un cycle limite. Pour chaque cycle, décrit dans le sens trigonométrique, on voit apparaître plusieurs phases (voir figure du transparent 108) ;

- Un première phase où le nombre de proies augmente beaucoup, le nombre de prédateurs étant très faible. Sans prédateurs, les proies croissent presque sans limite. Les rares prédateurs, bien alimentés, croissent doucement.

Modèle de Lotka-Volterra

Cycle proie/prédateur

On observe un comportement périodique avec un cycle limite. Pour chaque cycle, décrit dans le sens trigonométrique, on voit apparaître plusieurs phases (voir figure du transparent 108) ;

- Un première phase où le nombre de proies augmente beaucoup, le nombre de prédateurs étant très faible. Sans prédateurs, les proies croissent presque sans limite. Les rares prédateurs, bien alimentés, croissent doucement.
- Puis, une deuxième phase, où le nombre de proies, dévorées par les prédateurs assez nombreux, diminue. Chez les proies, les naissances ne permettent pas de remplacer les proies dévorés. Chez les prédateurs, c'est l'abondance à chaque repas et leur nombre continue d'augmenter, tant que les proies sont assez nombreuses.

Modèle de Lotka-Volterra

Cycle proie/prédateur

On observe un comportement périodique avec un cycle limite. Pour chaque cycle, décrit dans le sens trigonométrique, on voit apparaître plusieurs phases (voir figure du transparent 108) ;

- Un première phase où le nombre de proies augmente beaucoup, le nombre de prédateurs étant très faible. Sans prédateurs, les proies croissent presque sans limite. Les rares prédateurs, bien alimentés, croissent doucement.
- Puis, une deuxième phase, où le nombre de proies, dévorées par les prédateurs assez nombreux, diminue. Chez les proies, les naissances ne permettent pas de remplacer les proies dévorés. Chez les prédateurs, c'est l'abondance à chaque repas et leur nombre continue d'augmenter, tant que les proies sont assez nombreuses.
- À partir du moment où les proies, trop peu nombreuses, ne permettent plus aux prédateurs de croître, les effectifs de ces derniers décroissent. C'est la tristesse à chaque repas et le nombre de prédateurs diminue.

Modèle de Lotka-Volterra

Cycle proie/prédateur

On observe un comportement périodique avec un cycle limite. Pour chaque cycle, décrit dans le sens trigonométrique, on voit apparaître plusieurs phases (voir figure du transparent 108) ;

- Un première phase où le nombre de proies augmente beaucoup, le nombre de prédateurs étant très faible. Sans prédateurs, les proies croissent presque sans limite. Les rares prédateurs, bien alimentés, croissent doucement.
- Puis, une deuxième phase, où le nombre de proies, dévorées par les prédateurs assez nombreux, diminue. Chez les proies, les naissances ne permettent pas de remplacer les proies dévorés. Chez les prédateurs, c'est l'abondance à chaque repas et leur nombre continue d'augmenter, tant que les proies sont assez nombreuses.
- À partir du moment où les proies, trop peu nombreuses, ne permettent plus aux prédateurs de croître, les effectifs de ces derniers décroissent. C'est la tristesse à chaque repas et le nombre de prédateurs diminue.
- Enfin, quand il n'y a presque plus de prédateurs, les proies recommencent à croître et on repart sur la première phase du cycle.

Modèle de Lotka-Volterra

Cycle proie/prédateur

Tout cela est très bien résumé dans Wikipédia : "Dans le modèle utilisé, les prédateurs prospèrent lorsque les proies sont nombreuses, mais finissent par épuiser leurs ressources et déclinent. Lorsque la population de prédateurs a suffisamment diminué, les proies profitant du répit se reproduisent et leur population augmente de nouveau. Cette dynamique se poursuit en un cycle de croissance et déclin."

Modèle de Lotka-Volterra

Cycle proie/prédateur

Tout cela est très bien résumé dans Wikipédia : "Dans le modèle utilisé, les prédateurs prospèrent lorsque les proies sont nombreuses, mais finissent par épuiser leurs ressources et déclinent. Lorsque la population de prédateurs a suffisamment diminué, les proies profitant du répit se reproduisent et leur population augmente de nouveau. Cette dynamique se poursuit en un cycle de croissance et déclin."

De façon générale, on peut montrer (voir [Via25]) que

$$\forall t \quad x(t) > 0, \tag{47a}$$

$$\forall t \quad y(t) > 0. \tag{47b}$$

Modèle de Lotka-Volterra

Valeur moyenne de x et de y.

On définit les moyennes de x et de y sur une période $[0, T]$ comme

$$\langle x \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)dt \text{ et } \langle y \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T y(t)dt. \tag{48}$$

On peut montrer (voir par exemple [Via25, Section 4.2]) que

$$\langle x \rangle = \frac{c}{d} \text{ et } \langle y \rangle = \frac{a}{b}. \tag{49}$$

Modèle de Lotka-Volterra

Identification des paramètres sur les données historiques

Reprenons le graphique du transparent 92. Comme pour les transparents 26 et 52, on essaye d'identifier les paramètres du modèle de Lotka-Volterra, a, b, c, d, x_0 et y_0, à partir des données expérimentales.

Modèle de Lotka-Volterra

Identification des paramètres sur les données historiques

Reprenons le graphique du transparent 92. Comme pour les transparents 26 et 52, on essaye d'identifier les paramètres du modèle de Lotka-Volterra, a, b, c, d, x_0 et y_0, à partir des données expérimentales.
De nombreuses choses sont disponibles sur Internet pour cela, comme par exemple `https://math.stackexchange.com/questions/1853612/how-to-adjust-the-parameters-of-lotka-volterra-equations-to-fit-the-extremal-val` qui permet d'évaluer les paramètres à partir des mimimas et des maximas de x et de y, mais malheureusement ne respecte pas la période observée.

Modèle de Lotka-Volterra

Identification des paramètres sur les données historiques à partir de [Lob17, Section "3.2 Estimation des paramètres"]

Les données utilisées sont celles, historiques, des lièvres (proies) et des Lynxs (prédateurs) de MacLulich [Mac37], citées dans [Odu71]. Présentons la démarche que l'on a conservée, issu du travail très précis [Lob17], dont on a rappelle la méthodologie :

1. On normalise le nombre de proies et de prédateur en prenant 1 pour la valeur maximale, données respectivement pour les proies et les prédateurs par (on rappelle que les effectifs sont exprimés en milliers) :

$$x_M = 152\ 650, \tag{50a}$$

$$y_M = 79\ 350. \tag{50b}$$

Modèle de Lotka-Volterra

Identification des paramètres sur les données historiques à partir de [Lob17, Section "3.2 Estimation des paramètres"]

Les données utilisées sont celles, historiques, des lièvres (proies) et des Lynxs (prédateurs) de MacLulich [Mac37], citées dans [Odu71]. Présentons la démarche que l'on a conservée, issu du travail très précis [Lob17], dont on a rappelle la méthodologie :

1. On normalise le nombre de proies et de prédateur en prenant 1 pour la valeur maximale, données respectivement pour les proies et les prédateurs par (on rappelle que les effectifs sont exprimés en milliers) :

$$x_M = 152\ 650, \tag{50a}$$

$$y_M = 79\ 350. \tag{50b}$$

2. On force la positivité des paramètres et on interdit aux conditions initiales de dépasser 1.

Modèle de Lotka-Volterra

Identification des paramètres sur les données historiques à partir de [Lob17, Section "3.2 Estimation des paramètres"]

Les données utilisées sont celles, historiques, des lièvres (proies) et des Lynxs (prédateurs) de MacLulich [Mac37], citées dans [Odu71]. Présentons la démarche que l'on a conservée, issu du travail très précis [Lob17], dont on a rappelle la méthodologie :

1. On normalise le nombre de proies et de prédateur en prenant 1 pour la valeur maximale, données respectivement pour les proies et les prédateurs par (on rappelle que les effectifs sont exprimés en milliers) :

$$x_M = 152\ 650, \tag{50a}$$

$$y_M = 79\ 350. \tag{50b}$$

2. On force la positivité des paramètres et on interdit aux conditions initiales de dépasser 1. On émet l'hypothèse dans le modèle de Lotka-Volterra (43a)-(43b) que l'on a (51).

Modèle de Lotka-Volterra

Identification des paramètres sur les données historiques à partir de [Lob17, Section "3.2 Estimation des paramètres"]

Il est important de constater que l'hypothèse

$$b = d, \tag{51}$$

revient à dire que chaque proie dévorée permet à un prédateur de vivre.

Modèle de Lotka-Volterra

Identification des paramètres sur les données historiques à partir de [Lob17, Section "3.2 Estimation des paramètres"]

Il est important de constater que l'hypothèse

$$b = d, \tag{51}$$

revient à dire que chaque proie dévorée permet à un prédateur de vivre.
Notons aussi que la normalisation à 1 permet de donner le même poids aux proies et aux prédateurs.

Modèle de Lotka-Volterra

Identification des paramètres sur les données historiques à partir de [Lob17, Section "3.2 Estimation des paramètres"]

Il est important de constater que l'hypothèse

$$b = d, \tag{51}$$

revient à dire que chaque proie dévorée permet à un prédateur de vivre.
Notons aussi que la normalisation à 1 permet de donner le même poids aux proies et aux prédateurs.
Les données sont originalement issue de la "home page" du professeur Douglas R. Hundley (`http://people.whitman.edu/%7Ehundledr/courses/M250F03/M250.html`).

Modèle de Lotka-Volterra

Identification des paramètres sur les données historiques à partir de [Lob17, Section "3.2 Estimation des paramètres"]

Les paramètres obtenus sont les suivants

$$a = 0,734\ 545\ 7, \tag{52a}$$
$$b = d = 2,049\ 970\ 0, \tag{52b}$$
$$c = 0,598\ 414\ 3, \tag{52c}$$
$$x_0 = 0,521\ 125\ 3, \tag{52d}$$
$$y_0 = 0,443\ 812\ 2. \tag{52e}$$

Modèle de Lotka-Volterra

Identification des paramètres sur les données historiques à partir de [Lob17, Section "3.2 Estimation des paramètres"]

Attention, contrairement à ce qui est fait dans [Lob17], nous affichons les données réelles non ramenées à 1.

Modèle de Lotka-Volterra

Identification des paramètres sur les données historiques à partir de [Lob17, Section "3.2 Estimation des paramètres"]

Attention, contrairement à ce qui est fait dans [Lob17], nous affichons les données réelles non ramenées à 1.
Pour cela, on remarque que si a, b, c, d, x_0 et y_0 sont définis par (52), alors les solutions, ramenées à 1, x et y vérifient (43). Ainsi, si α et β sont des réels strictement positifs, on a

$$\begin{aligned}
(\alpha x)' &= a(\alpha x) - \frac{b}{\beta}(\alpha x)(\beta y),\\
(\beta y)' &= -c(\beta y) + \frac{d}{\alpha}(\alpha x)(\beta y),\\
(\alpha x)(0) &= \alpha x_0,\\
(\beta y)(0) &= \beta y_0.
\end{aligned}$$

En considérant $\alpha = x_M$ et $\beta = y_M$, définis par (50), il suffit donc de remplacer b par b/β, d par d/α, x_0 par αx_0 et y_0 par βx_0.

Modèle de Lotka-Volterra

Identification des paramètres sur les données historiques à partir de [Lob17, Section "3.2 Estimation des paramètres"]

Les paramètres obtenus sont finalement les suivants

$$a = 0,734\ 545\ 7, \tag{53a}$$

$$b = d = 2,583\ 453\ 056 \times 10^{-5}, \tag{53b}$$

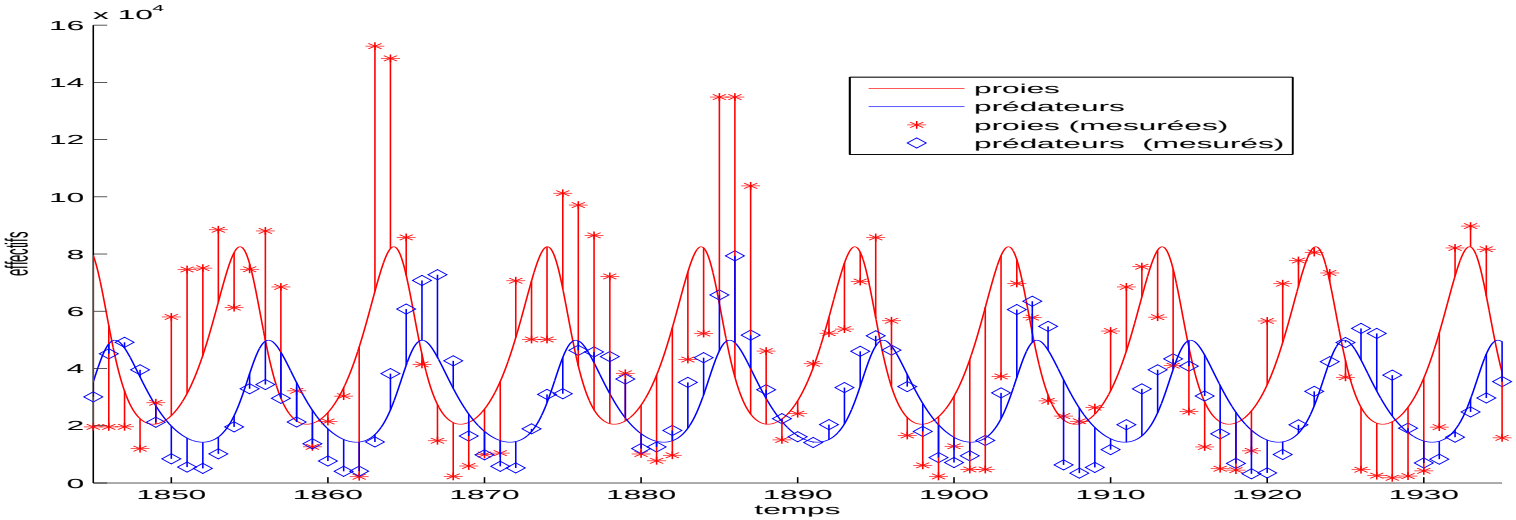
$$c = 0,598\ 414\ 3, \tag{53c}$$

$$x_0 = 79\ 549,777\ 045\ 0, \tag{53d}$$

$$y_0 = 35\ 216,498\ 070\ 0. \tag{53e}$$

Modèle de Lotka-Volterra

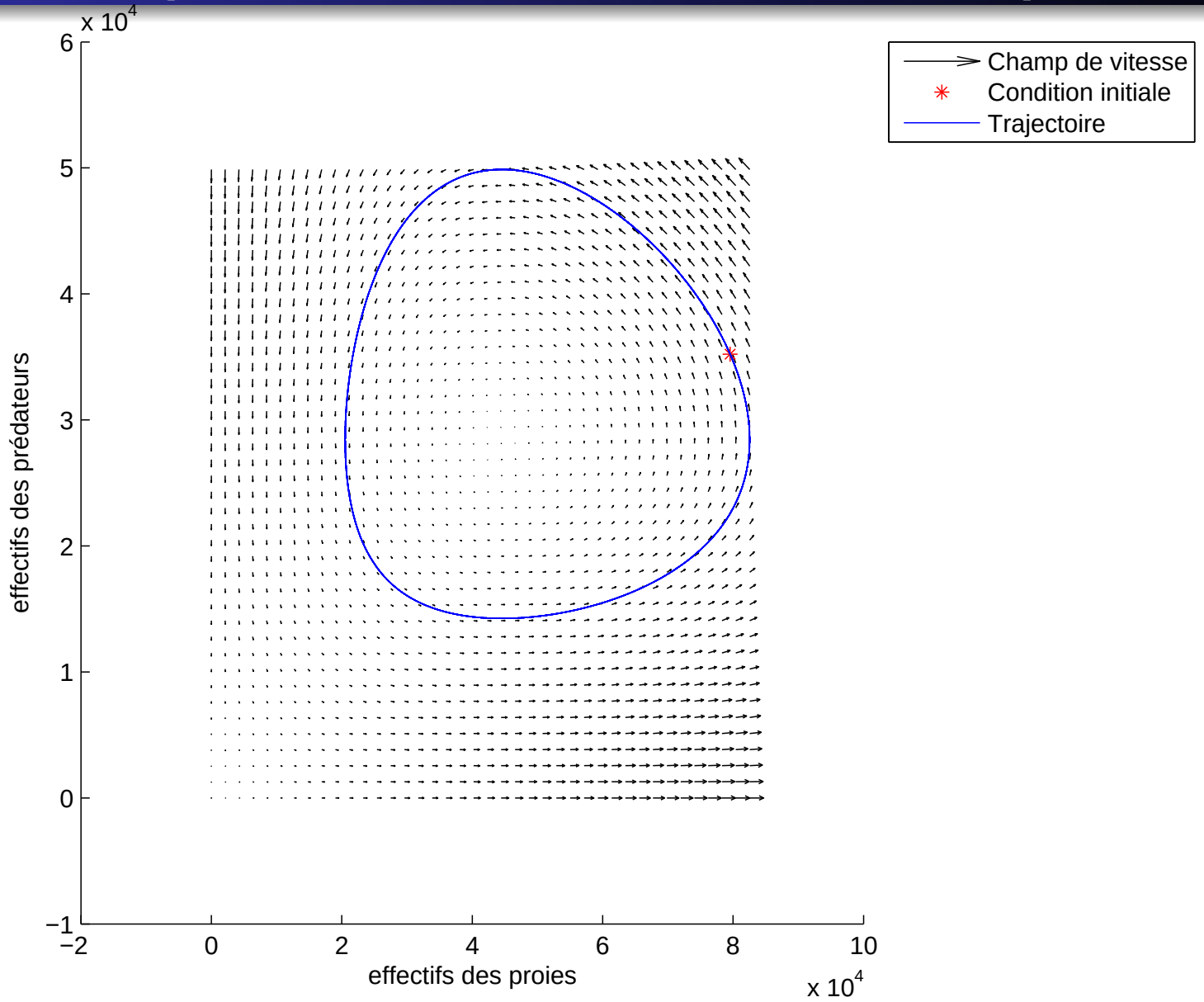
Courbe obtenue dans [Lob17, Section "3.2 Estimation des paramètres"]



Cette figure n'a pas les mêmes échelles que celle de la [Lob17, p. 24].

Modèle de Lotka-Volterra

Courbe obtenue dans [Lob17, Section "3.2 Estimation des paramètres"]



Modèle de Lotka-Volterra

Prise en compte de seuil

Changeons les conditions initiales (53d) et (53e) et remplaçons-les par

$$x_0 = 152\ 650, \tag{54a}$$

$$y_0 = 8. \tag{54b}$$

On obtient les effectifs minimaux :

$$n_x = 0,742\ 032\ 4, \tag{55a}$$

$$n_y = 3,023. \tag{55b}$$

Modèle de Lotka-Volterra

Prise en compte de seuil

Les valeurs minimales données par (55) sont trop faibles !

Modèle de Lotka-Volterra

Prise en compte de seuil

Les valeurs minimales données par (55) sont trop faibles !
D'une part, on n'est plus en mesure d'utiliser les dérivées de valeurs discrètes (voir transparent 11). D'autre part, si le nombre de proies ou de prédateurs est plus petit qu'un certain seuil, les populations ne peuvent plus se reproduire, ce qui revient à supposer qu'elles s'éteignent.

Modèle de Lotka-Volterra

Prise en compte de seuil

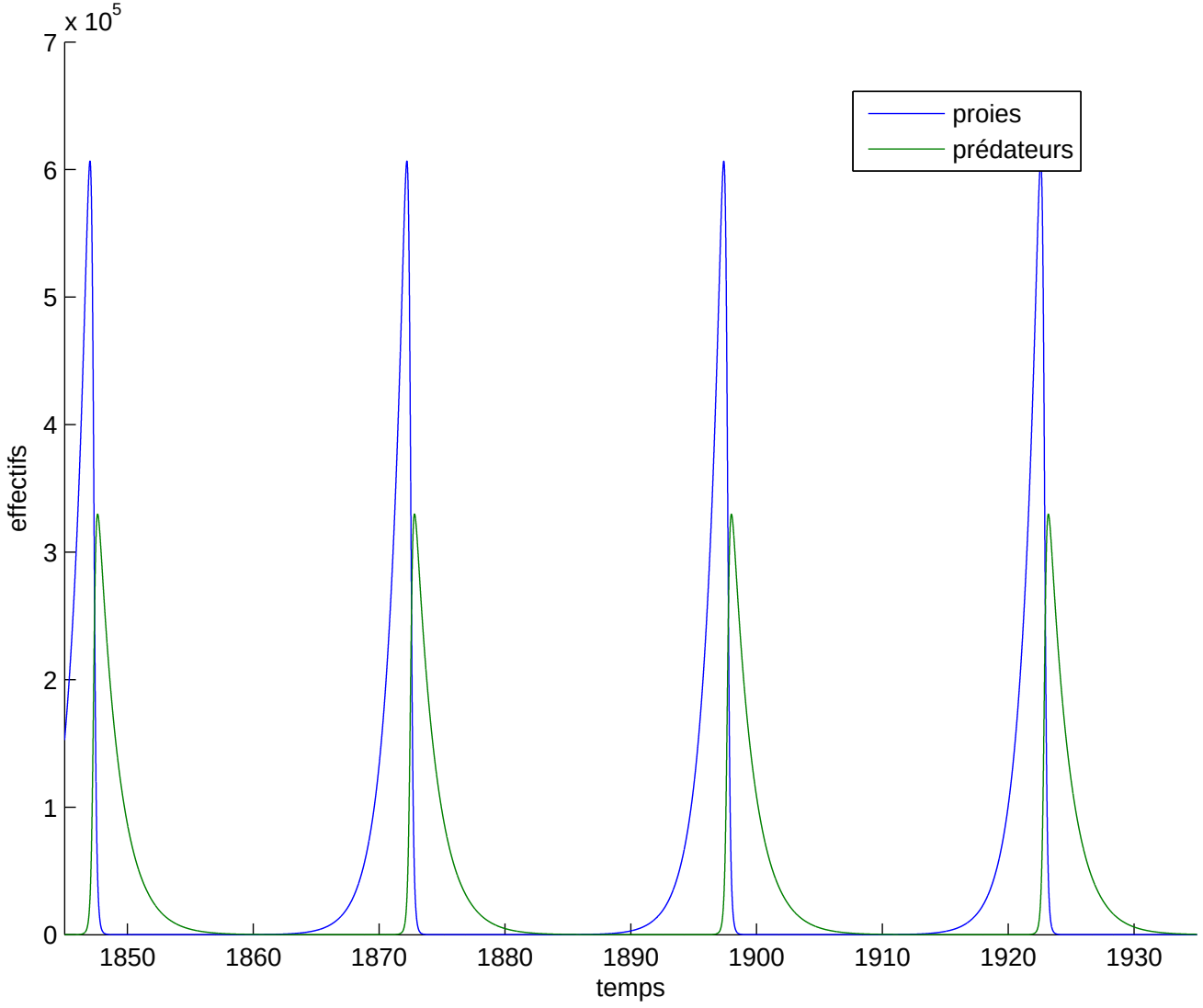
Les valeurs minimales données par (55) sont trop faibles !
D'une part, on n'est plus en mesure d'utiliser les dérivées de valeurs discrètes (voir transparent 11). D'autre part, si le nombre de proies ou de prédateurs est plus petit qu'un certain seuil, les populations ne peuvent plus se reproduire, ce qui revient à supposer qu'elles s'éteignent.
En étudiant les graphiques des transparents suivants, on est donc amené à conclure, qu'en-deçà du seuil donné par exemple par

$$s = 1, \tag{56}$$

les effectifs sont en fait nuls.

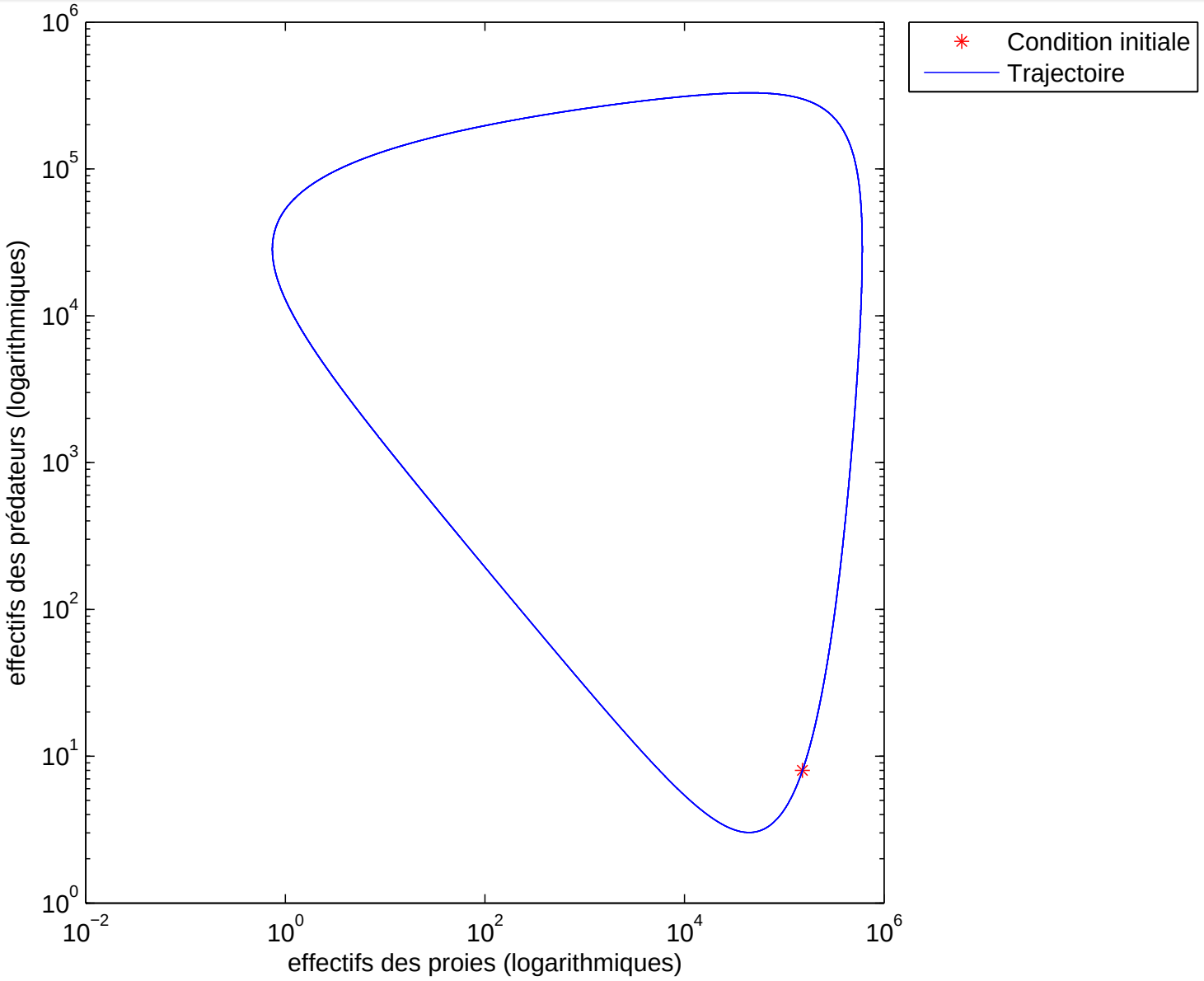
Modèle de Lotka-Volterra

Prise en compte de seuil



Modèle de Lotka-Volterra

Prise en compte de seuil



Modèle de Lotka-Volterra

Prise en compte de seuil

On peut donc traiter *a posterori* les effectifs et décréter, qu'en deçà du seuil donné par (56), les effectifs sont nuls.

Modèle de Lotka-Volterra

Prise en compte de seuil

On peut donc traiter *a posterori* les effectifs et décréter, qu'en deçà du seuil donné par (56), les effectifs sont nuls.
On peut aussi remplacer les équations (43a) et (43b) par

$$x' = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq s \text{ (plus de proies)}, \\ \begin{cases} ax, & \text{si } x > s \text{ et } y \leq s \text{ (proies mais plus de prédateurs)}, \\ ax - bxy, & \text{si } x > s \text{ et } y > s \text{ (proies et prédateurs)}, \end{cases} \end{cases}, \tag{57a}$$

$$y' = \begin{cases} 0, & \text{si } y \leq s \text{ (plus de prédateurs)}, \\ \begin{cases} -cy, & \text{si } y > s \text{ et } x \leq s \text{ (prédateurs mais plus de proies)}, \\ -cy + dxy, & \text{si } y > s \text{ et } x > s \text{ (proies et prédateurs)}, \end{cases} \end{cases} \tag{57b}$$

Modèle de Lotka-Volterra

Prise en compte de seuil

Voir les graphiques suivants (obtenus de façon numérique) qui montrent que les solutions ne sont plus périodiques.
De plus,

- à partir de $t \geq 1\,850,817$, x devient inférieur à s et la population des proies s'éteint

Modèle de Lotka-Volterra

Prise en compte de seuil

Voir les graphiques suivants (obtenus de façon numérique) qui montrent que les solutions ne sont plus périodiques.
De plus,

- à partir de $t \geq 1\,850,817$, x devient inférieur à s et la population des proies s'éteint
- à partir de $t \geq 1\,868,999$, y devient inférieur à s et la population des prédateurs s'éteint à son tour.

Modèle de Lotka-Volterra

Prise en compte de seuil

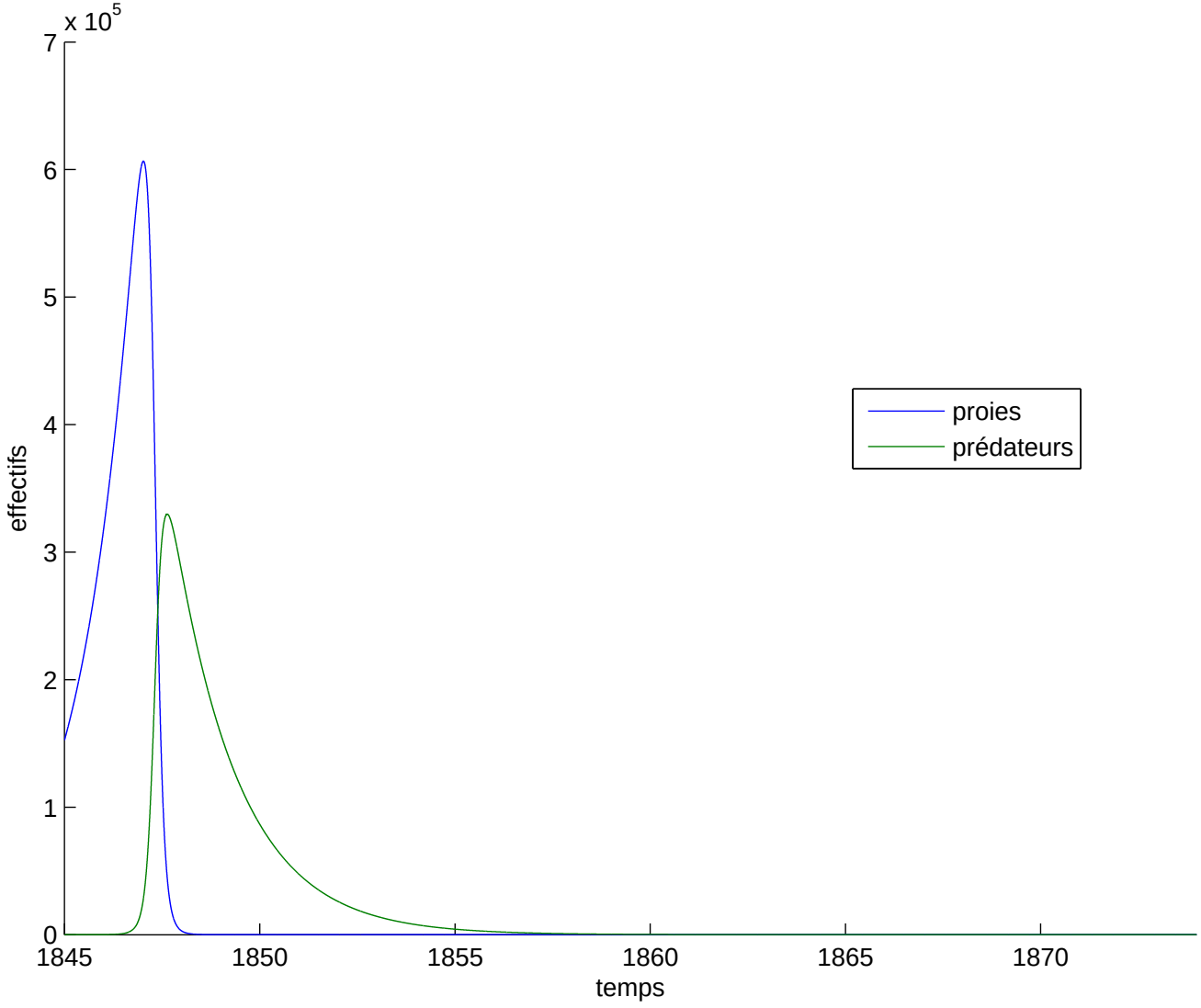
Voir les graphiques suivants (obtenus de façon numérique) qui montrent que les solutions ne sont plus périodiques.
De plus,

- à partir de $t \geq 1\,850,817$, x devient inférieur à s et la population des proies s'éteint
- à partir de $t \geq 1\,868,999$, y devient inférieur à s et la population des prédateurs s'éteint à son tour.

Voir l'exercice de TD 2.2.

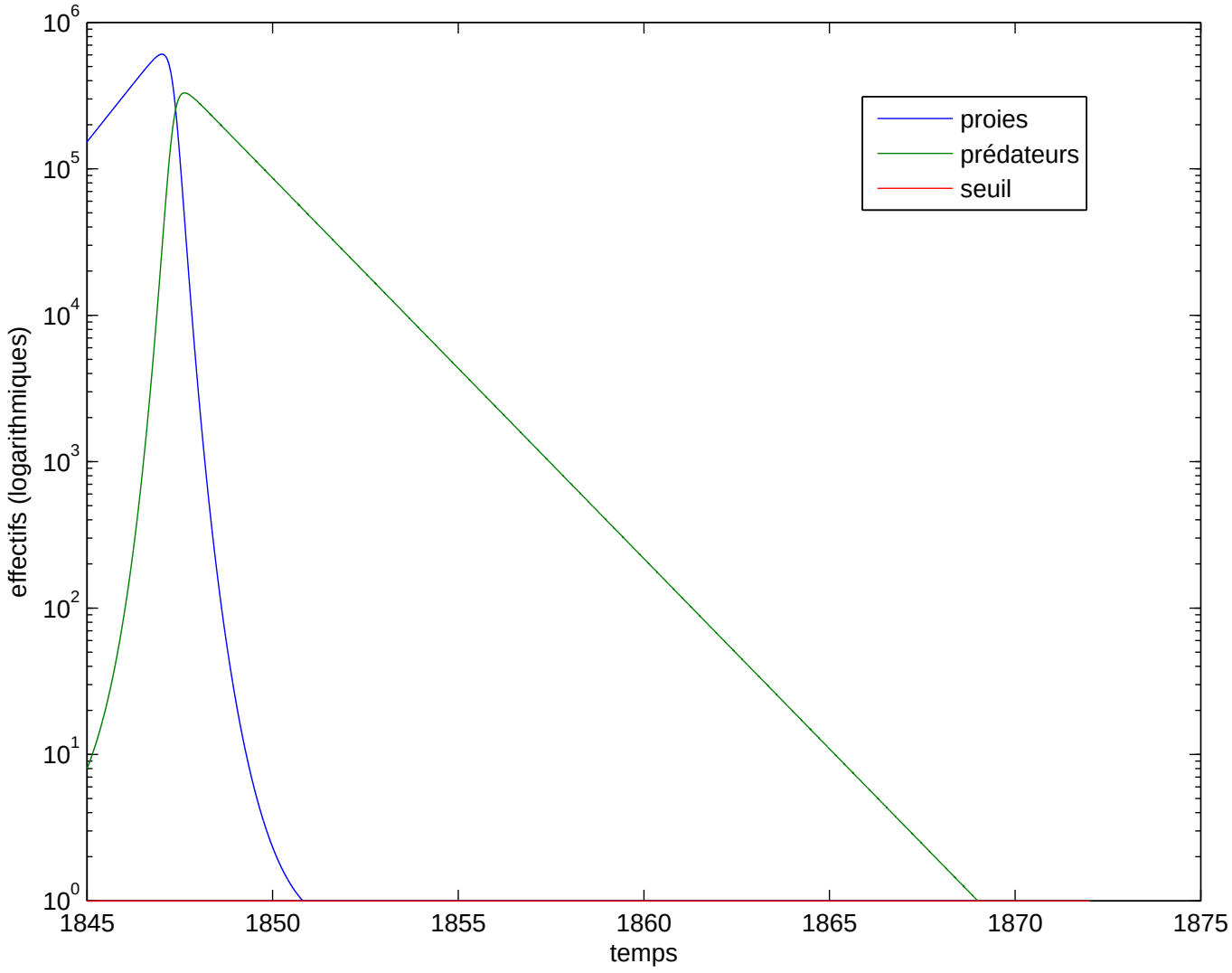
Modèle de Lotka-Volterra

Prise en compte de seuil



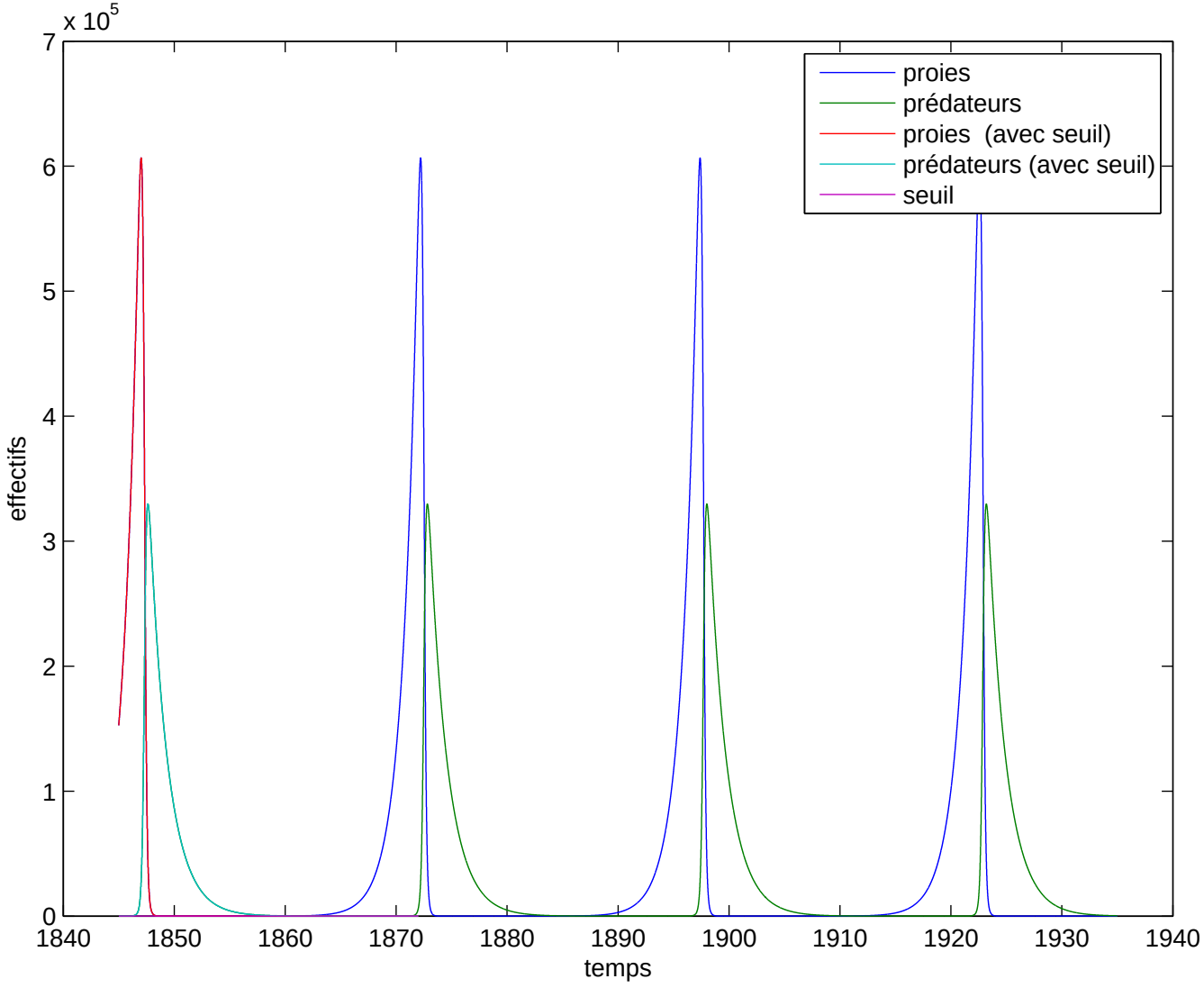
Modèle de Lotka-Volterra

Prise en compte de seuil



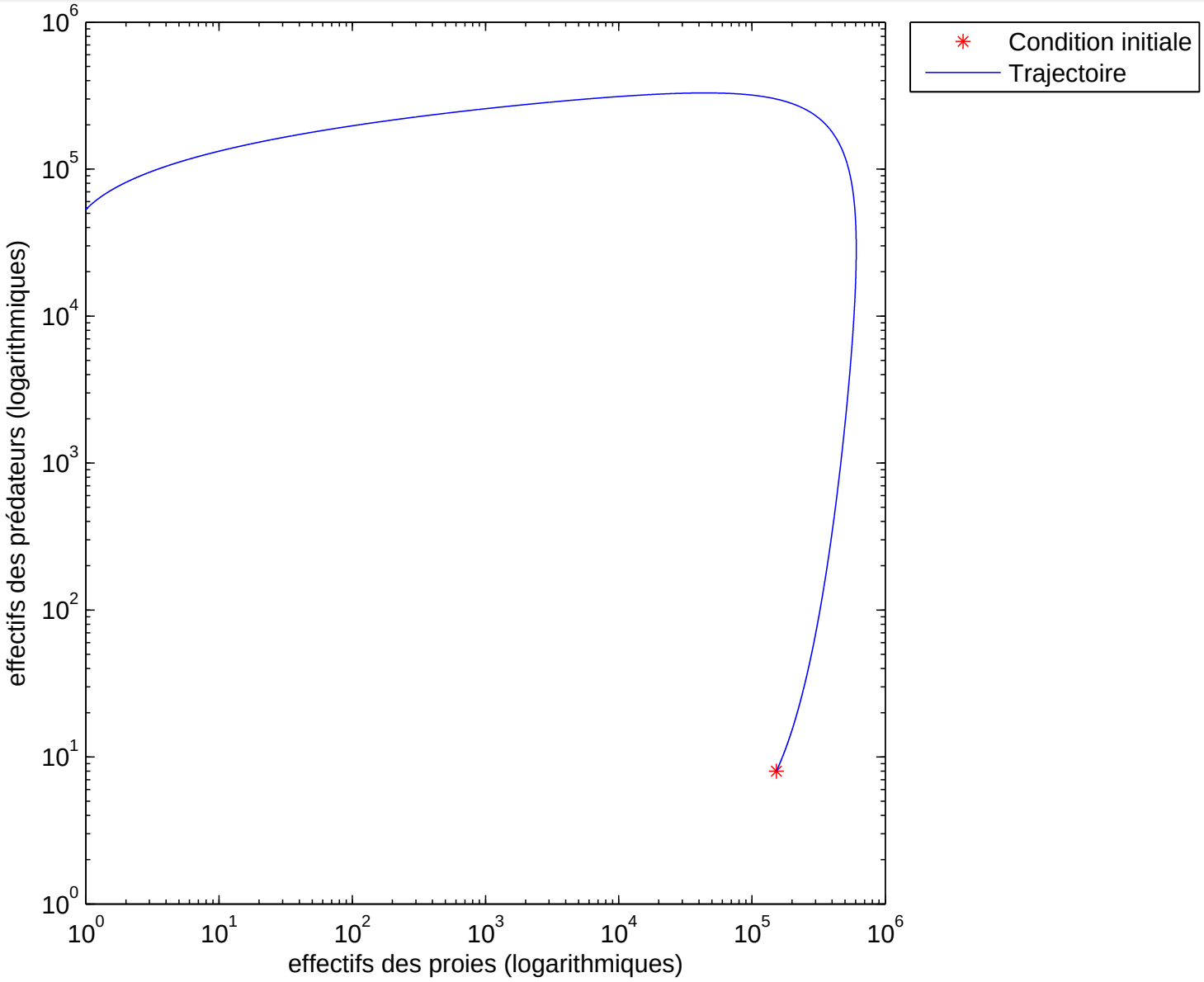
Modèle de Lotka-Volterra

Prise en compte de seuil



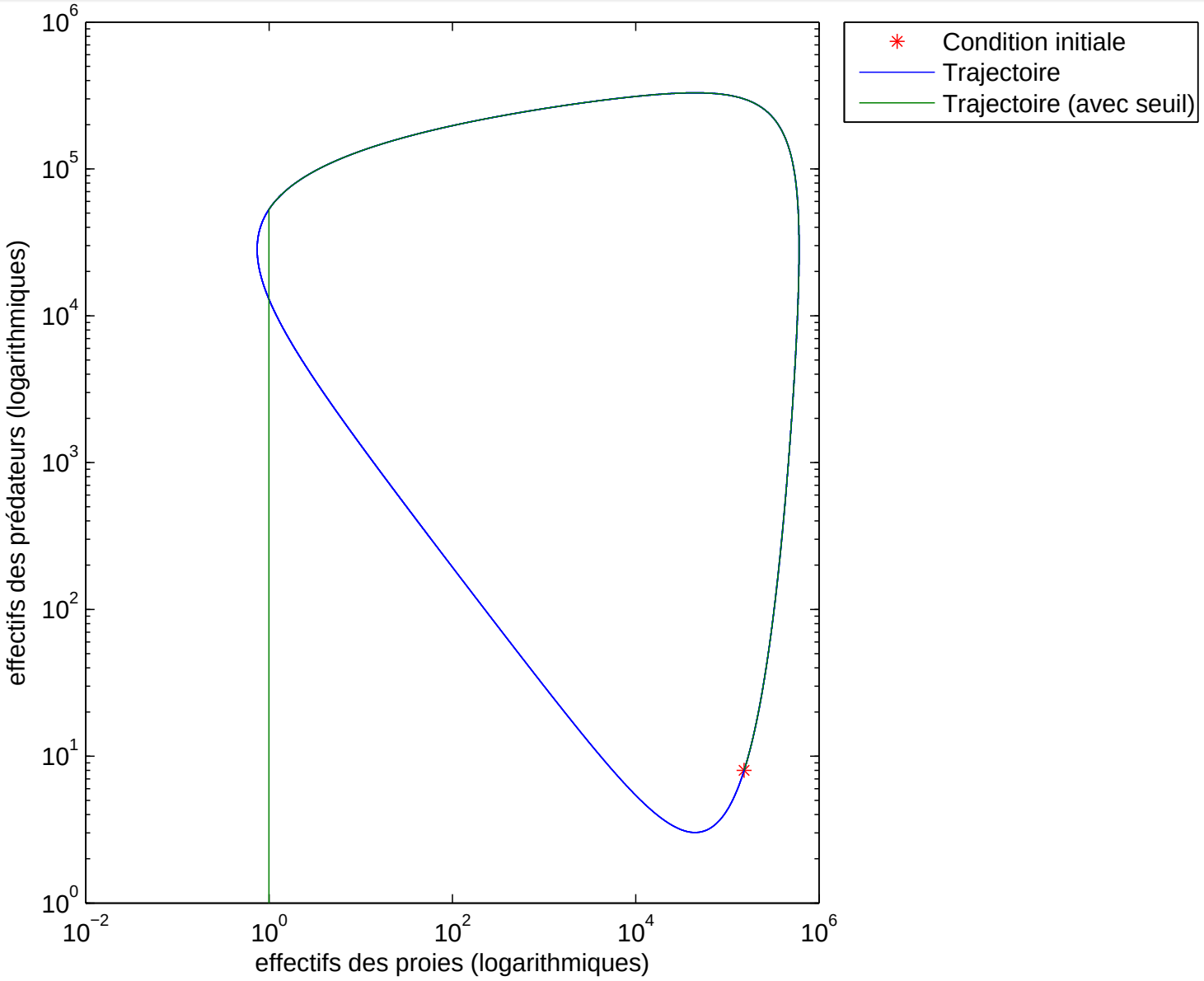
Modèle de Lotka-Volterra

Prise en compte de seuil



Modèle de Lotka-Volterra

Prise en compte de seuil



Variantes du modèle de Lotka-Volterra

Croissance logistique

En cours de rédaction

La principale critique du modèle de Lotka-Voltera est la possibilité d'une croissance infinie des proies en cas d'extinction des prédateurs. Ainsi, ...

Variantes du modèle de Lotka-Volterra

Croissance logistique

en reprenant l'idée de Vehuslt (équation (14)), on limite la croissance des proies, et on obtient le système différentiel, dit de Lotka-Volterra avec croissance logistique, suivant :

$$x' = ax\left(1 - \frac{x}{K}\right) - bxy, \tag{58a}$$

$$y' = -cy + dxy, \tag{58b}$$

$$x(0) = x_0, \tag{58c}$$

$$y(0) = y_0, \tag{58d}$$

avec $K > 0$, a, b, c, d, x_0, $y_0 > 0$.

Variantes du modèle de Lotka-Volterra

Croissance logistique

en reprenant l'idée de Vehuslt (équation (14)), on limite la croissance des proies, et on obtient le système différentiel, dit de Lotka-Volterra avec croissance logistique, suivant :

$$x' = ax\left(1 - \frac{x}{K}\right) - bxy, \tag{58a}$$

$$y' = -cy + dxy, \tag{58b}$$

$$x(0) = x_0, \tag{58c}$$

$$y(0) = y_0, \tag{58d}$$

avec $K > 0$, a, b, c, d, x_0, $y_0 > 0$. On traitera les exercices de TD 2.3 et 2.2.

Modèle de Lotka-Volterra

Variante logistique

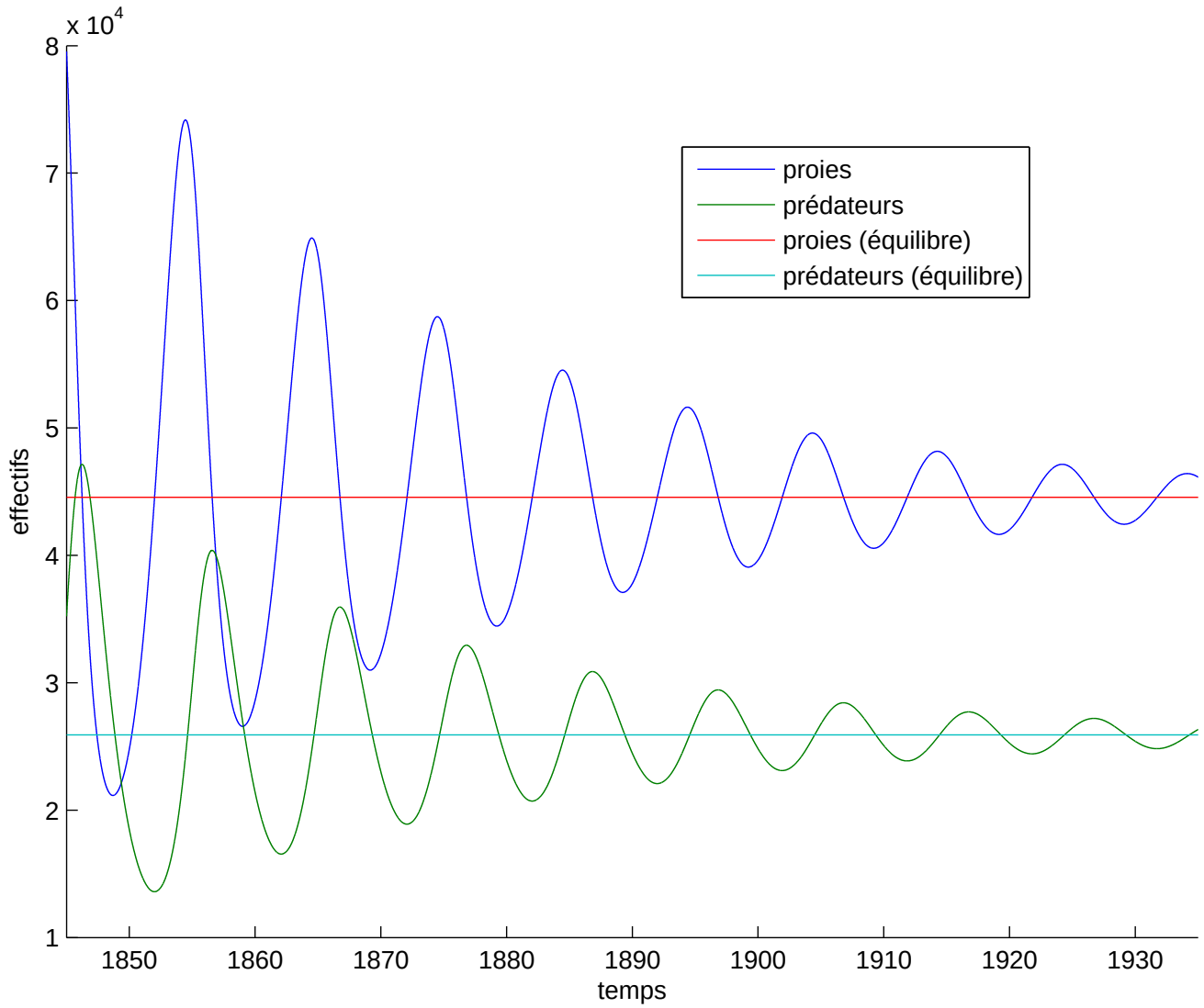
On reprend les paramètres donnés par (53a), (53b), (53c), (54a) et (54b) avec une capacité de chargé donnée par

$$K = 5 \times 10^5. \tag{59}$$

Voir les simulations des transparents 134 et 135 à comparer avec celles des transparents 118 et 119.

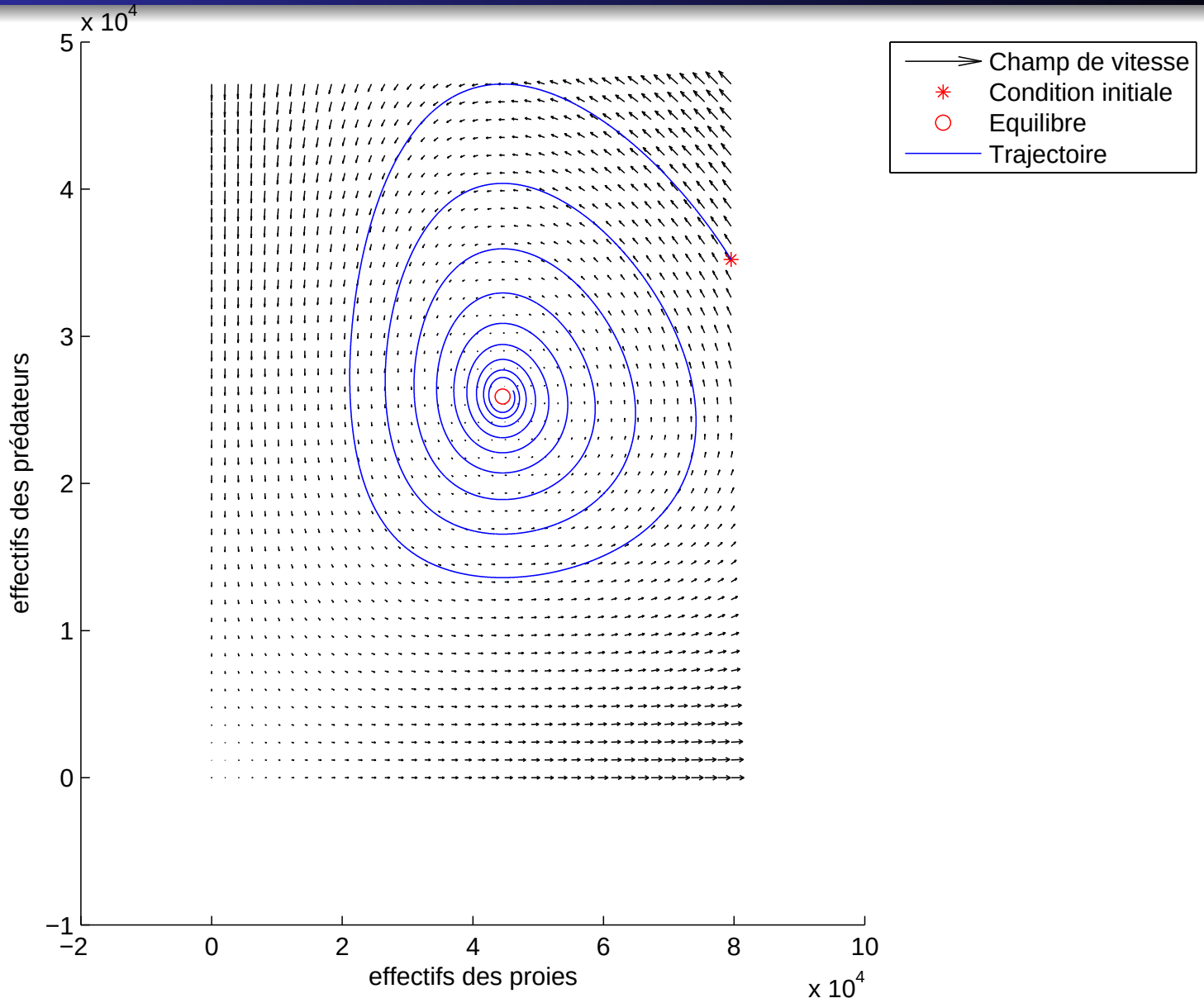
Modèle de Lotka-Volterra

Variante logistique : simulations numériques



Modèle de Lotka-Volterra

Variante logistique : simulations numériques



Modèle de Lotka-Volterra

Variante logistique : multiplicité des situations

Contrairement au modèle de base de Lotka-Volterra, les solutions ne sont plus périodiques et apparaissent des points d'équilibre avec différents scénérios possibles sur les extinctions ou cohabitations des espèces. Voir transparent 143.

ariantes du modèle de Lotka-Volterra

Variante logistique et effets de la pêche

On pourra aussi consulter les exercices de TD 2.3 et 2.4.

Variantes du modèle de Lotka-Volterra

Croissance logistique et prise en compte de seuil

On pourrait faire un mixte des transparents 124 et 132 et obtenir le modèle de Lotka-Volterra avec croissance logistique et prise en compte de seuil, suivant :

$$x' = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq s \text{ (plus de proies)}, \\ \begin{cases} ax(1 - x/K), & \text{si } x > s \text{ et } y \leq s \text{ (proies mais plus de préd.)}, \\ ax(1 - x/K) - bxy, & \text{si } x > s \text{ et } y > s \text{ (proies et prédateurs)}, \end{cases} \end{cases}, \tag{60a}$$

$$y' = \begin{cases} 0, & \text{si } y \leq s \text{ (plus de prédateurs)}, \\ \begin{cases} -cy, & \text{si } y > s \text{ et } x \leq s \text{ (prédateurs mais plus de proies)}, \\ -cy + dxy, & \text{si } y > s \text{ et } x > s \text{ (proies et prédateurs)}, \end{cases} \end{cases} \tag{60b}$$

Modèle de Lotka-Volterra

Conclusion sur les préoccupations "DDRS" en Haute-Adriatique

Ce modèle est relativement simple mais il détient en lui plusieurs choses importante :

- la préoccupation déjà environnementale de comprendre ce qui se passe au sein des deux espèces [Via25 ; Lob17] ;

Modèle de Lotka-Volterra

Conclusion sur les préoccupations "DDRS" en Haute-Adriatique

Ce modèle est relativement simple mais il détient en lui plusieurs choses importante :

- la préoccupation déjà environnementale de comprendre ce qui se passe au sein des deux espèces [Via25 ; Lob17] ;
- une volonté de modélisation plus précise que les modèles de Malthus et de Verhulst pour rendre compte du vivant [Vol31 ; DAn26] ;

Modèle de Lotka-Volterra

Conclusion sur les préoccupations "DDRS" en Haute-Adriatique

Ce modèle est relativement simple mais il détient en lui plusieurs choses importante :

- la préoccupation déjà environnementale de comprendre ce qui se passe au sein des deux espèces [Via25 ; Lob17] ;
- une volonté de modélisation plus précise que les modèles de Malthus et de Verhulst pour rendre compte du vivant [Vol31 ; DAn26] ;
- une modèle couplé entre deux espèces, que l'on peut généraliser, comme le montre la suite (transparent 140).

Prospective démographique

Dynamique des population et d'autres types de modèles

Voir `https://fr.wikipedia.org/wiki/Dynamique_des_populations` **et**

`https://fr.wikipedia.org/wiki/%C3%89quations_de_pr%C3%A9dation_de_Lotka-Volterra`

Modèle de compétition de Lotka-Volterra qui généralise le modèle de Verhulst à deux espèces (et donc aussi (58))

$$\frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 \left(1 - \frac{N_1 + \alpha_{12} N_2}{K_1}\right),$$
$$\frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 \left(1 - \frac{N_2 + \alpha_{21} N_1}{K_2}\right),$$

avec N_1 (respectivement N_2) le nombre d'individus de la première (respectivement seconde) espèce, et les taux de croissance r_1 (respectivement r_2) et capacité de charge $K_1 1$ (respectivement K_2). Le terme de compétition α_{12} représente l'effet de l'espèce 2 sur la population de l'espèce 1, et réciproquement pour α_{21}.

Prospective démographique

Dynamique des population et d'autres types de modèles

On peut considérer divers cas de signe sur r_1 et r_2 et α_{12} et α_{21}.

Prospective démographique

Dynamique des population et d'autres types de modèles

On peut considérer divers cas de signe sur r_1 et r_2 et α_{12} et α_{21}.
Généraliser à plus de deux variables.
En cours de rédaction

Prospective démographique

Dynamique des population et d'autres types de modèles

Modèle de propagation du coronavirus :

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI, \tag{61a}$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \alpha I, \tag{61b}$$

$$\frac{dR}{dt} = \alpha I. \tag{61c}$$

avec : S : "susceptible" d'être contaminés, I : les "infectés" et R : en anglais "recovered", c'est-à-dire ceux qui ont guéri.
Voir par exemple [Bac20].

Prospective démographique

Références sur la stabilité des points d'équilibre

Les différentes variantes ont un comportement avec de nombreuses possibilité sur les devenirs respectifs des populaitions et il peut être intéressant de faire des simulations en faisant varier les paramètres pour voir ce qui se passe.

Prospective démographique

Références sur la stabilité des points d'équilibre

Les différentes variantes ont un comportement avec de nombreuses possibilité sur les devenirs respectifs des populaitions et il peut être intéressant de faire des simulations en faisant varier les paramètres pour voir ce qui se passe.
Sur le plan théorique, on peut même étudier la stabilité des équilibres en étudiants le second membre (et le spectre de sa jacobienne) et exhiber différentes conditions sur les paramètres et l'étude dans le plan de phase.

Prospective démographique

Références sur la stabilité des points d'équilibre

Les différentes variantes ont un comportement avec de nombreuses possibilité sur les devenirs respectifs des populaitions et il peut être intéressant de faire des simulations en faisant varier les paramètres pour voir ce qui se passe.
Sur le plan théorique, on peut même étudier la stabilité des équilibres en étudiants le second membre (et le spectre de sa jacobienne) et exhiber différentes conditions sur les paramètres et l'étude dans le plan de phase.
On peut aussi rajouter des espèces ..... *En cours de rédaction*

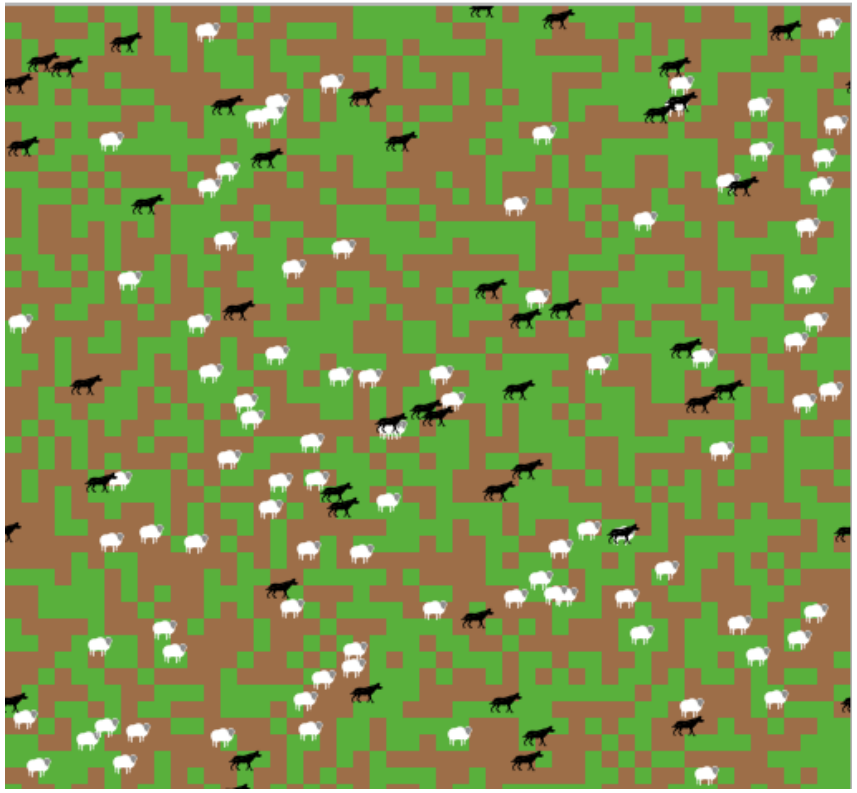
Prospective démographique

Références sur la stabilité des points d'équilibre

Les différentes variantes ont un comportement avec de nombreuses possibilité sur les devenirs respectifs des populaitions et il peut être intéressant de faire des simulations en faisant varier les paramètres pour voir ce qui se passe.
Sur le plan théorique, on peut même étudier la stabilité des équilibres en étudiants le second membre (et le spectre de sa jacobienne) et exhiber différentes conditions sur les paramètres et l'étude dans le plan de phase.
On peut aussi rajouter des espèces ..... *En cours de rédaction*
Voir par exemple [Via25 ; MBM06 ; Rai07 ; Mha22 ; Tou22].

Prospective démographique

Modélisation multi-agent



Voir [WR ; WR06 ; Wil97]

Prospective démographique

Modélisation multi-agent. Quelques règles

1. Les loups et les moutons errent au hasard dans le paysage, tandis que les loups cherchent des moutons à chasser.

Prospective démographique

Modélisation multi-agent. Quelques règles

1. Les loups et les moutons errent au hasard dans le paysage, tandis que les loups cherchent des moutons à chasser.
2. Chaque pas coûte de l'énergie aux loups, qui doivent manger des moutons pour se réapprovisionner ; lorsqu'ils sont à court d'énergie, ils meurent.

Prospective démographique

Modélisation multi-agent. Quelques règles

1. Les loups et les moutons errent au hasard dans le paysage, tandis que les loups cherchent des moutons à chasser.
2. Chaque pas coûte de l'énergie aux loups, qui doivent manger des moutons pour se réapprovisionner ; lorsqu'ils sont à court d'énergie, ils meurent.
3. Pour que la population puisse se maintenir, chaque loup ou mouton a une probabilité fixe de se reproduire à chaque pas de temps.

Prospective démographique

Modélisation multi-agent. Quelques règles

1. Les loups et les moutons errent au hasard dans le paysage, tandis que les loups cherchent des moutons à chasser.
2. Chaque pas coûte de l'énergie aux loups, qui doivent manger des moutons pour se réapprovisionner ; lorsqu'ils sont à court d'énergie, ils meurent.
3. Pour que la population puisse se maintenir, chaque loup ou mouton a une probabilité fixe de se reproduire à chaque pas de temps.
4. Dans une première variante, nous modélisons l'herbe comme "infinie" afin que les moutons aient toujours suffisamment à manger, et nous ne modélisons pas explicitement la consommation ou la croissance de l'herbe. Ainsi, les moutons ne gagnent ni ne perdent d'énergie en mangeant ou en se déplaçant. Cette variante produit une dynamique de population intéressante, mais elle est finalement instable.

Voir exercice de TD 2.5.

Prospective démographique

Modélisation multi-agent. Une variante avec une troisième espèce.

Une variante, la version "moutons-loups-herbe", modélise explicitement l'herbe (verte) en plus des loups et des moutons. Le comportement des loups est identique à la première variante, mais cette fois, les moutons doivent manger de l'herbe pour conserver leur énergie ; lorsqu'ils en manquent, ils meurent. Une fois l'herbe mangée, elle ne repousse qu'après un temps déterminé. Cette variante est plus complexe que la première, mais elle est généralement stable.

Prospective démographique

Modélisation multi-agent. Une variante avec une troisième espèce.

Une variante, la version "moutons-loups-herbe", modélise explicitement l'herbe (verte) en plus des loups et des moutons. Le comportement des loups est identique à la première variante, mais cette fois, les moutons doivent manger de l'herbe pour conserver leur énergie ; lorsqu'ils en manquent, ils meurent. Une fois l'herbe mangée, elle ne repousse qu'après un temps déterminé. Cette variante est plus complexe que la première, mais elle est généralement stable.
Elle se rapproche davantage des modèles classiques d'oscillation de population de Lotka Volterra.
Voir exercice de TD 2.5.

Sommaire

1. Modèles simples de croissance démographique (Malthus et Verhulst)
2. La transition démographique et la prospective démographique
3. Modèles à populations multiples
4. Perspectives et conclusions

Prospective démographique

Les limites à la croissance

Voir `https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Les_Limites_à_la_croissance`

Les Limites à la croissance (dans un monde fini) [Mea+72 ; Mea+12] connu sous le nom de Rapport du club de Rome, ou encore de Rapport Meadows est un rapport commandé par le club de Rome et publié en 1972.

1. Forte croissance de la population mondiale ;

13. l'analogue économique du modèle de Verhulst !

Prospective démographique

Les limites à la croissance

Voir `https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Les_Limites_à_la_croissance`

Les Limites à la croissance (dans un monde fini) [Mea+72 ; Mea+12] connu sous le nom de Rapport du club de Rome, ou encore de Rapport Meadows est un rapport commandé par le club de Rome et publié en 1972.

1. Forte croissance de la population mondiale ;
2. Croissance encore plus forte de la croissance, avec le frein de la loi des rendements décroissants [13].

13. l'analogue économique du modèle de Verhulst !

Prospective démographique

Les limites à la croissance

Voir `https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Les_Limites_à_la_croissance`

Les Limites à la croissance (dans un monde fini) [Mea+72 ; Mea+12] connu sous le nom de Rapport du club de Rome, ou encore de Rapport Meadows est un rapport commandé par le club de Rome et publié en 1972.

1. Forte croissance de la population mondiale ;
2. Croissance encore plus forte de la croissance, avec le frein de la loi des rendements décroissants [13].
3. Cela provoque l'augmentation de la pollution.

13. l'analogue économique du modèle de Verhulst !

Prospective démographique

Les limites à la croissance

Voir `https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Les_Limites_à_la_croissance`

Les Limites à la croissance (dans un monde fini) [Mea+72 ; Mea+12] connu sous le nom de Rapport du club de Rome, ou encore de Rapport Meadows est un rapport commandé par le club de Rome et publié en 1972.

1. Forte croissance de la population mondiale ;
2. Croissance encore plus forte de la croissance, avec le frein de la loi des rendements décroissants [13].
3. Cela provoque l'augmentation de la pollution.
4. Insuffisance des ressources naturelles qui ne suivent plus.

13. l'analogue économique du modèle de Verhulst !

Prospective démographique

Les limites à la croissance

Voir `https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Les_Limites_à_la_croissance`

Les Limites à la croissance (dans un monde fini) [Mea+72 ; Mea+12] connu sous le nom de Rapport du club de Rome, ou encore de Rapport Meadows est un rapport commandé par le club de Rome et publié en 1972.

1. Forte croissance de la population mondiale ;
2. Croissance encore plus forte de la croissance, avec le frein de la loi des rendements décroissants [13].
3. Cela provoque l'augmentation de la pollution.
4. Insuffisance des ressources naturelles qui ne suivent plus.
5. $\Longrightarrow$ Interdépendance de toutes ces notions et "cercles vicieux".

13. l'analogue économique du modèle de Verhulst !

Prospective démographique

Les limites à la croissance : retour aux fondamentaux !

Ce rapport se fonde sur un modèle de dynamique des systèmes (world3) dont l'évolution est simulée informatiquement pour différents scénarios.

Il n'est pas question d'étudier ce modèle très complexe mais juste d'en décrire sommairement quelques lignes, en guise de conclusion.

Perspectives

Les limites à la croissance : le modèle world 3

Voir `https://fr.m.wikipedia.org/wiki/World3`

Ce modèle est résumé dans le livre [Mea+72 ; Mea+12] et décrit précisément dans [L M+74]. Première version de 1972, puis réactualisée en 1992 et 2004 [MMR92 ; MRM04].

Perspectives

Les limites à la croissance : le modèle world 3

Voir `https://fr.m.wikipedia.org/wiki/World3`

Ce modèle est résumé dans le livre [Mea+72 ; Mea+12] et décrit précisément dans [L M+74]. Première version de 1972, puis réactualisée en 1992 et 2004 [MMR92 ; MRM04].

Il s'agit d'un ensemble d'équations différentielles liant différentes variables (315 pour la version de 2004), ces variables étant classées en secteurs et sous-secteurs, dont par exemple :

1. La population, divisées en 4 sous-secteurs ;
2. Le capital, contenant industrie, services, emplois ;
3. L'agriculture ;
4. Les ressources non renouvelables ;
5. La pollution.

Perspectives

Les limites à la croissance : le modèle world 3

Ces équations forment un vaste système différentiel du type

$$Y'(t) = F(t, Y(t)),$$

Perspectives

Les limites à la croissance : le modèle world 3

Ces équations forment un vaste système différentiel du type

$$Y'(t) = F(t, Y(t)),$$

De nombreuses des boucle de rétroaction (équation différentielle) liant les variables entre elles à la dérivée de l'une d'elles ;

Perspectives

Les limites à la croissance : le modèle world 3

Ces équations forment un vaste système différentiel du type

$$Y'(t) = F(t, Y(t)),$$

De nombreuses des boucle de rétroaction (équation différentielle) liant les variables entre elles à la dérivée de l'une d'elles ;

Par exemple :

$$R'(t) = -kP(t)C(t)$$

avec

1. R quantité de ressources naturelles disponibles ;
2. P la population humaine ;
3. C la consommation moyenne de ressources par habitant ;
4. k est un coefficient qui représente la vitesse à laquelle les ressources naturelles sont épuisées.

Perspectives

Les limites à la croissance : le modèle world 3

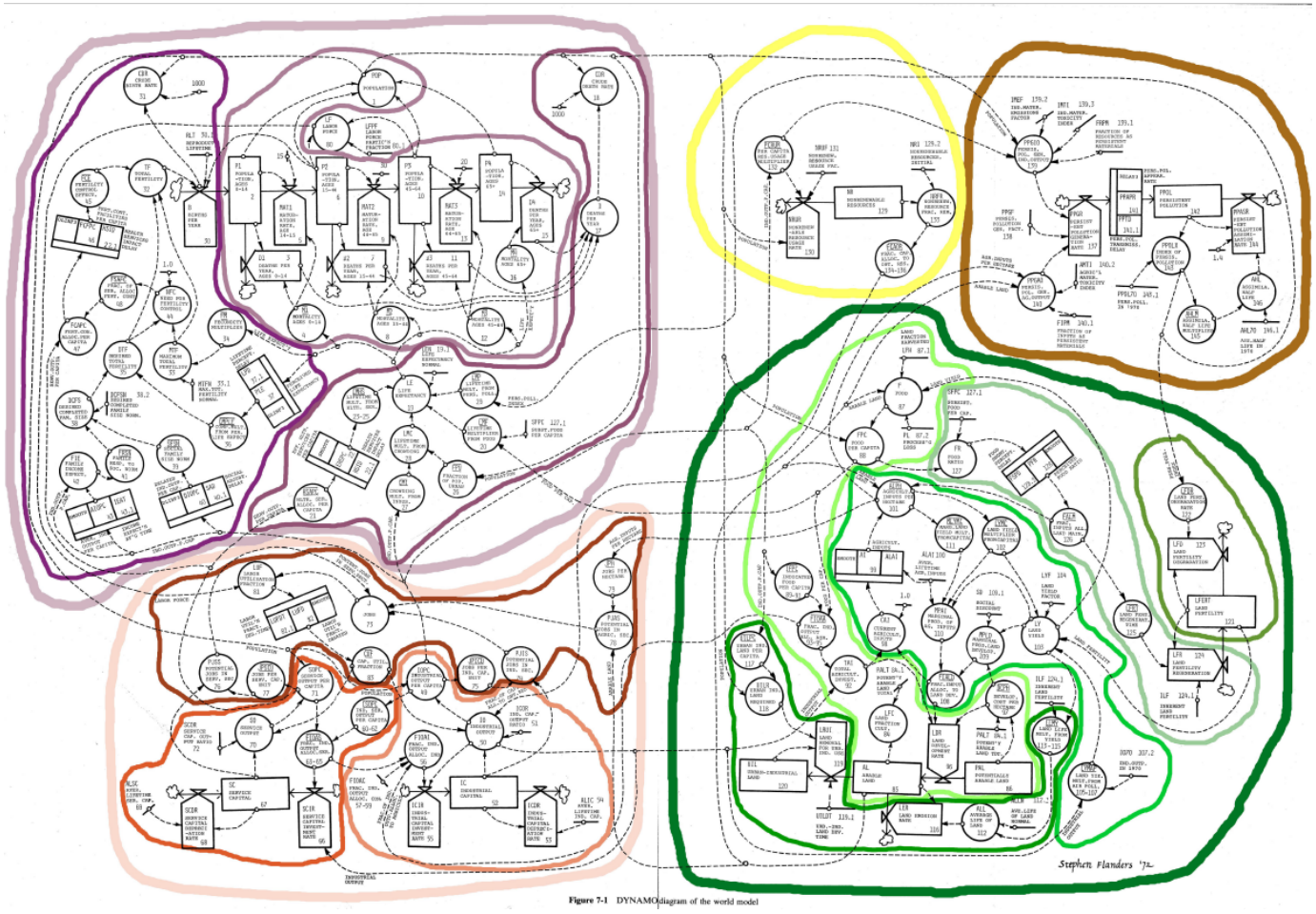
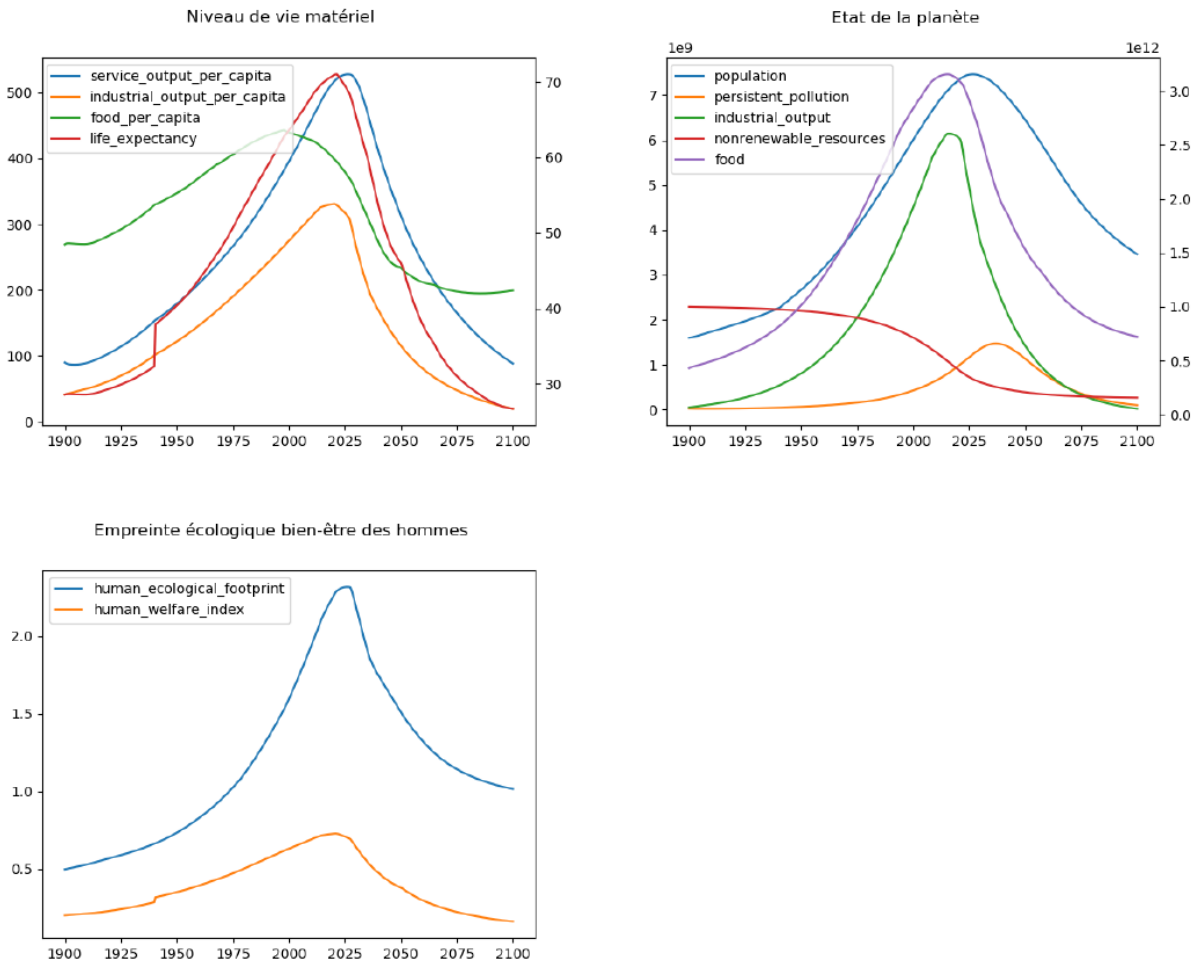


Figure 7-1 DYNAMO diagram of the world model

Liens entre les variables (Issu de [Joc19]).

Prospective démographique

Les limites à la croissance : différents scénarios du modèle world 3



Scénario 1 (scénario de référence) "Business As Usual" (voir [Gon23 ; Joc19]).

Prospective démographique

Les limites à la croissance : différents scénarios du modèle world 3

1. Scénario 2 : scénario 1 et on multiplie par deux le stock de ressources non renouvelables par rapport au Scénario 1 ;
2. Scénario 3 : on reprend le scénario 2 avec en plus des technologies de contrôle de la pollution plus performantes ;
3. Scénario 4 : on reprend le scénario 3 avec en plus des technologies améliorant les rendements agricoles.
4. Scénario 5 : on reprend le scénario 4 avec en plus une protection contre l'érosion des sols,

Prospective démographique

Les limites à la croissance : différents scénarios du modèle world 3

1. Scénario 6 : on reprend le scénario 5 avec en plus une technologie permettant l'utilisation efficiente des ressources ;
2. Scénario 7 : des mesures sont prises en 2002 pour stabiliser la population mondiale (politique de deux enfants par famille) ;
3. Scénario 8 : on reprend le scénario 7 avec en plus des mesures prises pour stabiliser la production industrielle par habitant.

Prospective démographique

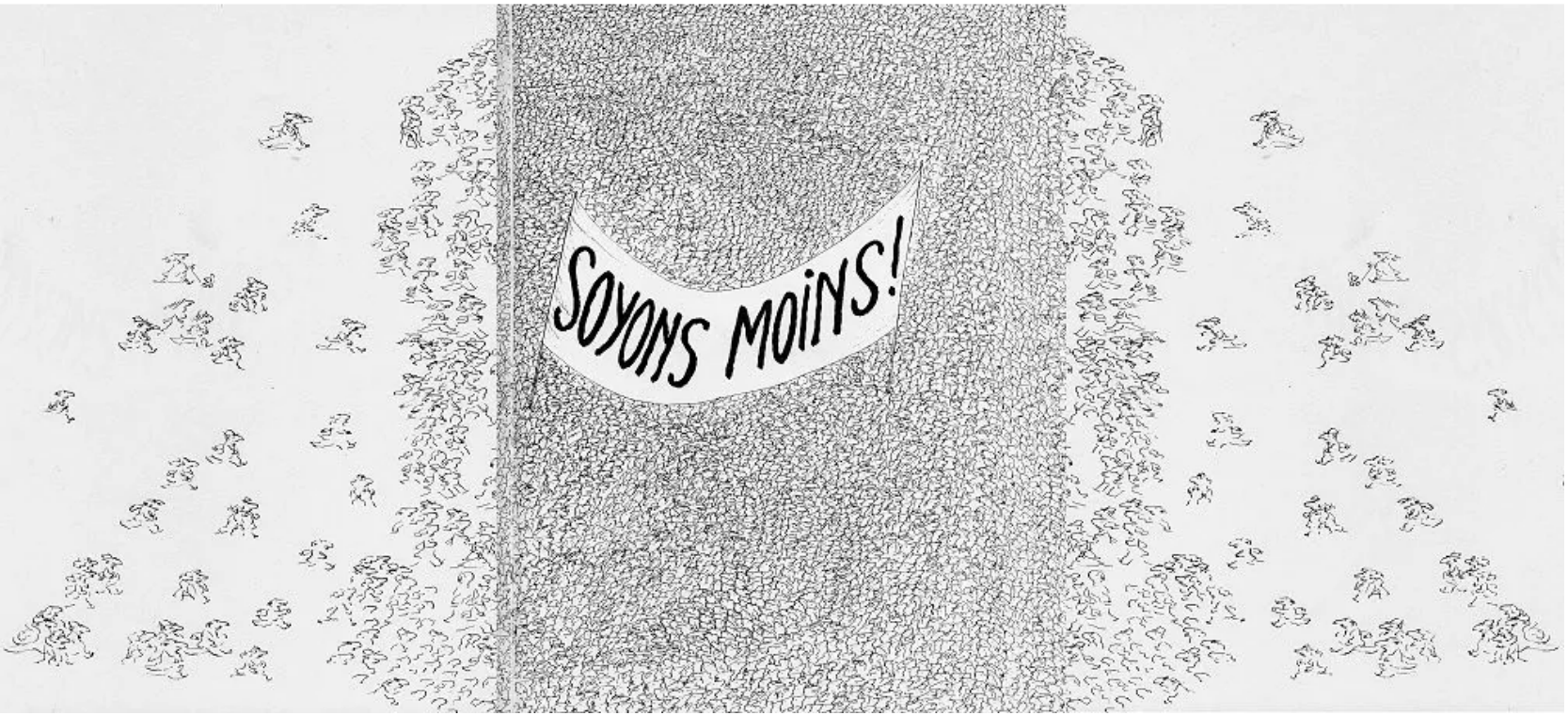
Les limites à la croissance : premières leçons

1. Les premiers scénarios provoqueraient la fin de la croissance au cours du XXIe siècle.
2. Le progrès technique ne ferait que différer l'effondrement inéluctable de l'écosystème mondial, incapable de supporter cette croissance exponentielle.
3. Les autres scénarios ne mènent pas un effondrement. Ce sont ceux qui abandonnent la recherche d'une croissance exponentielle sans limite de la production.

Et pour finir ...

Un dessin de Sempé

Et pour finir ...



https://ddotb.wordpress.com/2008/11/01/sempe-soyons-moins/

N. Bacaër. *Un modèle mathématique des débuts de l'épidémie de coronavirus en France*. hal-02509142v5 dans HAL. disponible sur https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02509142v5. 2020.

J.-L. Bantignies. *Anthropocène*. Formation des formateurs Polytech, Lyon 2023. 2023.

J. Bastien. *Mathématiques Fondamentales pour l'Informatique.* Notes de cours de l'UV MFI (Département Informatique) de Polytech Lyon, disponible sur le web : http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html, rubrique "Informatique 3A : Mathématiques Fondamentales pour l'Informatique". 2022. 270 pages.

J. Bastien. *Mathématiques Fondamentales pour l'Informatique.* Travaux Dirigés de l'UV MFI (Département Informatique) de Polytech Lyon, disponible sur le web : http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html, rubrique "Informatique 3A : Mathématiques Fondamentales pour l'Informatique". 2022. 39 pages.

J. Bastien. *Mathématiques Fondamentales pour l'Ingénieur.* Notes de cours de l'UV MFImater (Département Matériaux) de Polytech Lyon, disponible sur le web :

http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html, rubrique "Matériaux 3A : Mathématiques Fondamentales pour l'Ingénieur". 2022. 127 pages.

J. Bastien. *Mathématiques Fondamentales pour l'Ingénieur.* Travaux Dirigés de l'UV MFImater (Département Matériaux) de Polytech Lyon, disponible sur le web : http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html, rubrique "Matériaux 3A : Mathématiques Fondamentales pour l'Ingénieur". 2022. 27 pages.

J. Bastien et J.-N. Martin. *Introduction à l'analyse numérique. Applications sous Matlab*. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 519.4 BAS, 4e étage). Voir https://www.dunod.com/sciences-techniques/introduction-analyse-numerique-applications-sous-matlab. Paris : Dunod, 2003. 392 pages.

M. Crouzeix et A. L. Mignot. *Analyse numérique des équations différentielles*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree]. Masson, Paris, 1984, pages viii+171.

U. D'Ancona. *Dell'influenza della stasi peschereccia del periodo 1914-1918 sul patrimonio ittico dell'alto Adriatico*. Regio Comitato Talassografico Italiano, 126. 1926.

N. Débit et J. Bastien. *Méthodes numériques de base.* Notes de cours de l'UV MNB (Département Matériaux) de Polytech Lyon, disponible sur le web : `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`, rubrique "Matériaux 3A : Méthodes Numériques de Base". 2022. 326 pages.

P. Finaud-Guyot, J.-L. Bantignies et P. Papet. "Introduction aux enjeux de transition pour l'ingénieur". Recueil d'exercices corrigés, hal-03941536, disponible sur https ://hal.science/hal-03941536. Polytech Montpellier, France, 2023.

A. Gondran. *Le rapport Meadows, 50 ans plus tard, 50 ans trop tard ?* Présentation au 24e congrès annuel de la Société Française de Recherche Opérationnelle et d'Aide à la Décision, disponible sur hal-04010564. Fév. 2023.

M. Jochaud Du Plessix. *Analyse du modèle World3 : sensibilité, dynamique, et pistes d'évolution. Modélisation et simulation*. Disponible sur hal-02434683. 2019.

D. L. Meadows, W. W. Behrens, D. H. Meadows, R. F. Naill, J. Randers et E. K. Zahn. *Dynamics of Growth in a Finite World*. Wright-Allen Press, 1974.

J. R. Lobry. *Fiche TD avec le logiciel R : tdr4a, Ajustement au modèle de Lotka-Volterra*. Disponible sur http://pbil.univ-lyon1.fr/R/pdf/tdr4a.pdf. 2017.

D. MacLulich. *Fluctuations in numbers of the varying hare (Lepus americanus)*. Biological series, no. 43, disponible sur https://www.jstor.org/stable/10.3138/j.ctvfrxkmj. University of Toronto Press., 1937.

J. Mathieu. *La dynamique des populations, modèle continu, Partie 1 : modèles sans interaction. TS-D.M.* disponible sur https://www.mathemathieu.fr/component/attachments/download/294 et https://www.mathemathieu.fr/.

J. Mathieu. *La dynamique des populations, modèle continu, Partie 2 : Modèles Proies/Prédateurs, TS-DM, Cours IV : Le modèle de Lotka-Volterra*. Disponible sur https://www.mathemathieu.fr/component/attachments/download/456. 2000.

P. Meier, A. Bonanomi et D. Messina. *Les équations de Lotka-Volterra pour les systèmes des populations (Mini projet de mathématiques)*. Disponible sur https://www.laviedubonscote.net/DOC%20PDF/EcosystemesVolterra2.pdf. École Polytechnique Fédérale de Lausaune, 11 mai 2006.

D. Meadows, D. Meadows, J. Randers et W. W. Ehrens. *Les Limites à la croissance (dans un monde fini)*. traduction en français de [MRM04]. Disponible en ligne sur https://unr-ra-scholarvox-com.docelec.univ-lyon1.fr/reader/docid/88883742/page/1. Rue de l'échiquier, 2012.

D. Meadows, D. Meadows, J. Randers et W. W. Ehrens. *The Limits to Growth*. Universe Books, 1972.

M. Mhammed. "Modèle Lotka-Volterra avec quelques applications". disponible sur https://bucket.theses-algerie.com/files/repositories-dz/2595866663837096.pdf. Mémoire de master. République Algérienne Démocratique et Populaire : Univérsité D'Adrar, Faculté des Sciences et de la Technologie, Département de Mathématiques et d'Informatique, 2022.

D. Meadows, D. Meadows et J. Randers. *Beyond the limits*. Chelsea Green Pub. Co., 1992.

D. Meadows, J. Randers et D. Meadows. *The Limits to Growth : The 30-year Update*. Routledge, London, 2004.

J. Murray. *Mathematical biology*. Ouvrage disponible à la bibliothèque de Mathématiques de Lyon 1 (cote : 92 MURRAY, niveau -1) et sur https://link-springer-com.docelec.univ-lyon1.fr/book/10.1007/978-3-662-08539-4. Berlin : Springer-Verlag, 1993.

E. Odum. *Fundamentals of ecology*. Troisième édition. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : SCI 4241), première édition disponible sur https://archive.org/download/fundamentals-of-ecology-odum/Fundamentals%20of%20Ecology%20odum.pdf. West Washington Square, Philadelphia, Pa, USA : Saunders, 1971.

D. Perrin. *Cours numéro 5 : Équations différentielles du premier ordre 3, l'équation logistique*. disponible sur https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~daniel.perrin/interdisciplines/Cours5equadiff3-2011.pdf et

https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/fr/perso/daniel-perrin/. 2011.

H. Perdry. *temps discret, temps continu (biol 367)*. disponible sur https://genostats.github.io/herve.perdry/temps_discret_temps_continu.pdf. 2012.

D. Piau. *cours de l'UE MAT127*. chapitre 1, disponible sur https://www-fourier.univ-grenoble-alpes.fr/~dpiau/mat127/chapitre1.pdf. 2012.

D. Piau. *cours de l'UE MAT127*. chapitre 3, disponible sur https://www-fourier.univ-grenoble-alpes.fr/~dpiau/mat127/chapitre3.pdf. 2012.

D. Piau. *cours de l'UE MAT127*. chapitre 2, disponible sur https://www-fourier.univ-grenoble-alpes.fr/~dpiau/mat127/chapitre2-2013.pdf. 2013.

G. Pison. "Sept milliards d'êtres humains aujourd'hui, combien demain ?" In : *Population & Sociétés* 482 (2011). disponible sur https://www.cairn.info/revue-population-et-societes-2011-9-page-1.htm, page 4. doi : 10.3917/popsoc.482.0001.

L. Pujo-Menjouet. "Équations Différentielles Ordinaires et Partielles". Cours de Licence Sciences, Technologies & Santé, Spécialité Mathématiques, disponible sur http://math.univ-lyon1.fr/~pujo/coursEDO.pdf.

Quino. *Mafalda, l'intégrale*. Glénat, 1999.

J.-L. Raimbault. *Équations Différentielles, Cours et Exercices*. disponible sur https://www.lpp.polytechnique.fr/IMG/pdf_EquaDiffS4.pdf. Université Paris XI, 2007.

C. Ringerbach. *la fresque du climat*. FR-FR- Adults - V8.4. https://fresqueduclimat.org/. 25 jan. 2023.

M. Schatzmann. *Analyse numérique, une approche mathématique, Cours et exercices*. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 518.1 SCH, 4e étage). Dunod, 2001.

M. de la Tousche. *Autour des équations de Lotka-Volterra et quelques apparentées en biologie : EDO, EDP, simulations*. Disponible sur https://who.paris.inria.fr/Jean.Clairambault/Equations%20de%

20Lotka%20Volterra%20et%20quelques%20apparentees.pdf. Encadrant M. Jean Clairambault. Sorbonne Université, mai 2022.

G. Vial. *Le système proie-prédateur de Volterra-Lotka*. Disponible sur http://perso.ec-lyon.fr/vial.gregory/Docs/Files/CpltAgreg/volterra.pdf. Voir aussi d'autres ressources sur http://perso.ec-lyon.fr/vial.gregory/enseignement.php. 11 mai 2025.

V. Volterra. *Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie (rédigées par Marcel Brelot)*. Disponible à la BU science, Magasin SCI 6549. Paris : Gauthier-Villars , réimpression Gabay (1990), 1931.

U. Wilensky. *WolfSheepPredation*. disponible sur http://ccl.northwestern.edu/netlogo/models/WolfSheepPredation. Center for Connected Learning et Computer-Based Modeling, Northwestern University, Evanston, IL., 1997.

U. Wilensky et K. Reisman. "ConnectedScience : Learning Biology through Constructing and Testing Computational Theories - an Embodied Modeling Approach". In : *Second International Conference on Complex Systems*. Disponible sur

https://ccl.northwestern.edu/papers/bio/short/, http://ccl.sesp.northwestern.edu/papers/1998/Reisman&Wilensky_WolfSheep(Short).pdf. Learning Biology Through Building Computational Models new. Nashua, NH : New England Complex Systems Institute. In Y. Bar-Yam,

U. Wilensky et K. Reisman. *Thinking Like a Wolf, a Sheep, or a Firefly : Learning Biology Through Constructing and Testing Computational Theories–an Embodied Modeling Approach*. disponible sur https://ccl.northwestern.edu/papers/wolfsheep.pdf. Publié dans Cognition and Instruction. 2006.