

Modèles de croissance démographique et scénarios DDRS, Tronc commun 3A (Départements MAT, INFO, MECA, MAM, GBM)

Jérôme Bastien

Université Lyon 1, Polytech

Printemps 2024

Lien de téléchargement

Ce document est disponible sur

<http://utbmjb.chez-alice.fr>, rubrique DDRS

ou

http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/DDRS/croissance_scenarios.pdf

Organisation

- 1 Cette conférence ;
- 2 Deux séances de TD/TP (voir <http://utbmjb.chez-alice.fr>, rubrique DDRS) sur des simulations numériques à faire à partir de ce document ou des données à chercher sur Internet, avec Matlab, Octave (ou autres ?), voir section A des documents de TD.
- 3 Un rendu à faire par binôme ou trinôme sur les exercices de TD.

Objectifs

Cet enseignement, dispensé à la suite des recommandations de la CTI, est une toute petite introduction aux DDRS. Il a pour ambition de vous faire manipuler (en théorie comme en pratique) des modèles simples ou plus complexes de croissance de populations, en s'appuyant sur des notions simples de mathématiques, en principe déjà acquises ou revues en 3A¹.

1. ce qui est le cas des étudiants des départements INFO et MAT, à qui il ne serait pas pardonné de les avoir oubliées puisque elles ont été traitées avec votre obligé !

Objectifs

Cet enseignement, dispensé à la suite des recommandations de la CTI, est une toute petite introduction aux DDRS. Il a pour ambition de vous faire manipuler (en théorie comme en pratique) des modèles simples ou plus complexes de croissance de populations, en s'appuyant sur des notions simples de mathématiques, en principe déjà acquises ou revues en 3A¹.

L'objectif est double : vous apprendre à savoir critiquer de façon scientifique des courbes de croissance et essayer de les mettre en regard avec les notions de ressources et d'aborder divers scénarios.

1. ce qui est le cas des étudiants des départements INFO et MAT, à qui il ne serait pas pardonné de les avoir oubliées puisque elles ont été traitées avec votre obligé !

Plan

- 1 Modèles simples de croissance démographique (Malthus et Verhulst)
- 2 La transition démographique et la prospective démographique
- 3 Perspectives et conclusions

Sommaire

- 1 Modèles simples de croissance démographique (Malthus et Verhulst)
- 2 La transition démographique et la prospective démographique
- 3 Perspectives et conclusions

Notion de modèle

- 1 Équation différentielle ordinaire ou aux dérivées partielles (ex. des ondes, de la chaleur, principe fondamentale de la dynamique ...);

Notion de modèle

- 1 Équation différentielle ordinaire ou aux dérivées partielles (ex. des ondes, de la chaleur, principe fondamentale de la dynamique ...);
- 2 Hypothèses faites *a priori* ;

Notion de modèle

- 1 Équation différentielle ordinaire ou aux dérivées partielles (ex. des ondes, de la chaleur, principe fondamentale de la dynamique ...);
- 2 Hypothèses faites *a priori* ;
- 3 Calcul, comparaison à l'expérience et calage des paramètres *a posteriori* ;

Notion de modèle

- 1 Équation différentielle ordinaire ou aux dérivées partielles (ex. des ondes, de la chaleur, principe fondamentale de la dynamique ...);
- 2 Hypothèses faites *a priori* ;
- 3 Calcul, comparaison à l'expérience et calage des paramètres *a posteriori* ;
- 4 Rejet, validation ou amélioration du modèle ?

Modèle de population à "grand nombre" d'éléments

Rappels sur la dérivée

Soit une quantité y qui évolue² avec le temps (qui décrit $[t_0, T]$ ou $[t_0, +\infty[$) et dont la valeur à l'instant t est notée $y(t)$; l'évolution avec le temps de cette quantité est donc donnée par la fonction $t \mapsto y(t)$, que nous supposerons dérivable.

2. Voir par exemple [Bas22c, chapitre 2] ou [Bas22a, chapitre 2] et [Pia12a].

Modèle de population à "grand nombre" d'éléments

Rappels sur la dérivée

Soit une quantité y qui évolue² avec le temps (qui décrit $[t_0, T]$ ou $[t_0, +\infty[$) et dont la valeur à l'instant t est notée $y(t)$; l'évolution avec le temps de cette quantité est donc donnée par la fonction $t \mapsto y(t)$, que nous supposerons dérivable.

- 1 L'accroissement de cette quantité entre les instants t et $t + \Delta t$ est la quantité $y(t + \Delta t) - y(t)$;

2. Voir par exemple [Bas22c, chapitre 2] ou [Bas22a, chapitre 2] et [Pia12a].

Modèle de population à "grand nombre" d'éléments

Rappels sur la dérivée

Soit une quantité y qui évolue² avec le temps (qui décrit $[t_0, T]$ ou $[t_0, +\infty[$) et dont la valeur à l'instant t est notée $y(t)$; l'évolution avec le temps de cette quantité est donc donnée par la fonction $t \mapsto y(t)$, que nous supposerons dérivable.

- 1 L'accroissement de cette quantité entre les instants t et $t + \Delta t$ est la quantité $y(t + \Delta t) - y(t)$;
- 2 La vitesse moyenne d'évolution entre les instants t et $t + \Delta t$ est la quantité $\frac{y(t + \Delta) - y(t)}{\Delta t}$;

2. Voir par exemple [Bas22c, chapitre 2] ou [Bas22a, chapitre 2] et [Pia12a].

Modèle de population à "grand nombre" d'éléments

Rappels sur la dérivée

Soit une quantité y qui évolue² avec le temps (qui décrit $[t_0, T]$ ou $[t_0, +\infty[$) et dont la valeur à l'instant t est notée $y(t)$; l'évolution avec le temps de cette quantité est donc donnée par la fonction $t \mapsto y(t)$, que nous supposerons dérivable.

- 1 L'accroissement de cette quantité entre les instants t et $t + \Delta t$ est la quantité $y(t + \Delta t) - y(t)$;
- 2 La vitesse moyenne d'évolution entre les instants t et $t + \Delta t$ est la quantité $\frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t}$;
- 3 La vitesse instantanée d'évolution entre les instants t et $t + \Delta t$ est la limite quand Δt tend vers 0 de $\frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t}$, qui vaut $y'(t)$.

2. Voir par exemple [Bas22c, chapitre 2] ou [Bas22a, chapitre 2] et [Pia12a].

Modèle de population à "grand nombre" d'éléments

Rappels sur la dérivée

- 1 Le taux moyen d'évolution de cette quantité entre les instants t et $t + \Delta t$ est la quantité $\frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t}$.

Modèle de population à "grand nombre" d'éléments

Rappels sur la dérivée

- 1 Le taux moyen d'évolution de cette quantité entre les instants t et $t + \Delta t$ est la quantité $\frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t y(t)}$.
- 2 Le taux instantané d'évolution de cette quantité à l'instant t est la quantité $y'(t)/y(t)$.

Modèle de population à "grand nombre" d'éléments

Approximation essentielle

Lorsque la quantité retenue est le nombre $N(t)$ d'individus à l'instant t dans une population donnée, on ne peut considérer la fonction $N : t \mapsto N(t)$ puisque c'est une fonction à valeurs entières, constante par morceaux, non dérivable.

Modèle de population à "grand nombre" d'éléments

Approximation essentielle

Lorsque la quantité retenue est le nombre $N(t)$ d'individus à l'instant t dans une population donnée, on ne peut considérer la fonction $N : t \mapsto N(t)$ puisque c'est une fonction à valeurs entières, constante par morceaux, non dérivable.

Cependant, si la population est "grande", cela est légitime et l'erreur ainsi faite est négligeable si on la rapporte à une population suffisamment nombreuse.

Modèle de population à "grand nombre" d'éléments

Approximation essentielle

Lorsque la quantité retenue est le nombre $N(t)$ d'individus à l'instant t dans une population donnée, on ne peut considérer la fonction $N : t \mapsto N(t)$ puisque c'est une fonction à valeurs entières, constante par morceaux, non dérivable.

Cependant, si la population est "grande", cela est légitime et l'erreur ainsi faite est négligeable si on la rapporte à une population suffisamment nombreuse.

Dans ce cas, $N'(t)$ a aussi un sens.

Modèle de population à "grand nombre" d'éléments

Exemple de la désintégration du Carbone 14

Voir par exemple [Bas22d, section 4.1 du TD 4] ou [Bas22b, exercices 6.9 à 6.11 du TD 6]

Le modèle de la désintégration du carbone 14, utilisé pour dater des objets d'origine organique contenant du carbone, prévoit que le nombre de désintégrations d'atomes de Carbone 14 par unité de temps est proportionnel à ce même nombre³ :

$$N'(t) = -\lambda N(t), \quad (1)$$

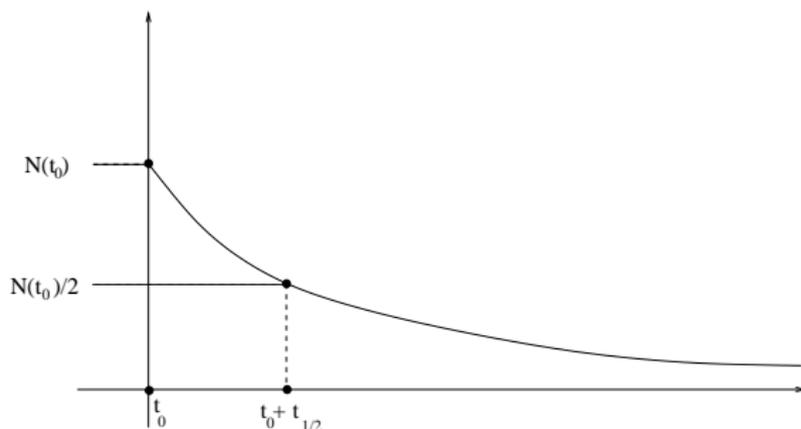
où $\lambda > 0$ et dont la solution est donnée par

$$N(t) = N(t_0)e^{-\lambda(t-t_0)}. \quad (2)$$

3. le taux de décroissance est constant.

Modèle de population à "grand nombre" d'éléments

Exemple de la désintégration du Carbone 14



La demi-vie $t_{1/2}$ correspond au délais nécessaire pour que $N(t_0)$ soit divisé par 2 :

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}. \quad (3)$$

Modèle de population à "grand nombre" d'éléments

Croissance exponentielle

De même, une donnée croissante dont la variation est proportionnelle à elle-même⁴ vérifie

$$N'(t) = \lambda N(t), \quad (4)$$

où $\lambda > 0$ et

$$N(t) = N(t_0)e^{\lambda(t-t_0)}. \quad (5)$$

4. Le taux de croissance est constant.

Modèle de population à "grand nombre" d'éléments

Croissance exponentielle

De même, une donnée croissante dont la variation est proportionnelle à elle-même⁴ vérifie

$$N'(t) = \lambda N(t), \quad (4)$$

où $\lambda > 0$ et

$$N(t) = N(t_0)e^{\lambda(t-t_0)}. \quad (5)$$

Le concept de demi-vie est remplacé par celui de doublement : N est multiplié par 2 tous les t_2 unités de temps avec, comme dans (3) :

$$t_2 = \frac{\ln 2}{\lambda}. \quad (6)$$

4. Le taux de croissance est constant.

Modèle de population à "grand nombre" d'éléments

Croissance exponentielle

De même, une donnée croissante dont la variation est proportionnelle à elle-même⁴ vérifie

$$N'(t) = \lambda N(t), \quad (4)$$

où $\lambda > 0$ et

$$N(t) = N(t_0)e^{\lambda(t-t_0)}. \quad (5)$$

Le concept de demi-vie est remplacé par celui de doublement : N est multiplié par 2 tous les t_2 unités de temps avec, comme dans (3) :

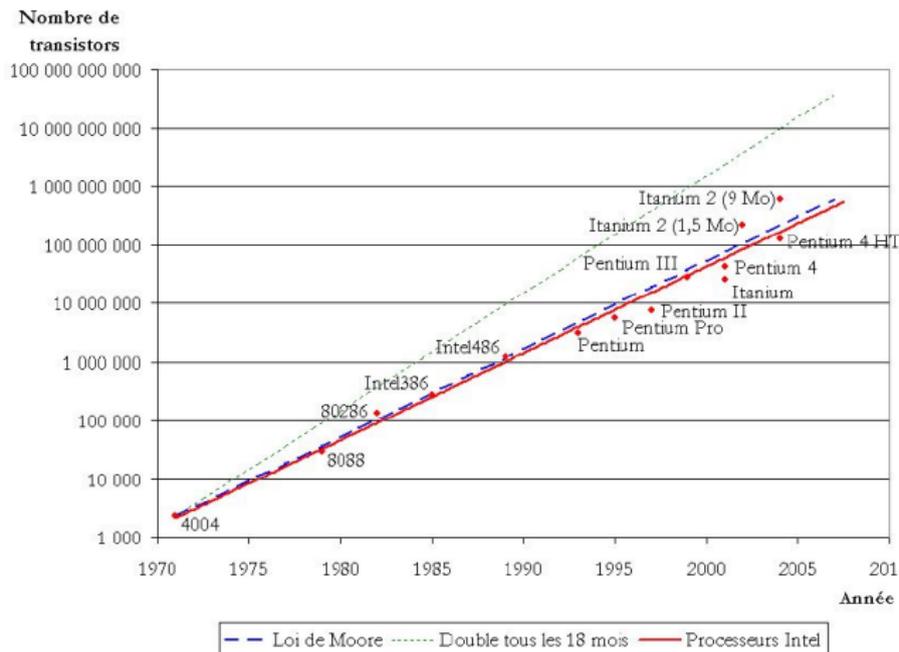
$$t_2 = \frac{\ln 2}{\lambda}. \quad (6)$$

Réciproquement une donnée qui double tous les t_2 unités de temps suit une lois exponentielle (moyennant une hypothèse supplémentaire [Bas22b, exercices 11.7 du TD 7]).

4. Le taux de croissance est constant.

Modèle de population à "grand nombre" d'éléments

Exemple de la Loi de Moore



Le nombre de transistors dans un PC double tous les deux ans ([Bas22b, exercices 11.7 du TD 11]).

Modèle continu de Malthus

Voir [Pia12a], [Ban23, Transparents 69 à 93]⁵ et [Per].

Malthus est un économiste Britannique (1766-1834).

5. De façon plus générale, d'autres ressources sur l'anthropocène ou le DDRS sont disponible sur <https://moodle.univ-lyon1.fr/user/view.php?id=74596&course=3117> ou <https://moodle.univ-lyon1.fr/course/view.php?id=3117>. On pourra aussi consulter [FBP23].

Modèle continu de Malthus

Hypothèses

Considérons une population donnée, de nombre $N(t)$ d'individus à l'instant t . Nous supposons que :

- 1 cette population se reproduit de manière sexuée ;

Modèle continu de Malthus

Hypothèses

Considérons une population donnée, de nombre $N(t)$ d'individus à l'instant t . Nous supposons que :

- 1 cette population se reproduit de manière sexuée ;
- 2 il n'y aura pas de contrainte environnementale au sens que les ressources seront supposées toujours suffisantes ;

Modèle continu de Malthus

Hypothèses

Considérons une population donnée, de nombre $N(t)$ d'individus à l'instant t . Nous supposons que :

- 1 cette population se reproduit de manière sexuée ;
- 2 il n'y aura pas de contrainte environnementale au sens que les ressources seront supposées toujours suffisantes ;
- 3 le nombre de rapports par unité de temps est constant (par individu) ;

Modèle continu de Malthus

Hypothèses

Considérons une population donnée, de nombre $N(t)$ d'individus à l'instant t . Nous supposons que :

- 1 cette population se reproduit de manière sexuée ;
- 2 il n'y aura pas de contrainte environnementale au sens que les ressources seront supposées toujours suffisantes ;
- 3 le nombre de rapports par unité de temps est constant (par individu) ;
- 4 le taux de fécondité d'un rapport reste constant ;

Modèle continu de Malthus

Hypothèses

Considérons une population donnée, de nombre $N(t)$ d'individus à l'instant t . Nous supposons que :

- 1 cette population se reproduit de manière sexuée ;
- 2 il n'y aura pas de contrainte environnementale au sens que les ressources seront supposées toujours suffisantes ;
- 3 le nombre de rapports par unité de temps est constant (par individu) ;
- 4 le taux de fécondité d'un rapport reste constant ;
- 5 le taux de mortalité par unité de temps est constant.

Modèle continu de Malthus

Hypothèses

Sous les hypothèses précédentes, on peut montrer que le taux de natalité par unité de temps est constant.

Modèle continu de Malthus

Hypothèses

Sous les hypothèses précédentes, on peut montrer que le taux de natalité par unité de temps est constant.

Il suffit, en fait, que le taux de natalité et de mortalité par unité de temps soient constants.

Modèle de Malthus

Hypothèses

Le temps t est par exemple mesuré en années. On note α et β les taux de mortalité et de natalité⁶ par an, supposés constants. Soient $h < 1$ et t_0 fixés. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$t_n = nh + t_0.$$

6. en fraction de la population, en % ou ‰.

7. Voir point 1 du transparent 9.

Modèle de Malthus

Hypothèses

Le temps t est par exemple mesuré en années. On note α et β les taux de mortalité et de natalité⁶ par an, supposés constants. Soient $h < 1$ et t_0 fixés. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$t_n = nh + t_0.$$

En reprenant la définition du taux de croissance moyen⁷, évaluons $N(t_{n+1}) - N(t_n)$ égal à l'augmentation de la population entre t_n et t_{n+1} . Puisque $t_{n+1} - t_n = h$, on a

$$N(t_{n+1}) - N(t_n) = \underbrace{\alpha h N(t_n)}_{\text{accroissement de la population}} - \underbrace{\beta h N(t_n)}_{\text{diminution de la population}},$$

6. en fraction de la population, en % ou ‰.

7. Voir point 1 du transparent 9.

Modèle de Malthus

Hypothèses

Le temps t est par exemple mesuré en années. On note α et β les taux de mortalité et de natalité⁶ par an, supposés constants. Soient $h < 1$ et t_0 fixés. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$t_n = nh + t_0.$$

En reprenant la définition du taux de croissance moyen⁷, évaluons $N(t_{n+1}) - N(t_n)$ égal à l'augmentation de la population entre t_n et t_{n+1} . Puisque $t_{n+1} - t_n = h$, on a

$$N(t_{n+1}) - N(t_n) = \underbrace{\alpha h N(t_n)}_{\text{accroissement de la population}} - \underbrace{\beta h N(t_n)}_{\text{diminution de la population}},$$

et donc

$$\frac{N(t_{n+1}) - N(t_n)}{h} = rN(t_n), \quad (7)$$

où $r = \alpha - \beta$ est le taux de croissance de la population (augmentation algébrique de la population par an).

6. en fraction de la population, en % ou ‰.

7. Voir point 1 du transparent 9.

Modèle discret de Malthus

Résultats

Si on note $N_n = N(t_n)$, on réécrit (7) sous la forme

$$N(t_{n+1}) = (1 + hr)N(t_n), \quad (8)$$

et donc on obtient une suite géométrique

$$\forall n \geq 0, \quad N(t_n) = (1 + hr)^n N(t_0), \quad (9)$$

de raison $\rho = 1 + hr > 0$ (si h est assez petit).

Modèle discret de Malthus

Résultats

Si on note $N_n = N(t_n)$, on réécrit (7) sous la forme

$$N(t_{n+1}) = (1 + hr)N(t_n), \quad (8)$$

et donc on obtient une suite géométrique

$$\forall n \geq 0, \quad N(t_n) = (1 + hr)^n N(t_0), \quad (9)$$

de raison $\rho = 1 + hr > 0$ (si h est assez petit).

On a $r > 0 \iff \rho > 1$ et donc si

- 1 $r < 0$, décroissance de la population ;

Modèle discret de Malthus

Résultats

Si on note $N_n = N(t_n)$, on réécrit (7) sous la forme

$$N(t_{n+1}) = (1 + hr)N(t_n), \quad (8)$$

et donc on obtient une suite géométrique

$$\forall n \geq 0, \quad N(t_n) = (1 + hr)^n N(t_0), \quad (9)$$

de raison $\rho = 1 + hr > 0$ (si h est assez petit).

On a $r > 0 \iff \rho > 1$ et donc si

- 1 $r < 0$, décroissance de la population ;
- 2 $r = 0$, constance de la population ;

Modèle discret de Malthus

Résultats

Si on note $N_n = N(t_n)$, on réécrit (7) sous la forme

$$N(t_{n+1}) = (1 + hr)N(t_n), \quad (8)$$

et donc on obtient une suite géométrique

$$\forall n \geq 0, \quad N(t_n) = (1 + hr)^n N(t_0), \quad (9)$$

de raison $\rho = 1 + hr > 0$ (si h est assez petit).

On a $r > 0 \iff \rho > 1$ et donc si

- 1 $r < 0$, décroissance de la population ;
- 2 $r = 0$, constance de la population ;
- 3 $r > 0$, croissance infinie de la population.

Modèle discret de Malthus

Résultats

Si on note $N_n = N(t_n)$, on réécrit (7) sous la forme

$$N(t_{n+1}) = (1 + hr)N(t_n), \quad (8)$$

et donc on obtient une suite géométrique

$$\forall n \geq 0, \quad N(t_n) = (1 + hr)^n N(t_0), \quad (9)$$

de raison $\rho = 1 + hr > 0$ (si h est assez petit).

On a $r > 0 \iff \rho > 1$ et donc si

- 1 $r < 0$, décroissance de la population ;
- 2 $r = 0$, constance de la population ;
- 3 $r > 0$, croissance infinie de la population.

Attention, souvent hr est remplacé par r .

Modèle continu de Malthus

Résultats

On fait l'approximation suivante, d'autant plus valable que h est petit :

$$\frac{N(t_{n+1}) - N(t_n)}{h} \approx N'(t_n)$$

Modèle continu de Malthus

Résultats

On fait l'approximation suivante, d'autant plus valable que h est petit :

$$\frac{N(t_{n+1}) - N(t_n)}{h} \approx N'(t_n)$$

et donc (7) devient

$$\forall t \geq t_0, \quad N'(t) = rN(t), \quad (10)$$

identique à (1). La solution est

$$\forall t \geq t_0, \quad N(t) = N(t_0)e^{r(t-t_0)}. \quad (11)$$

Modèle continu de Malthus

Résultats

On fait l'approximation suivante, d'autant plus valable que h est petit :

$$\frac{N(t_{n+1}) - N(t_n)}{h} \approx N'(t_n)$$

et donc (7) devient

$$\forall t \geq t_0, \quad N'(t) = rN(t), \quad (10)$$

identique à (1). La solution est

$$\forall t \geq t_0, \quad N(t) = N(t_0)e^{r(t-t_0)}. \quad (11)$$

On obtient les mêmes conclusions que le transparent précédent, selon le signe de r .

Modèle continu de Malthus

passage continu \rightarrow discret

Le schéma d'Euler explicite (Voir par exemple votre cours de MNB ou [DB22, chapitre 5] et [BM03, chapitre 5 et exercice 5.6 p. 214]) pour l'équation différentielle (10) est donnée par (7) et donc (9) !

Modèle continu de Malthus

passage continu \rightarrow discret

Le schéma d'Euler explicite (Voir par exemple votre cours de MNB ou [DB22, chapitre 5] et [BM03, chapitre 5 et exercice 5.6 p. 214]) pour l'équation différentielle (10) est donnée par (7) et donc (9) !
Convergence du modèle discret vers le modèle continu, quand h tend vers zéro.

Modèle de Malthus

linéarisation

- ① Modèle continu : t proche de t_0 :

$$N(t) = N(t_0)e^{r(t-t_0)} \implies N(t) \approx N(t_0)(1 + r(t - t_0)).$$

Modèle de Malthus

linéarisation

- ① Modèle continu : t proche de t_0 :

$$N(t) = N(t_0)e^{r(t-t_0)} \implies N(t) \approx N(t_0)(1 + r(t - t_0)).$$

- ② Modèle discret : n petit

$$\begin{aligned} N(t_n) &= (1 + hr)^n N(t_0) \implies N(t) \approx N(t_0)(1 + nhr), \\ &= N(t_0)(1 + r(t_n - t_0)) \end{aligned}$$

Modèle de Malthus

linéarisation

- ① Modèle continu : t proche de t_0 :

$$N(t) = N(t_0)e^{r(t-t_0)} \implies N(t) \approx N(t_0)(1 + r(t - t_0)).$$

- ② Modèle discret : n petit

$$\begin{aligned} N(t_n) = (1 + hr)^n N(t_0) &\implies N(t) \approx N(t_0)(1 + nhr), \\ &= N(t_0)(1 + r(t_n - t_0)) \end{aligned}$$

- ③ \implies les deux quantités coïncident et r prend tout son sens !

Modèle de Malthus

linéarisation

- ① Modèle continu : t proche de t_0 :

$$N(t) = N(t_0)e^{r(t-t_0)} \implies N(t) \approx N(t_0)(1 + r(t - t_0)).$$

- ② Modèle discret : n petit

$$\begin{aligned} N(t_n) &= (1 + hr)^n N(t_0) \implies N(t) \approx N(t_0)(1 + nhr), \\ &= N(t_0)(1 + r(t_n - t_0)) \end{aligned}$$

- ③ \implies les deux quantités coïncident et r prend tout son sens !
- ④ \implies apparition d'une suite arithmétique pour le modèle discret et d'une fonction affine pour le modèle continu.

Modèle de Malthus

Résumé

Sur https://fr.wikipedia.org/wiki/Thomas_Malthus :
"Malthus prédit mathématiquement que sans freins, la population augmente de façon exponentielle ou géométrique (par exemple : 1, 2, 4, 8, 16, 32...) tandis que les ressources ne croissent que de façon arithmétique (1, 2, 3, 4, 5, 6...).

Modèle de Malthus

Résumé

Sur https://fr.wikipedia.org/wiki/Thomas_Malthus :

"Malthus prédit mathématiquement que sans freins, la population augmente de façon exponentielle ou géométrique (par exemple : 1, 2, 4, 8, 16, 32...) tandis que les ressources ne croissent que de façon arithmétique (1, 2, 3, 4, 5, 6...).

Il en conclut le caractère inévitable de catastrophes démographiques, à moins de limiter la croissance de la population.

Modèle de Malthus

Résumé

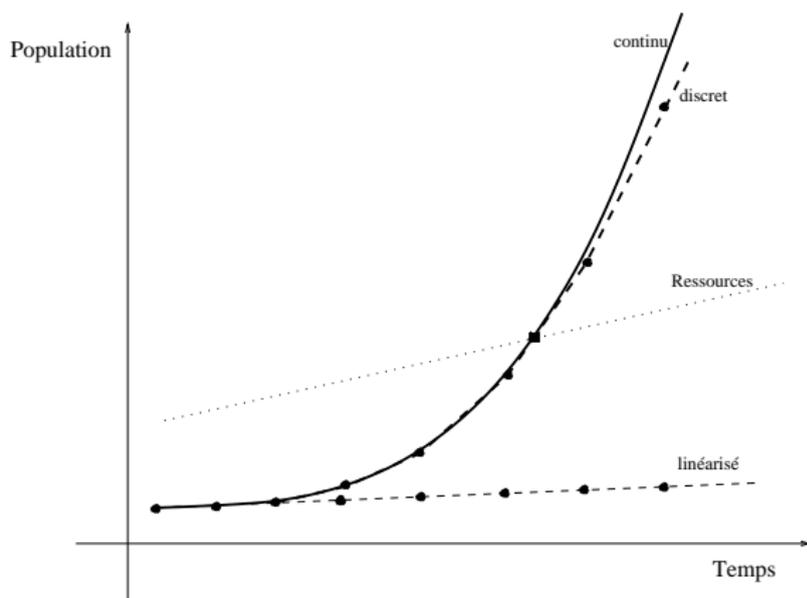
Sur https://fr.wikipedia.org/wiki/Thomas_Malthus :

"Malthus prédit mathématiquement que sans freins, la population augmente de façon exponentielle ou géométrique (par exemple : 1, 2, 4, 8, 16, 32...) tandis que les ressources ne croissent que de façon arithmétique (1, 2, 3, 4, 5, 6...).

Il en conclut le caractère inévitable de catastrophes démographiques, à moins de limiter la croissance de la population. Le pronostic pessimiste de Malthus s'est révélé faux, car le monde a connu une grande augmentation des ressources De deux habitants de la planète sur trois en malnutrition en 1950, on est ainsi passé à un sur sept en 2012, alors que la planète passait dans le même temps de deux milliards et demi d'habitants à plus de six milliards."

Modèle de Malthus

Résumé



Modèle (continu) de Malthus

Identification

- 1 On suppose connus $(t_i, N(t_i))_{0 \leq i \leq P}$, donnés expérimentalement. On cherche à identifier N_0 et r tel que (11) ait lieu, c'est-à-dire :

$$\forall i \in \{0, \dots, P\}, \quad N(t_i) = N_0 e^{r(t_i - t_0)}. \quad (12)$$

Modèle (continu) de Malthus

Identification

- 1 On suppose connus $(t_i, N(t_i))_{0 \leq i \leq P}$, donnés expérimentalement. On cherche à identifier N_0 et r tel que (11) ait lieu, c'est-à-dire :

$$\forall i \in \{0, \dots, P\}, \quad N(t_i) = N_0 e^{r(t_i - t_0)}. \quad (12)$$

- 2 Il suffit d'écrire :

$$\ln(N(t_i)) = r(t_i - t_0) + \ln(N_0), \quad (13)$$

et de faire une régression linéaire sur le nuage de points $(t_i - t_0, \ln(N(t_i)))_{0 \leq i \leq P}$, dont la pente fournit r et l'ordonnée à l'origine $\ln(N_0)$.

Modèle (continu) de Malthus

Identification (Régression Linéaire)

C'est en fait un cas particulier de la la théorie de l'approximation polynômiale au sens des moindres carrés comme c'est présenté dans [Bas22a, section "Étude d'un exemple concret" du chapitre "Systèmes linéaires et matrices"] ou [DB22, section "Approximation au sens des moindres carrés" du chapitre "Interpolation"].

Modèle (continu) de Malthus

Identification (Régression Linéaire)

C'est en fait un cas particulier de la la théorie de l'approximation polynômiale au sens des moindres carrés comme c'est présenté dans [Bas22a, section "Étude d'un exemple concret" du chapitre "Systèmes linéaires et matrices"] ou [DB22, section "Approximation au sens des moindres carrés" du chapitre "Interpolation"].

Il existe, dans ce cas particulier de la régression linéaire, des formules donnant explicitement les coefficients de la droite (voir [Bas22a, Annexe "Étude théorique d'un problème de moindres carrés"]).

Modèle de Malthus

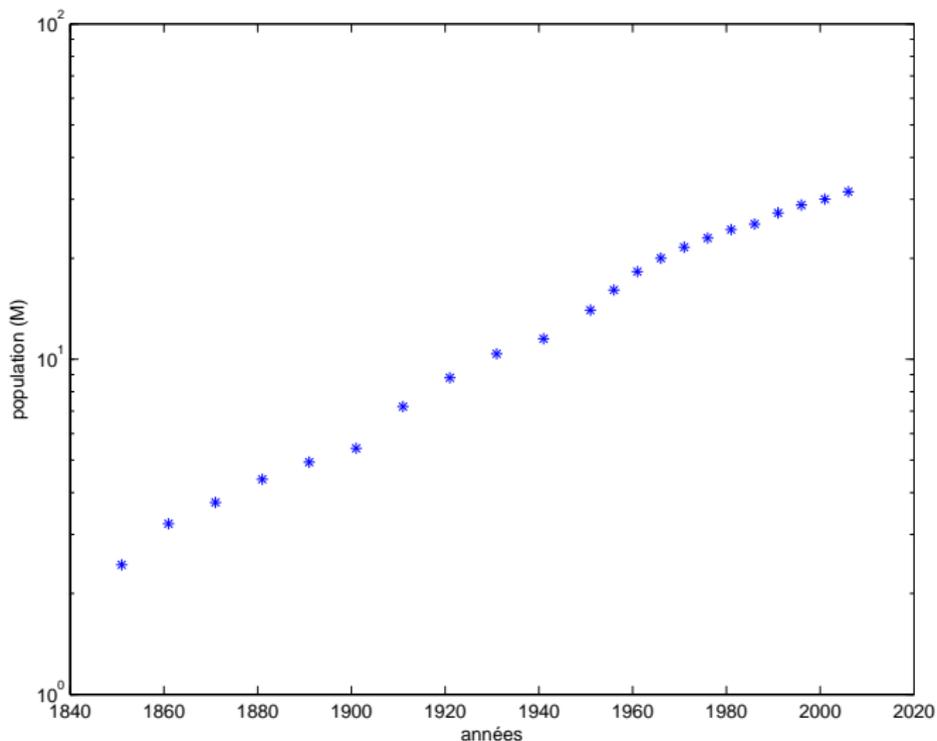
Simulations (Population du Canada entre 1851 et 2006).

Données issues de [Pia12a] sur la population du Canada entre les années 1851 et 2006.

| Années | Population (M) |
|--------|----------------|
| 1851 | 2.436297 |
| 1861 | 3.229633 |
| 1871 | 3.737257 |
| 1881 | 4.381256 |
| 1891 | 4.932206 |
| 1901 | 5.418663 |
| 1911 | 7.221662 |
| 1921 | 8.800429 |
| 1931 | 10.376379 |
| 1941 | 11.506655 |
| 1951 | 14.009429 |
| 1956 | 16.080791 |
| 1961 | 18.238247 |
| 1966 | 20.014880 |
| 1971 | 21.568305 |
| 1976 | 22.992595 |
| 1981 | 24.343177 |
| 1986 | 25.309330 |
| 1991 | 27.296856 |
| 1996 | 28.846758 |
| 2001 | 30.007094 |
| 2006 | 31.612897 |

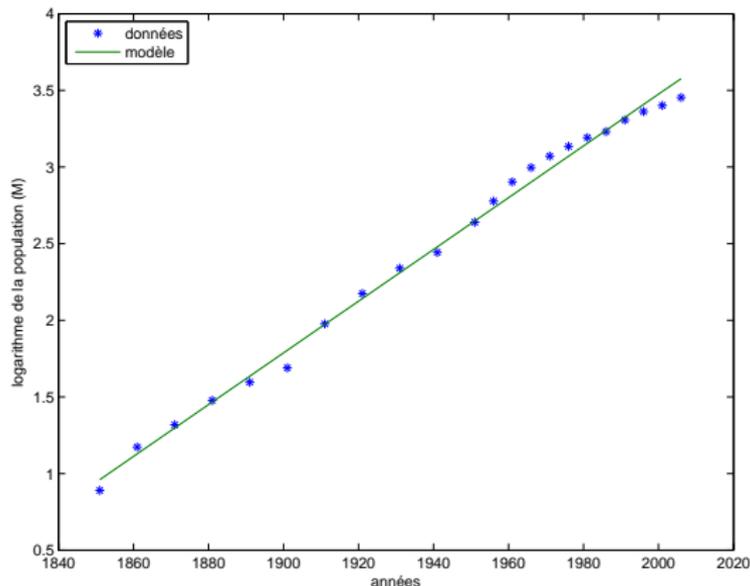
Modèle de Malthus

Simulations (Population du Canada entre 1851 et 2006).



Modèle de Malthus

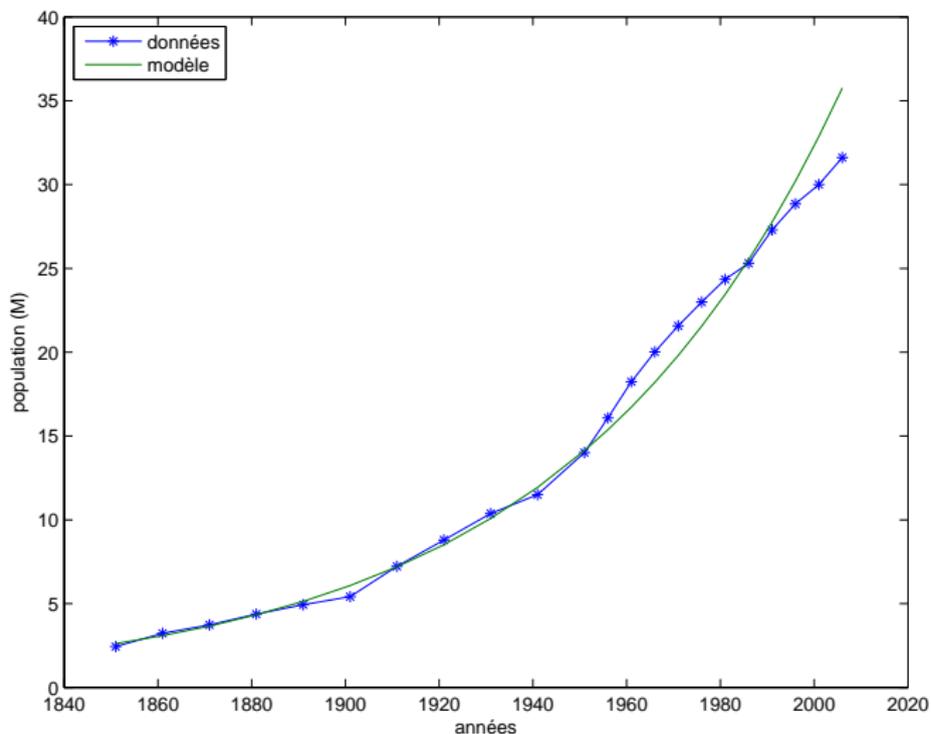
Simulations (Population du Canada entre 1851 et 2006).



On obtient un accroissement (annuel) de la population $r = 1.688205\%$ et une corrélation égale à 0.997054.

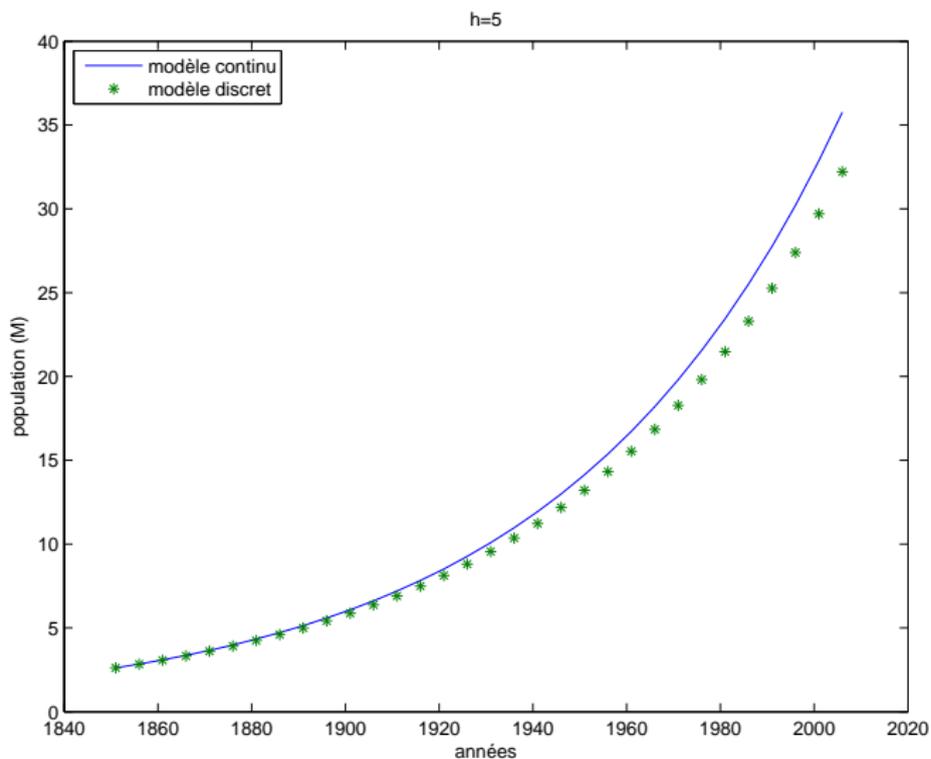
Modèle de Malthus

Simulations (Population du Canada entre 1851 et 2006).



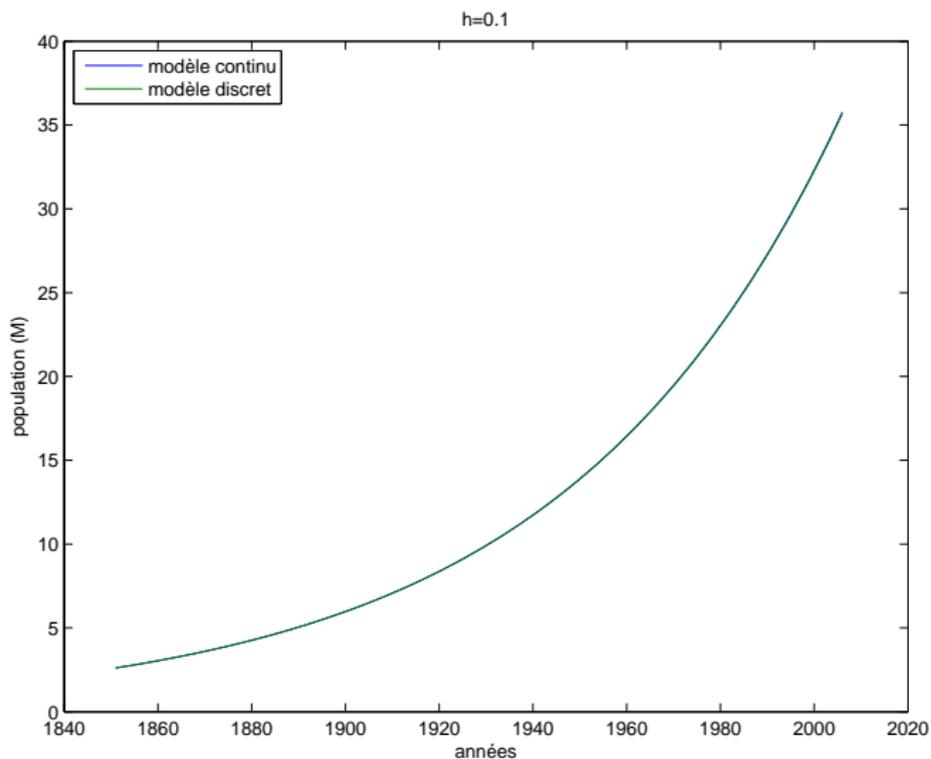
Modèle de Malthus

Simulations (Population du Canada entre 1851 et 2006).



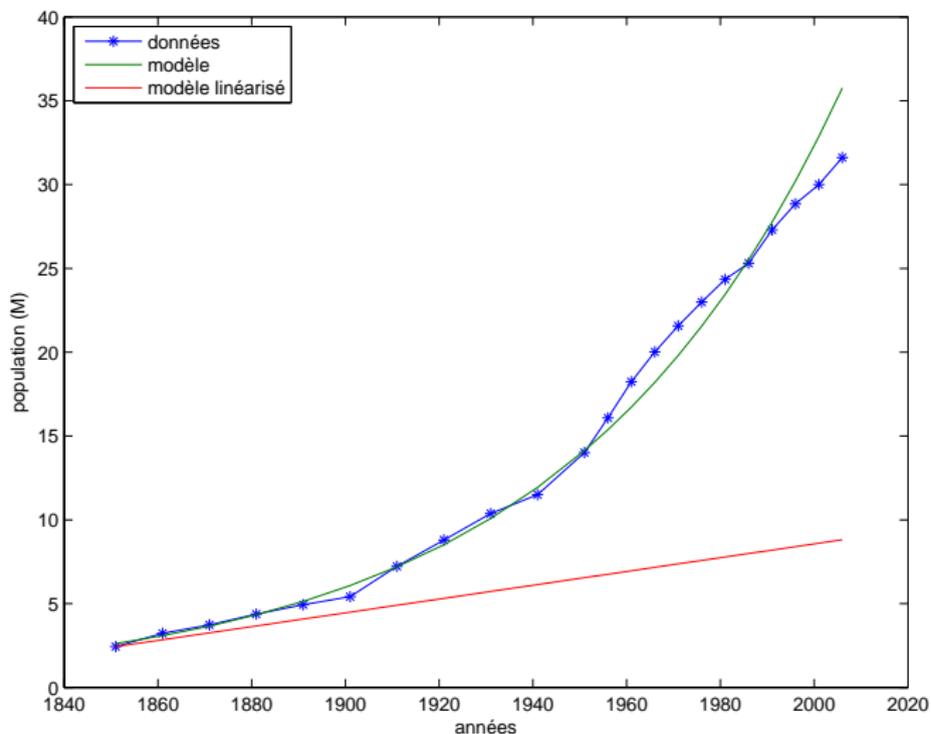
Modèle de Malthus

Simulations (Population du Canada entre 1851 et 2006).



Modèle de Malthus

Simulations (Population du Canada entre 1851 et 2006).



Modèle de Malthus

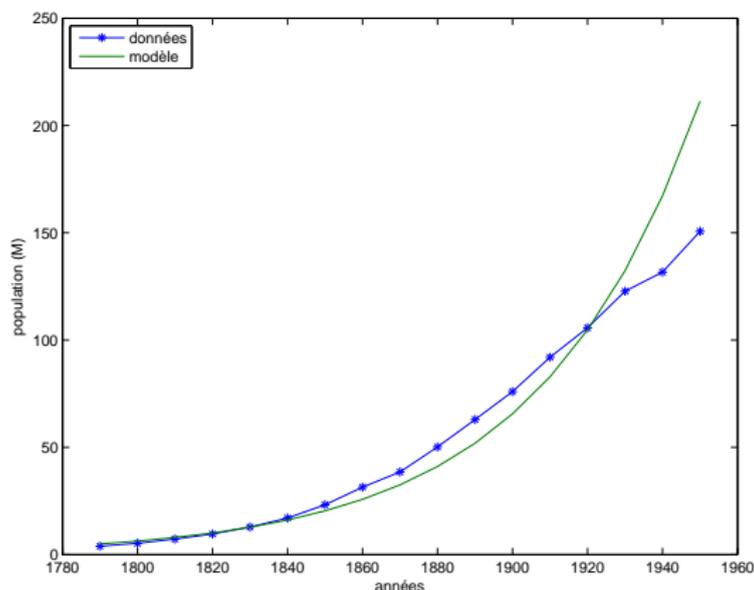
Simulations (Population des USA entre 1790 et 1950).

Données issues de [Pia12a] sur la population des USA entre les années 1790 et 1950.

| Années | Population (M) |
|--------|----------------|
| 1790 | 3.929 |
| 1800 | 5.308 |
| 1810 | 7.240 |
| 1820 | 9.638 |
| 1830 | 12.866 |
| 1840 | 17.069 |
| 1850 | 23.192 |
| 1860 | 31.443 |
| 1870 | 38.558 |
| 1880 | 50.156 |
| 1890 | 62.948 |
| 1900 | 75.995 |
| 1910 | 91.972 |
| 1920 | 105.711 |
| 1930 | 122.775 |
| 1940 | 131.669 |
| 1950 | 150.697 |

Modèle de Malthus

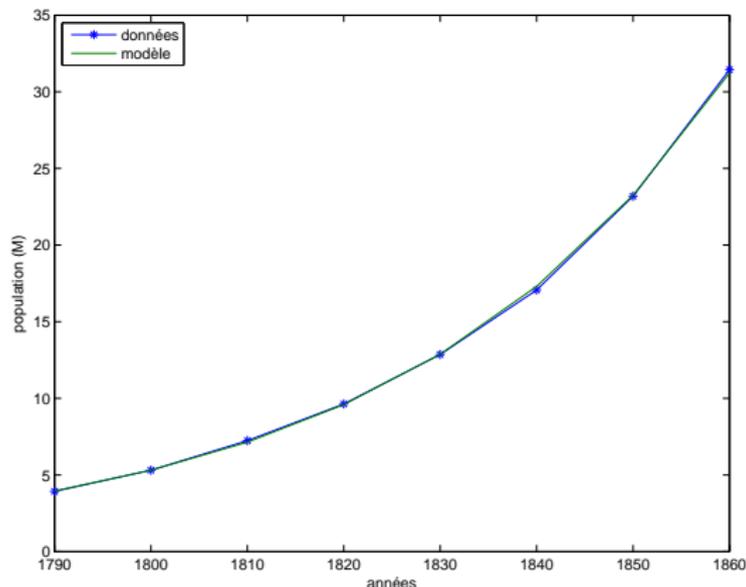
Simulations (Population des USA entre 1790 et 1950).



Entre 1790 et 1950 : accroissement $r = 2.338817\%$ et corrélation 0.989486.

Modèle de Malthus

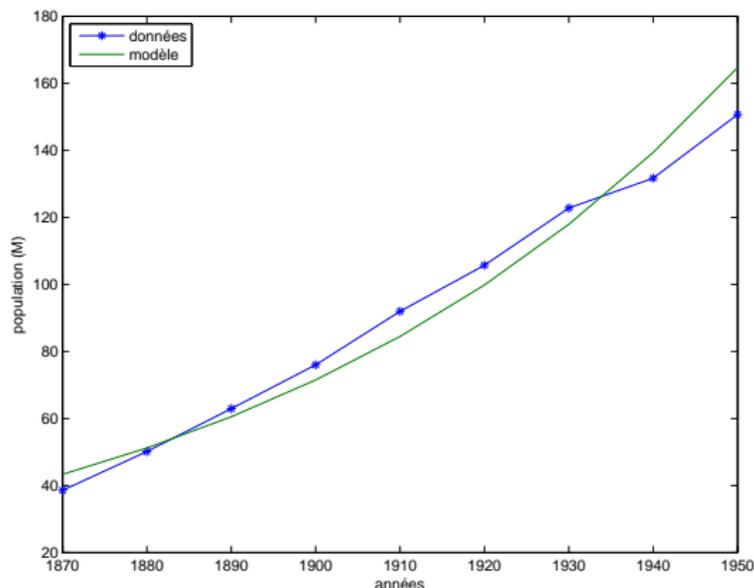
Simulations (Population des USA entre 1790 et 1950).



Entre 1790 et 1860 : accroissement $r = 2.951584\%$ et corrélation 0.999930.

Modèle de Malthus

Simulations (Population des USA entre 1790 et 1950).



Entre 1870 et 1950 : accroissement $r = 1.669003\%$ et corrélation 0.987496.

Modèle de Malthus

Critiques et conséquences

Naturellement, la croissance exponentielle ne peut se prolonger.

8. voir <https://fr.wikipedia.org/wiki/Malthusianisme>.

Modèle de Malthus

Critiques et conséquences

Naturellement, la croissance exponentielle ne peut se prolonger.

La population tend à croître plus rapidement que ses ressources, jusqu'à ce qu'interviennent des freins ou des limites⁸ à cette croissance (nommés checks). Ces derniers entraînent la population à un niveau permettant de nourrir l'ensemble.

8. voir <https://fr.wikipedia.org/wiki/Malthusianisme>.

Modèle de Malthus

Critiques et conséquences

Naturellement, la croissance exponentielle ne peut se prolonger.

La population tend à croître plus rapidement que ses ressources, jusqu'à ce qu'interviennent des freins ou des limites⁸ à cette croissance (nommés checks). Ces derniers entraînent la population à un niveau permettant de nourrir l'ensemble.

Freins de type "obstacle répressif" (famines, épidémie) ou de type "obstacle préventifs" (décisions conscientes prises en connaissance de cause pour freiner la croissance démographique : avortement, contrôle des naissances, célibat ...).

8. voir <https://fr.wikipedia.org/wiki/Malthusianisme>.

Modèle de Malthus

Critiques et conséquences

Naturellement, la croissance exponentielle ne peut se prolonger.

La population tend à croître plus rapidement que ses ressources, jusqu'à ce qu'interviennent des freins ou des limites⁸ à cette croissance (nommés checks). Ces derniers entraînent la population à un niveau permettant de nourrir l'ensemble.

Freins de type "obstacle répressif" (famines, épidémie) ou de type "obstacle préventifs" (décisions conscientes prises en connaissance de cause pour freiner la croissance démographique : avortement, contrôle des naissances, célibat ...).

Ces freins seront pris en compte mathématiquement par le modèle de Verhulst.

8. voir <https://fr.wikipedia.org/wiki/Malthusianisme>.

Modèle de Malthus

Critiques politiques

Marx critiquera violemment les propos de Malthus. Selon lui, la surpopulation n'est que le fruit de la propriété privée. "L'armée de réserve" des travailleurs pèse certes sur les salaires, mais elle résulte de l'accumulation du capital et de la réduction des effectifs ouvriers.

Modèle de Malthus



Issu de [Qui99]

Modèle de Verhulst

Hypothèses

Voir par exemple [Ban23, Transparents 72 et 73] et
https://fr.wikipedia.org/wiki/Modèle_de_Verhulst.

9. mathématicien Belge 1804-1849.

Modèle de Verhulst

Hypothèses

Voir par exemple [Ban23, Transparents 72 et 73] et https://fr.wikipedia.org/wiki/Modèle_de_Verhulst.

Le modèle de Verhulst⁹ suppose que :

- 1 le taux de natalité et le taux de mortalité par unité de temps sont des fonctions affines respectivement décroissante et croissante du nombre d'individus ;
- 2 lorsqu'une population est de petite taille, elle a tendance à croître

9. mathématicien Belge 1804-1849.

Modèle de Verhulst

Hypothèses

Voir par exemple [Ban23, Transparents 72 et 73] et https://fr.wikipedia.org/wiki/Modèle_de_Verhulst.

Le modèle de Verhulst⁹ suppose que :

- 1 le taux de natalité et le taux de mortalité par unité de temps sont des fonctions affines respectivement décroissante et croissante du nombre d'individus ;
- 2 lorsqu'une population est de petite taille, elle a tendance à croître

Comme le modèle de Malthus, il existe une version continue et une version discrète, non présentée ici.

9. mathématicien Belge 1804-1849.

Modèle de Verhulst

Mise en place mathématique

Si on appelle :

$N(t)$, le nombre d'individus à l'instant t ,

$\alpha(N(t))$, le taux de natalité par unité de temps, dépendant de $N(t)$,

$\beta(N(t))$, le taux de mortalité par unité de temps, dépendant de $N(t)$,

10. voir transparents 18 et 20.

Modèle de Verhulst

Mise en place mathématique

Si on appelle :

$N(t)$, le nombre d'individus à l'instant t ,

$\alpha(N(t))$, le taux de natalité par unité de temps, dépendant de $N(t)$,

$\beta(N(t))$, le taux de mortalité par unité de temps, dépendant de $N(t)$,

alors, en raisonnant comme pour le modèle de Malthus¹⁰ (où α et β sont constants), on obtient l'équation différentielle

$$\begin{aligned}
 N'(t) &= N(t) \left(\underbrace{\alpha(N(t))}_{\text{accroissement de la population}} - \underbrace{\beta(N(t))}_{\text{diminution de la population}} \right), \\
 &= N(t) \underbrace{r(N(t))}_{\text{taux de croissance}},
 \end{aligned}$$

10. voir transparents 18 et 20.

Modèle de Verhulst

Mise en place mathématique

Si α et β sont des fonctions affines respectivement strictement décroissante et strictement croissante alors $\alpha - \beta$ est une fonction affine strictement décroissante du type $N \mapsto a - bN$ où $b > 0$.
Notons que Verhulst a proposé d'autres modèles plus généraux, en s'inspirant de la loi de friction fluide.

Modèle de Verhulst

Mise en place mathématique

Si α et β sont des fonctions affines respectivement strictement décroissante et strictement croissante alors $\alpha - \beta$ est une fonction affine strictement décroissante du type $N \mapsto a - bN$ où $b > 0$.

Notons que Verhulst a proposé d'autres modèles plus généraux, en s'inspirant de la loi de friction fluide.

De plus, quand N tend vers zéro, $a - bN$ tend vers a qui doit être strictement positif selon la seconde hypothèse de Verhulst. Bref, $a > 0$.

Modèle de Verhulst

Mise en place mathématique

Si α et β sont des fonctions affines respectivement strictement décroissante et strictement croissante alors $\alpha - \beta$ est une fonction affine strictement décroissante du type $N \mapsto a - bN$ où $b > 0$.

Notons que Verhulst a proposé d'autres modèles plus généraux, en s'inspirant de la loi de friction fluide.

De plus, quand N tend vers zéro, $a - bN$ tend vers a qui doit être strictement positif selon la seconde hypothèse de Verhulst. Bref, $a > 0$.

On a donc l'équation différentielle

$$N'(t) = N(t)(a - bN(t)), \quad (14)$$

avec l'habituelle condition initiale $N(t_0) = N_0$.

Modèle de Verhulst

Mise en place mathématique

Si α et β sont des fonctions affines respectivement strictement décroissante et strictement croissante alors $\alpha - \beta$ est une fonction affine strictement décroissante du type $N \mapsto a - bN$ où $b > 0$.

Notons que Verhulst a proposé d'autres modèles plus généraux, en s'inspirant de loi de friction fluide.

De plus, quand N tend vers zéro, $a - bN$ tend vers a qui doit être strictement positif selon la seconde hypothèse de Verhulst. Bref, $a > 0$.

On a donc l'équation différentielle

$$N'(t) = N(t)(a - bN(t)), \quad (14)$$

avec l'habituelle condition initiale $N(t_0) = N_0$.

En posant $K = a/b > 0$, (14) devient

$$N'(t) = aN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K} \right). \quad (15)$$

Modèle de Verhulst

Mise en place mathématique

Le taux de croissance $r(N)$ est donc défini par

$$r(N) = a \left(1 - \frac{N}{K} \right). \quad (16)$$

Modèle de Verhulst

Mise en place mathématique

Le taux de croissance $r(N)$ est donc défini par

$$r(N) = a \left(1 - \frac{N}{K} \right). \quad (16)$$

Nous verrons que, sous des hypothèses habituelles à préciser :

La fonction $t \mapsto r(N(t))$ est positive et décroissante. (17)

Modèle de Verhulst

Analyse *a priori*

On pourra trouver une analyse *a priori* des termes aN et $-bN^2$ dans [Pia12b], notamment le fait que

Modèle de Verhulst

Analyse *a priori*

On pourra trouver une analyse *a priori* des termes aN et $-bN^2$ dans [Pia12b], notamment le fait que

- 1 aN , représente, comme dans le modèle de Malthus, l'augmentation naturelle de la population,

Modèle de Verhulst

Analyse *a priori*

On pourra trouver une analyse *a priori* des termes aN et $-bN^2$ dans [Pia12b], notamment le fait que

- ① aN , représente, comme dans le modèle de Malthus, l'augmentation naturelle de la population,
- ② $-bN^2$ représente la diminution de la population, due au manque de ressources si la population croît trop.

Modèle de Verhulst

Analyse *a priori* : comportement pour les petites valeurs et grandes valeurs de N

- ① Si N est proche de zéro, le terme $-bN^2$ est négligeable devant aN et (15) se réécrit

$$N'(t) = aN(t), \quad (18)$$

et on retrouve l'équation différentielle (10) du modèle de Malthus.

Modèle de Verhulst

Analyse *a priori* : comportement pour les petites valeurs et grandes valeurs de N

- 1 Si N est proche de zéro, le terme $-bN^2$ est négligeable devant aN et (15) se réécrit

$$N'(t) = aN(t), \quad (18)$$

et on retrouve l'équation différentielle (10) du modèle de Malthus.

- 2 Si N croît (ce qui sera le cas), alors le terme $-bN^2$ prend de l'importance et vient amortir la croissance exponentielle du modèle de Malthus. Nous verrons que $N(t)$ a une limite finie quand t tend vers l'infini.

Modèle de Verhulst

Résolution

On renvoie pour plus de détails à [Per11 ; Pia13 ; Pia12b].
Si la solution est non constante, alors on montre qu'elle ne s'annule pas et on peut poser $v = 1/N$. On a alors $v' = -N'/N^2$ puis, en utilisant (15)

$$\begin{aligned}v' &= -\frac{ay}{N^2} \left(1 - \frac{N}{K}\right), \\ &= -a \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{K}\right), \\ &= -av + \frac{a}{K},\end{aligned}$$

Modèle de Verhulst

Résolution

On renvoie pour plus de détails à [Per11 ; Pia13 ; Pia12b].
Si la solution est non constante, alors on montre qu'elle ne s'annule pas et on peut poser $v = 1/N$. On a alors $v' = -N'/N^2$ puis, en utilisant (15)

$$\begin{aligned}v' &= -\frac{ay}{N^2} \left(1 - \frac{N}{K}\right), \\ &= -a \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{K}\right), \\ &= -av + \frac{a}{K},\end{aligned}$$

et donc

$$v' + av = \frac{a}{K}.$$

Modèle de Verhulst

Résolution

On résoud l'EHA et on obtient, en y additionnant une solution constante¹¹, égale à $1/K$, solution particulière :

$$v(t) = Ce^{-at} + \frac{1}{K},$$

et donc

$$N(t) = \frac{1}{Ce^{-at} + \frac{1}{K}}.$$

11. Voir par exemple le chapitre "Équations différentielles (ordinaires) à coefficients constants" de [Bas22a] ou [Bas22c].

Modèle de Verhulst

Résolution

On résoud l'EHA et on obtient, en y additionnant une solution constante¹¹, égale à $1/K$, solution particulière :

$$v(t) = Ce^{-at} + \frac{1}{K},$$

et donc

$$N(t) = \frac{1}{Ce^{-at} + \frac{1}{K}}.$$

La condition initiale permet alors d'avoir

$$N(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N_0} - 1\right) e^{-a(t-t_0)}}.$$

11. Voir par exemple le chapitre "Équations différentielles (ordinaires) à coefficients constants" de [Bas22a] ou [Bas22c].

Modèle de Verhulst

Expression complète

On se place dans le cas où N_0 (et donc N) est strictement positif.

On a alors

$$\text{si } N_0 = K, \text{ alors } N(t) = K, \text{ définie sur } \mathbb{R}, \quad (19a)$$

$$\text{si } N_0 \neq K, \text{ alors } N(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N_0} - 1\right) e^{-a(t-t_0)}} \text{ définie sur } D \quad (19b)$$

$$\text{avec } D = \begin{cases} \left] t_0 + \frac{1}{a} \ln \left(1 - \frac{K}{N_0} \right), +\infty \right[& \text{si } N_0 > K, \\ \mathbb{R}, & \text{si } 0 < N_0 < K. \end{cases} \quad (19c)$$

Modèle de Verhulst

Expression complète

On se place dans le cas où N_0 (et donc N) est strictement positif.

On a alors

$$\text{si } N_0 = K, \text{ alors } N(t) = K, \text{ définie sur } \mathbb{R}, \quad (19a)$$

$$\text{si } N_0 \neq K, \text{ alors } N(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N_0} - 1\right) e^{-a(t-t_0)}} \text{ définie sur } D \quad (19b)$$

$$\text{avec } D = \begin{cases} \left] t_0 + \frac{1}{a} \ln \left(1 - \frac{K}{N_0} \right), +\infty \right[& \text{si } N_0 > K, \\ \mathbb{R}, & \text{si } 0 < N_0 < K. \end{cases} \quad (19c)$$

Pour toute la suite, on n'étudie que les modèles de croissance et on supposera que $0 < N_0 < K$. Nous verrons que N est strictement croissante et tend vers K quand t tend vers l'infini.

Modèle de Verhulst

Expression complète

On se place dans le cas où N_0 (et donc N) est strictement positif.

On a alors

$$\text{si } N_0 = K, \text{ alors } N(t) = K, \text{ définie sur } \mathbb{R}, \quad (19a)$$

$$\text{si } N_0 \neq K, \text{ alors } N(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N_0} - 1\right) e^{-a(t-t_0)}} \text{ définie sur } D \quad (19b)$$

$$\text{avec } D = \begin{cases} \left] t_0 + \frac{1}{a} \ln \left(1 - \frac{K}{N_0}\right), +\infty \right[& \text{si } N_0 > K, \\ \mathbb{R}, & \text{si } 0 < N_0 < K. \end{cases} \quad (19c)$$

Pour toute la suite, on n'étudie que les modèles de croissance et on supposera que $0 < N_0 < K$. Nous verrons que N est strictement croissante et tend vers K quand t tend vers l'infini. K est donc appelée la capacité d'accueil.

Modèle de Verhulst

Étude sommaire

On vérifie que :

- d'après (19b), il vient $\lim_{t \rightarrow -\infty} N(t) = 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = K$
et $0 < N < K$;

Modèle de Verhulst

Étude sommaire

On vérifie que :

- d'après (19b), il vient $\lim_{t \rightarrow -\infty} N(t) = 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = K$ et $0 < N < K$;
- d'après (15), $N' > 0$ et N est strictement croissante ;

Modèle de Verhulst

Étude sommaire

On vérifie que :

- d'après (19b), il vient $\lim_{t \rightarrow -\infty} N(t) = 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = K$ et $0 < N < K$;
- d'après (15), $N' > 0$ et N est strictement croissante ;
- Grâce à (15), on a

$$N''(t) = a \left(N' \left(1 - \frac{N}{K} \right) + N \left(-\frac{N'}{K} \right) \right) = aN' \left(1 - \frac{2N}{K} \right),$$

et N'' s'annule en un unique instant \hat{t} défini par

$$\hat{t} = t_0 + \frac{1}{a} \ln \left(\frac{K}{N_0} - 1 \right) \quad (20)$$

et N est strictement convexe sur $] -\infty, \hat{t}]$ et strictement concave sur $[\hat{t}, +\infty [$.

Modèle de Verhulst

Étude sommaire

On vérifie que :

- d'après (19b), il vient $\lim_{t \rightarrow -\infty} N(t) = 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = K$ et $0 < N < K$;
- d'après (15), $N' > 0$ et N est strictement croissante ;
- Grâce à (15), on a

$$N''(t) = a \left(N' \left(1 - \frac{N}{K} \right) + N \left(-\frac{N'}{K} \right) \right) = aN' \left(1 - \frac{2N}{K} \right),$$

et N'' s'annule en un unique instant \hat{t} défini par

$$\hat{t} = t_0 + \frac{1}{a} \ln \left(\frac{K}{N_0} - 1 \right) \quad (20)$$

et N est strictement convexe sur $] -\infty, \hat{t}]$ et strictement concave sur $[\hat{t}, +\infty [$.

- On en déduit aussi (17).

Modèle de Verhulst

Étude sommaire

- On a aussi

$$N(\hat{t}) = \frac{K}{2}. \quad (21)$$

- La courbe est symétrique par rapport au point d'inflexion $(\hat{t}, \frac{K}{2})$.

Modèle de Verhulst

Notation et représentation

Pour toute la suite, on pose, pour $K > 0$, $N_0 \in]0, K[$, $a > 0$, $t_0 \in \mathbb{R}$,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad N_{K,N_0,a,t_0}(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N_0} - 1\right) e^{-a(t-t_0)}}, \quad (22)$$

notée parfois $N(t)$ quand il n'y a pas d'ambiguïté. La fonction définie par (22) est appelée fonction logistique, liée à la fonction sigmoïde.

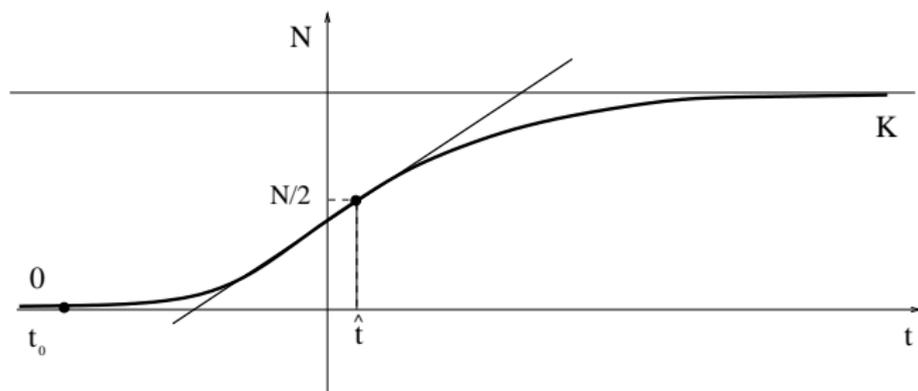
Modèle de Verhulst

Notation et représentation

Pour toute la suite, on pose, pour $K > 0$, $N_0 \in]0, K[$, $a > 0$, $t_0 \in \mathbb{R}$,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad N_{K,N_0,a,t_0}(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N_0} - 1\right) e^{-a(t-t_0)}}, \quad (22)$$

notée parfois $N(t)$ quand il n'y a pas d'ambiguïté. La fonction définie par (22) est appelée fonction logistique, liée à la fonction sigmoïde.



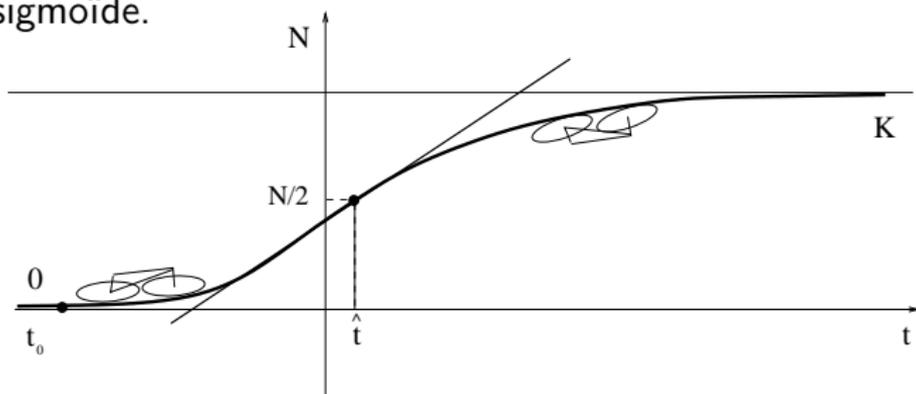
Modèle de Verhulst

Notation et représentation

Pour toute la suite, on pose, pour $K > 0$, $N_0 \in]0, K[$, $a > 0$, $t_0 \in \mathbb{R}$,

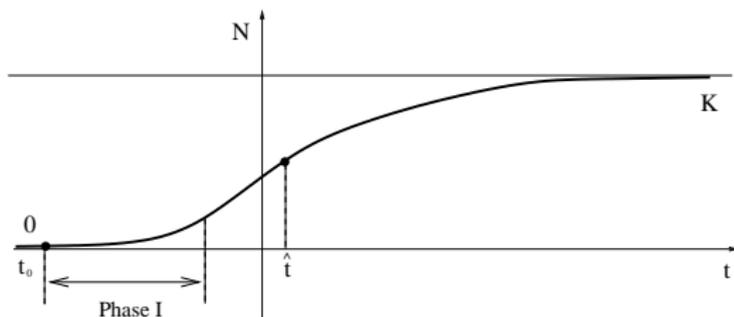
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad N_{K,N_0,a,t_0}(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N_0} - 1\right) e^{-a(t-t_0)}}, \quad (22)$$

notée parfois $N(t)$ quand il n'y a pas d'ambiguïté. La fonction définie par (22) est appelée fonction logistique, liée à la fonction sigmoïde.



Modèle de Verhulst

Étude sommaire et Analyse *a posteriori*



Phase I :

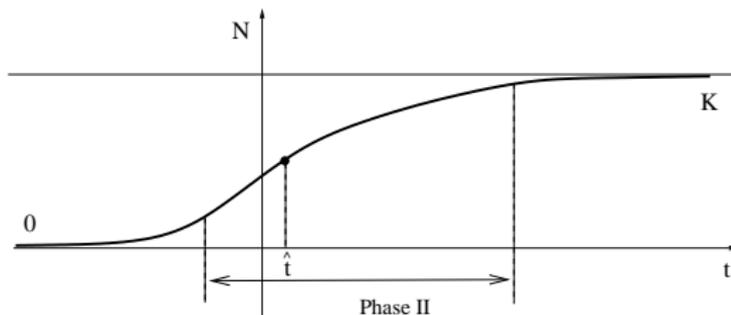
Si $N_0 \ll K$ et $t \approx t_0$, alors on a $\frac{K}{N_0} - 1 \approx \frac{K}{N_0}$ et donc

$$N(t) \approx \frac{K}{1 + \frac{K}{N_0} e^{-a(t-t_0)}} = \frac{K}{\frac{K}{N_0} e^{-a(t-t_0)}} = N_0 e^{a(t-t_0)}$$

et on retrouve le comportement de Malthus du transparent 43 : le taux de croissance r défini par (16) est maximal et proche de a .

Modèle de Verhulst

Étude sommaire et Analyse *a posteriori*

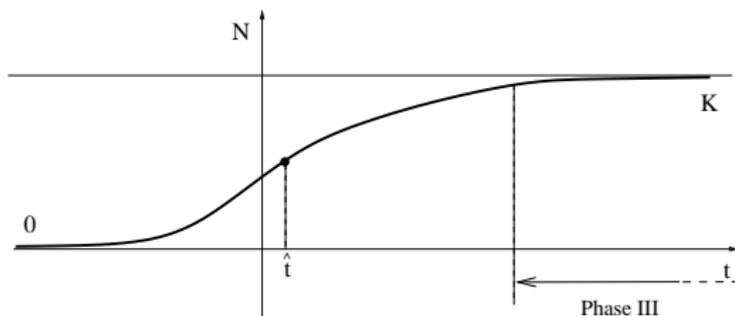


Phase II :

Ensuite, la courbe s'infléchit, le taux de croissance r décroît et la courbe de population est convexe jusqu'à \hat{t} et concave ensuite.

Modèle de Verhulst

Étude sommaire et Analyse *a posteriori*

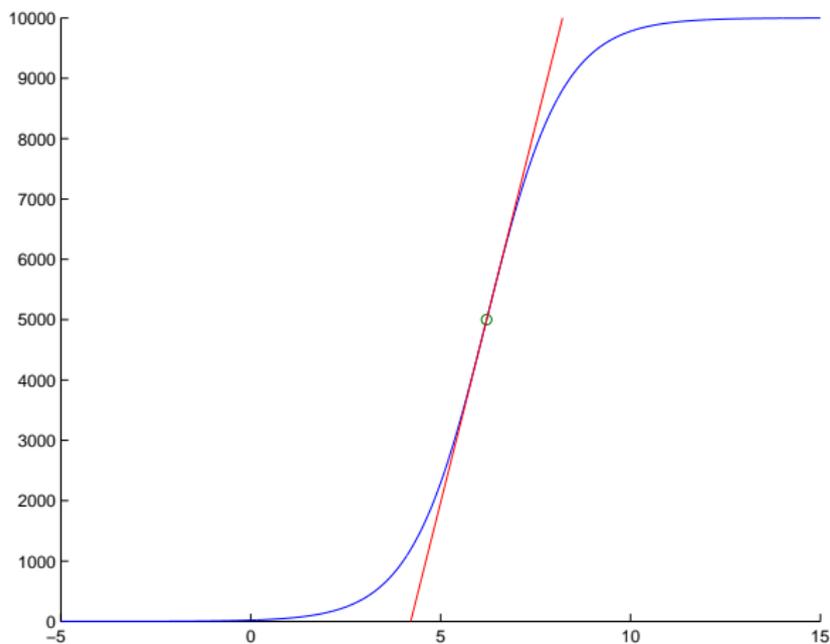


Phase III :

Enfin, si $t \gg t_0$, $N(t) \approx \lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = K$ et le taux de croissance tend vers zéro.

Modèle de Verhulst

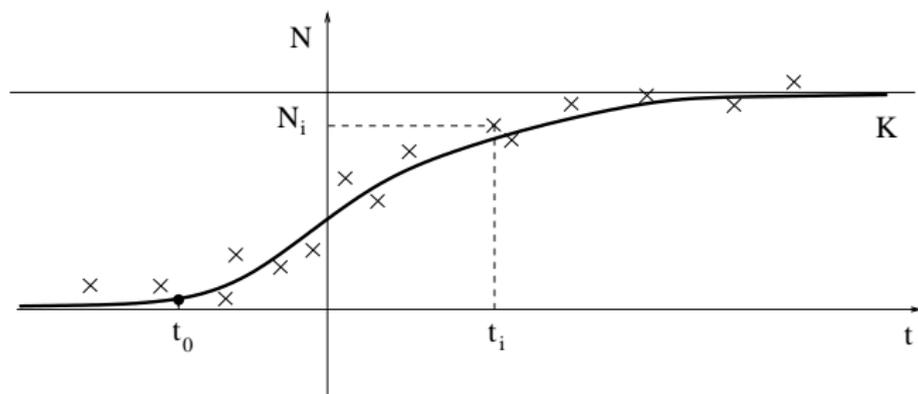
Représentation pour $K = 10000$, $N_0 = 20$, $a = 1$, $t_0 = 0$



Modèle de Verhulst

Régression logistique

Contrairement à la régression linéaire simple à mettre en œuvre pour le modèle de Malthus (voir (13)), il faut trouver les paramètres $K > 0$, $N_0 \in]0, K[$, $a > 0$, $t_0 \in \mathbb{R}$ tels que la fonction N_{K,N_0,a,t_0} définie par (22) passe le plus proche possible du nuage de points expérimental $(t_i, N_i)_{0 \leq i \leq P}$ où $N_i = N(t_i)$.



Modèle de Verhulst

Régression logistique (identification approchée)

On utilise tout d'abord l'identification approchée à partir d'une méthode proposée dans [Per11, Annexe 3 : régressions logistiques] : la méthode dite de Perrin.

Modèle de Verhulst

Régression logistique (identification approchée)

On utilise tout d'abord l'identification approchée à partir d'une méthode proposée dans [Per11, Annexe 3 : régressions logistiques] : la méthode dite de Perrin.

On ne pas fait nécessairement l'hypothèse que les points t_i sont équidistants comme c'est fait dans [Per11]. On écrit, d'après (15), pour tout $i \in \{0, \dots, P - 1\}$:

$$\frac{N'(t_i)}{N(t_i)} = a \left(1 - \frac{N(t_i)}{K} \right).$$

et l'approximation

$$N'(t_i) \approx \frac{N(t_{i+1}) - N(t_i)}{t_{i+1} - t_i},$$

Modèle de Verhulst

Régression logistique (identification approchée)

On utilise tout d'abord l'identification approchée à partir d'une méthode proposée dans [Per11, Annexe 3 : régressions logistiques] : la méthode dite de Perrin.

On ne fait pas nécessairement l'hypothèse que les points t_i sont équidistants comme c'est fait dans [Per11]. On écrit, d'après (15), pour tout $i \in \{0, \dots, P-1\}$:

$$\frac{N'(t_i)}{N(t_i)} = a \left(1 - \frac{N(t_i)}{K} \right).$$

et l'approximation

$$N'(t_i) \approx \frac{N(t_{i+1}) - N(t_i)}{t_{i+1} - t_i},$$

et donc

$$\frac{1}{N_{i+1}} \frac{N_{i+1} - N_i}{t_{i+1} - t_i} = a - \frac{a}{K} N_i.$$

Modèle de Verhulst

Régression logistique (identification approchée)

On a donc finalement :

$$\forall i \in \{0, \dots, P-1\}, \quad Y_i = a - \frac{a}{K} X_i \quad (23)$$

où

$$Y_i = \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \left(\frac{N_{i+1}}{N_i} - 1 \right), \quad (24a)$$

$$X_i = N_i. \quad (24b)$$

Il suffit donc de faire une régression linéaire habituelle sur le nuage de points $(X_i, Y_i)_{0 \leq i \leq P-1}$, qui fournira a et a/K donc K .

Modèle de Verhulst

Régression logistique (identification approchée)

On a donc finalement :

$$\forall i \in \{0, \dots, P-1\}, \quad Y_i = a - \frac{a}{K} X_i \quad (23)$$

où

$$Y_i = \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \left(\frac{N_{i+1}}{N_i} - 1 \right), \quad (24a)$$

$$X_i = N_i. \quad (24b)$$

Il suffit donc de faire une régression linéaire habituelle sur le nuage de points $(X_i, Y_i)_{0 \leq i \leq P-1}$, qui fournira a et a/K donc K . Enfin, t_0 est connu et N_0 sera choisi égal à $N(t_0)$.

Modèle de Verhulst

Régression logistique (identification approchée)

On a donc finalement :

$$\forall i \in \{0, \dots, P-1\}, \quad Y_i = a - \frac{a}{K} X_i \quad (23)$$

où

$$Y_i = \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \left(\frac{N_{i+1}}{N_i} - 1 \right), \quad (24a)$$

$$X_i = N_i. \quad (24b)$$

Il suffit donc de faire une régression linéaire habituelle sur le nuage de points $(X_i, Y_i)_{0 \leq i \leq P-1}$, qui fournira a et a/K donc K . Enfin, t_0 est connu et N_0 sera choisi égal à $N(t_0)$. Malheureusement, comme le dit lui même Daniel Perrin, ces résultats sont parfois "sujets à caution".

Modèle de Verhulst

Régression logistique (problème aux moindres carrés)

Pour palier cette difficulté, on affine la recherche de (K, N_0, a) en utilisant la méthode des moindres carrés (utilisée aussi en régression linéaire). On cherche à minimiser l'écart entre la courbe théorique donnée par N_{K, N_0, a, t_0} et les données N_j . Ici, t_0 est fixé.

Modèle de Verhulst

Régression logistique (problème aux moindres carrés)

Pour palier cette difficulté, on affine la recherche de (K, N_0, a) en utilisant la méthode des moindres carrés (utilisée aussi en régression linéaire). On cherche à minimiser l'écart entre la courbe théorique donnée par N_{K, N_0, a, t_0} et les données N_i . Ici, t_0 est fixé.

On considère donc la somme des écarts aux carrés :

$$\eta_{K, a, N_0, t_0} = \sum_{i=1}^P (N_i - N_{K, N_0, a, t_0}(t_i))^2. \quad (25)$$

et on cherche le triplet de paramètres $(K_0, N_{0,0}, a_0) \in \mathbb{R}_+^{*3}$ tel que

$$\eta_{K_0, a_0, N_{0,0}, t_0} = \min_{(K, a, N_0) \in \mathbb{R}_+^{*3}} \eta_{K, a, N_0, t_0}, \quad (26)$$

et on vérifiera *a posteriori* que l'on a bien $0 < N_{0,0} < K_0$.

Modèle de Verhulst

Régression logistique (problème aux moindres carrés)

- 1 C'est un problème classique (minimisation sous contraintes) que sait résoudre par exemple la fonction `lsqcurvefit.m` de Matlab. Attention, un minimum local est exhibé qui n'est pas nécessairement global !

Modèle de Verhulst

Régression logistique (problème aux moindres carrés)

- 1 C'est un problème classique (minimisation sous contraintes) que sait résoudre par exemple la fonction `lsqcurvefit.m` de Matlab. Attention, un minimum local est exhibé qui n'est pas nécessairement global !
- 2 Il faut aussi partir d'une estimation initiale de (K, a, N_0) qui sera fournie par l'approximation donnée par la régression linéaire (24).

Modèle de Verhulst

Régression logistique (problème aux moindres carrés)

- 1 C'est un problème classique (minimisation sous contraintes) que sait résoudre par exemple la fonction `lsqcurvefit.m` de Matlab. Attention, un minimum local est exhibé qui n'est pas nécessairement global !
- 2 Il faut aussi partir d'une estimation initiale de (K, a, N_0) qui sera fournie par l'approximation donnée par la régression linéaire (24).
- 3 Pour l'algorithme utilisé, voir l'aide de la fonction `lsqcurvefit.m` de Matlab.

Modèle de Verhulst

Régression logistique (problème aux moindres carrés)

- 1 C'est un problème classique (minimisation sous contraintes) que sait résoudre par exemple la fonction `lsqcurvefit.m` de Matlab. Attention, un minimum local est exhibé qui n'est pas nécessairement global !
- 2 Il faut aussi partir d'une estimation initiale de (K, a, N_0) qui sera fournie par l'approximation donnée par la régression linéaire (24).
- 3 Pour l'algorithme utilisé, voir l'aide de la fonction `lsqcurvefit.m` de Matlab.
- 4 Notons que les contraintes $(K, N_0, a) \in \mathbb{R}_+^{*3}$ ne sont pas habituelles et seront remplacées par des contraintes du type $(K, N_0, a) \in [\varepsilon, +\infty[^3$ où $\varepsilon > 0$ sera choisi petit (eps sous matlab).

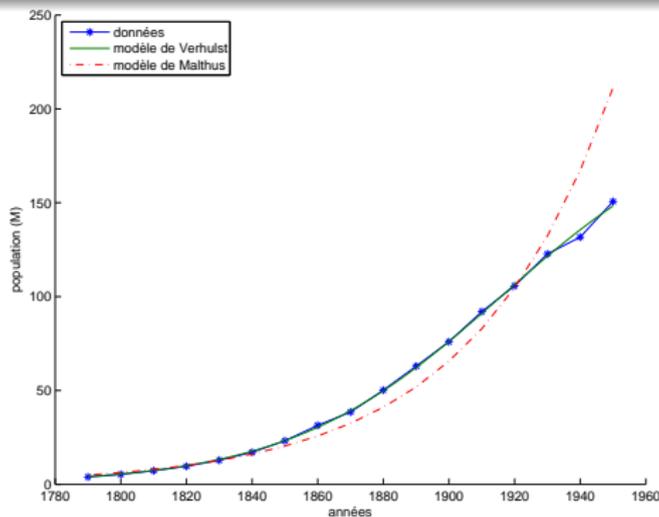
Modèle de Verhulst

Simulations (Population des USA entre 1790 et 1950).

Données issues de [Pia12a] sur la population des USA entre les années 1790 et 1950, déjà données.

Modèle de Verhulst

Simulations (Population des USA entre 1790 et 1950).



On obtient

$$K = 200.033501, \quad (27a)$$

$$a = 0.030778, \quad (27b)$$

$$N_0 = 4.078243, \quad (27c)$$

$$t_0 = 1790. \quad (27d)$$

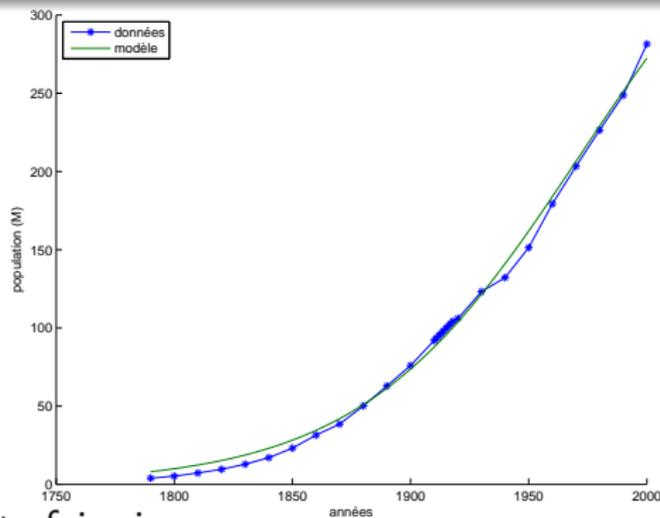
Modèle de Verhulst

Simulations (Population des USA entre 1790 et 2020).

Données issues de [Per11] sur la population des USA.

Modèle de Verhulst

Simulations (Population des USA entre 1790 et 2020).



On obtient cette fois-ci

$$K = 418.433659, \quad (28a)$$

$$a = 0.021651, \quad (28b)$$

$$N_0 = 8.110990, \quad (28c)$$

$$t_0 = 1790. \quad (28d)$$

Modèle de Verhulst

Simulations (Population des USA entre 1790 et 2020).

On se sert de ces données et de l'identification donnée par (28) pour faire une projection sur les années 2010 et 2020 obtenue sur https://fr.wikipedia.org/wiki/Démographie_des_États-Unis

données ci-dessous

| Années | Population (M) |
|--------|----------------|
| 2010 | 308.746 |
| 2020 | 331.449 |

Modèle de Verhulst

Simulations (Population des USA entre 1790 et 2020).

On se sert de ces données et de l'identification donnée par (28) pour faire une projection sur les années 2010 et 2020 obtenue sur https://fr.wikipedia.org/wiki/Démographie_des_États-Unis :

données ci-dessous

| Années | Population (M) |
|--------|----------------|
| 2010 | 308.746 |
| 2020 | 331.449 |

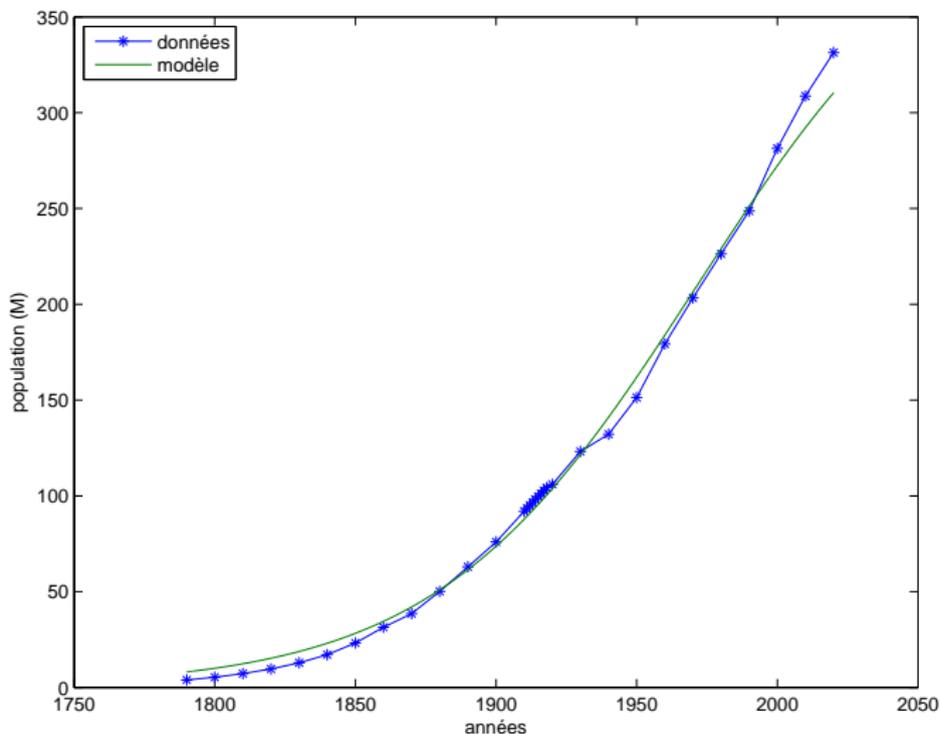
On obtient cette fois-ci les populations suivantes :

| Années | Population (M) |
|--------|----------------|
| 2010 | 292.214 |
| 2020 | 310.444 |

et la figure transparent suivant.

Modèle de Verhulst

Simulations (Population des USA entre 1790 et 2020).



Modèle de Verhulst

Simulations (Population d'un groupe d'éléphants dans le Parc Kruger entre 1905 et 2000).

Données issues de [Mat]. Extraits :

"L'éléphant africain de la savane se comptait par millions dans la savane africaine avant qu'il ne soit décimé, durant des siècles par des chasseurs, notamment pour exploiter l'ivoire de ses défenses ... À la fin du XIXe siècle, cette population étant pratiquement arrivée à extinction en Afrique du Sud, il fut décidé la création d'un parc naturel, le parc Kruger à la frontière entre l'Afrique du Sud et le Mozambique. Le premier responsable du parc en 1903 ne trouva aucun éléphant à son arrivée mais un petit groupe de 10 éléphants furent repérés en 1905, vraisemblablement venu du Mozambique. Des mesures de protection strictes, à la fois des animaux et de leur habitat furent décidées dans ce parc et maintenues tout au long du XX^e siècle. Elles permirent une croissance "naturelle" de cette population, qui fut d'abord lente jusque dans les années 30, puis très rapide jusque dans les années 60. C'est alors qu'on observa à la fois un ralentissement du taux de croissance et, en même temps, un début de dégradation par les éléphants d'autres espèces de l'écosystème comme les baobabs par exemple."

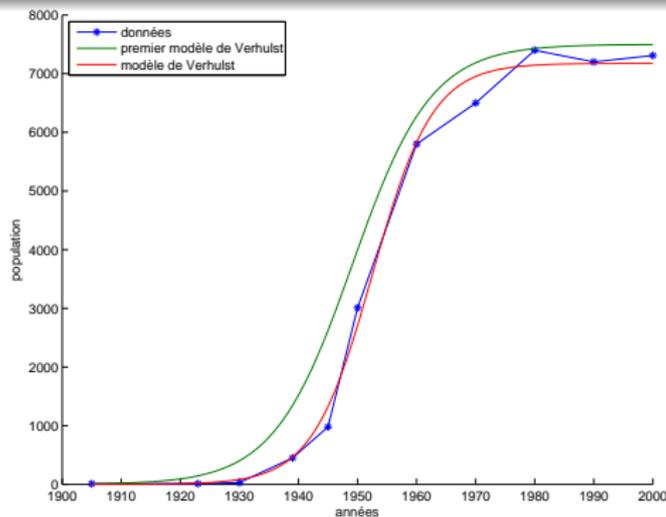
Modèle de Verhulst

Simulations (Population d'un groupe d'éléphants dans le Parc Kruger entre 1905 et 2000).

| Années | Population |
|--------|------------|
| 1905 | 10 |
| 1923 | 13 |
| 1930 | 29 |
| 1939 | 450 |
| 1945 | 980 |
| 1950 | 3010 |
| 1960 | 5800 |
| 1970 | 6500 |
| 1980 | 7400 |
| 1990 | 7200 |
| 2000 | 7310 |

Modèle de Verhulst

Simulations (Population d'un groupe d'éléphants dans le Parc Kruger entre 1905 et 2000).



On obtient

$$K = 7177.156359,$$

$$a = 0.196672,$$

$$N_0 = 0.623226,$$

$$t_0 = 1905.$$

Modèle de Verhulst

Simulations (Population d'un groupe d'éléphants dans le Parc Kruger entre 1905 et 2000).

On obtient un résultat de meilleure qualité que celui obtenu dans [Mat] donné par (voir (25))

$$K = 7500, \quad (29)$$

$$\eta_{K,a,N_0,t_0} = 5.43581 \cdot 10^6. \quad (30)$$

puisque que l'on obtient un écart plus faible :

$$\eta_{K,a,N_0,t_0} = 5.03908 \cdot 10^5.$$

Modèles de Malthus et Verhulst

généralisation

Les équations différentielles gérant les modèles de Malthus et Verhulst, données par (10) et (15) sont du type

$$N'(t) = r(N(t)) N(t) \quad (31)$$

où le taux de la croissance de la population r est constant (modèle de Malthus) ou est une fonction décroissante de N , donné par (16)).

Modèles de Malthus et Verhulst

généralisation

Les équations différentielles gérant les modèles de Malthus et Verhulst, données par (10) et (15) sont du type

$$N'(t) = r(N(t)) N(t) \quad (31)$$

où le taux de la croissance de la population r est constant (modèle de Malthus) ou est une fonction décroissante de N , donné par (16)).

Nous rencontrerons d'autres modèles décrits par des équations différentielles du type

$$N'(t) = r(N(t)) N(t) \quad (32)$$

où r est une fonction quelconque, voire encore

$$N'(t) = r(t) N(t). \quad (33)$$

Modèle de Verhulst

Critiques

Nous avons rencontré les difficultés suivantes avec le modèle de Verhulst :

- 1 Si le modèle décrit la réalité sur une plage de temps donnée, il n'est pas aisé de faire des projections, en extrapolant les données¹².

12. Voir le transparent 61 et l'exercice de TD 1.2 (et le point 2(c)iii page 3 de sa correction).

Modèle de Verhulst

Critiques

Nous avons rencontré les difficultés suivantes avec le modèle de Verhulst :

- 1 Si le modèle décrit la réalité sur une plage de temps donnée, il n'est pas aisé de faire des projections, en extrapolant les données¹².
- 2 L'hypothèse de base de Verhulst est la décroissance de r (en fonction de N ou de t) ce qui implique la décroissance de $r(N(t))$, voir transparents 40 ou (17)).

12. Voir le transparent 61 et l'exercice de TD 1.2 (et le point 2(c)iii page 3 de sa correction).

Modèle de Verhulst

Critiques

Nous avons rencontré les difficultés suivantes avec le modèle de Verhulst :

- 1 Si le modèle décrit la réalité sur une plage de temps donnée, il n'est pas aisé de faire des projections, en extrapolant les données¹².
- 2 L'hypothèse de base de Verhulst est la décroissance de r (en fonction de N ou de t) ce qui implique la décroissance de $r(N(t))$, voir transparents 40 ou (17)). Le cas non étudié ($N_0 > K$) est aussi possible, mais dans ce cas, N est décroissante et tend encore vers la capacité d'accueil K [Per11 ; Pia13 ; Pia12b]. Bref, dans tous les cas, r est décroissant et N est monotone.

12. Voir le transparent 61 et l'exercice de TD 1.2 (et le point 2(c)iii page 3 de sa correction).

Modèle de Verhulst

Critiques

Notons que de façon générale, si y est une solution maximale de l'équation différentielle autonome¹³

$$\begin{aligned}\forall t \geq t_0, \quad y'(t) &= f(y(t)), \\ y(t_0) &= y_0,\end{aligned}$$

alors si y prend ses valeurs dans une partie de \mathbb{R} où f ne s'annule pas, y est strictement monotone.

13. Dont on suppose l'existence et l'unicité de la solution. Voir par exemple [BM03, Chapitre 5] ou [DB22, chapitre "Équations différentielles (ordinaires)"], [Sch01 ; CM84 ; Puj].

Modèle de Verhulst

Critiques

Notons que de façon générale, si y est une solution maximale de l'équation différentielle autonome¹³

$$\begin{aligned}\forall t \geq t_0, \quad y'(t) &= f(y(t)), \\ y(t_0) &= y_0,\end{aligned}$$

alors si y prend ses valeurs dans une partie de \mathbb{R} où f ne s'annule pas, y est strictement monotone.

En effet, si y n'est pas strictement monotone, y' s'annule en un réel t (sinon y' est de signe strict constant et y est strictement monotone) et $f(y(t)) = y'(t) = 0$, ce qui est absurde.

13. Dont on suppose l'existence et l'unicité de la solution. Voir par exemple [BM03, Chapitre 5] ou [DB22, chapitre "Équations différentielles (ordinaires)"], [Sch01 ; CM84 ; Puj].

Modèle de Verhulst

Critiques

Notons que de façon générale, si y est une solution maximale de l'équation différentielle autonome¹³

$$\begin{aligned}\forall t \geq t_0, \quad y'(t) &= f(y(t)), \\ y(t_0) &= y_0,\end{aligned}$$

alors si y prend ses valeurs dans une partie de \mathbb{R} où f ne s'annule pas, y est strictement monotone.

En effet, si y n'est pas strictement monotone, y' s'annule en un réel t (sinon y' est de signe strict constant et y est strictement monotone) et $f(y(t)) = y'(t) = 0$, ce qui est absurde.

C'est bien le cas de la solution du modèle de Verhulst.

13. Dont on suppose l'existence et l'unicité de la solution. Voir par exemple [BM03, Chapitre 5] ou [DB22, chapitre "Équations différentielles (ordinaires)"], [Sch01; CM84; Puj].

Modèle de Verhulst

Critiques

Ces deux difficultés impliquent de choisir d'autres modèles pour rendre compte de

- transition démographique et
- la prospective démographique,

deux thématiques qui constituent la partie suivante de cet exposé.

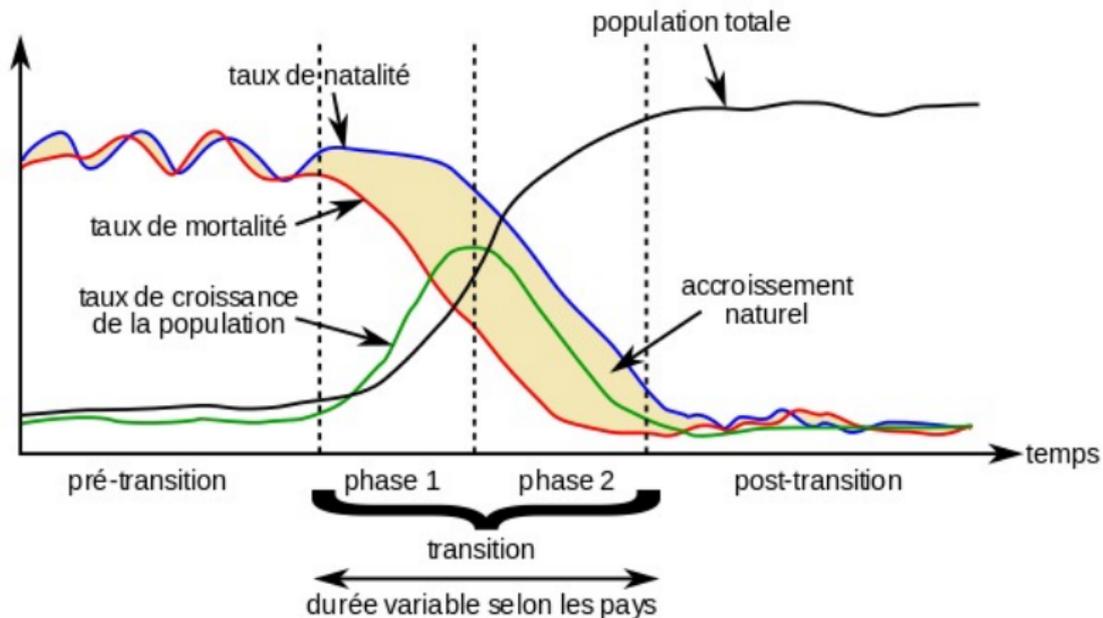
Sommaire

- 1 Modèles simples de croissance démographique (Malthus et Verhulst)
- 2 La transition démographique et la prospective démographique
- 3 Perspectives et conclusions

Transition démographique

Principe : trois phases

On renvoie à https://fr.wikipedia.org/wiki/Transition_démographique et <https://www.kartable.fr/ressources/geographie/cours/des-trajectoires-demographiques-differentiees/51043>



Courbe typique de la transition démographique avec trois phases.

Transition démographique

modélisation

Cette étape de transition est nécessaire avant de passer à suite (prospectives).

Le taux de croissance de la population est croissant puis décroissant et le modèle de Verhulst ne peut être utilisé ici (transparent 68).

Transition démographique

modélisation

Cette étape de transition est nécessaire avant de passer à suite (prospectives).

Le taux de croissance de la population est croissant puis décroissant et le modèle de Verhulst ne peut être utilisé ici (transparent 68).

Peut-on trouver un modèle avec l'équation différentielle (31) où r n'est pas nécessairement croissant ?

Transition démographique

modélisation

Cette étape de transition est nécessaire avant de passer à suite (prospectives).

Le taux de croissance de la population est croissant puis décroissant et le modèle de Verhulst ne peut être utilisé ici (transparent 68).

Peut-on trouver un modèle avec l'équation différentielle (31) où r n'est pas nécessairement croissant ?

Attention, en vertu du transparent 69, il est fondamental que

r soit strictement positif et N strictement croissant. (34)

Transition démographique

Tentative de modélisation

Nous procédons comme précédemment (à partir du transparent 53 à 54) : soit $t_0 \in \mathbb{R}$. On cherche une fonction $r_\xi : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ qui dépend de plusieurs paramètres, notés ξ qui appartiennent à une partie de \mathbb{R}^n et on détermine ξ pour que la solution de

$$N'(t) = r_\xi(N(t)) N(t), \quad (35a)$$

$$N(t_0) = N_0, \quad (35b)$$

soit la plus proche de possible des données expérimentales $(t_i, N_i)_{0 \leq i \leq P}$.

Transition démographique

Tentative de modélisation

Nous procédons comme précédemment (à partir du transparent 53 à 54) : soit $t_0 \in \mathbb{R}$. On cherche une fonction $r_\xi : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ qui dépend de plusieurs paramètres, notés ξ qui appartiennent à une partie de \mathbb{R}^n et on détermine ξ pour que la solution de

$$N'(t) = r_\xi(N(t)) N(t), \quad (35a)$$

$$N(t_0) = N_0, \quad (35b)$$

soit la plus proche de possible des données expérimentales $(t_i, N_i)_{0 \leq i \leq P}$.

D'après (34), il est nécessaire que

$$\text{La fonction } r_\xi \text{ est strictement positive ;} \quad (36a)$$

$$\text{Les valeurs } (N_i)_{0 \leq i \leq P} \text{ sont strictement croissantes.} \quad (36b)$$

Transition démographique

Tentative de modélisation

- ① On écrit comme dans le transparent 54 :

$$\forall i \in \{0, \dots, P-1\}, \quad Y_i = r_{\xi}(N_i), \quad (37)$$

où

$$Y_i = \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \left(\frac{N_{i+1}}{N_i} - 1 \right). \quad (38)$$

Transition démographique

Tentative de modélisation

- ① On écrit comme dans le transparent 54 :

$$\forall i \in \{0, \dots, P-1\}, \quad Y_i = r_\xi(N_i), \quad (37)$$

où

$$Y_i = \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \left(\frac{N_{i+1}}{N_i} - 1 \right). \quad (38)$$

- ② Selon le type de la fonction r_ξ , on déterminera le meilleur paramètre ξ_0 de façon à minimiser la quantité

$$\eta_\xi = \sum_{i=0}^{P-1} (Y_i - r_\xi(X_i))^2. \quad (39)$$

On utilise ici implicitement l'hypothèse (36b).

Transition démographique

Tentative de modélisation

- ① On procède ensuite comme dans le transparent 55 : on pose

$$\widehat{\eta}_{\xi, N_0} = \sum_{i=0}^P (N_i - N_{\xi, N_0}(t_i))^2, \quad (40)$$

où N_{ξ, N_0} est la solution de (35).

Transition démographique

Tentative de modélisation

- ① On procède ensuite comme dans le transparent 55 : on pose

$$\hat{\eta}_{\xi, N_0} = \sum_{i=0}^P (N_i - N_{\xi, N_0}(t_i))^2, \quad (40)$$

où N_{ξ, N_0} est la solution de (35).

- ② On cherche la valeur de (ξ, N_0) qui minimise $\hat{\eta}_{\xi, N_0}$ en prenant comme valeur initiale $(\xi_0, N(t_0))$ où ξ_0 a été déterminé précédemment.

Transition démographique

Tentative de modélisation : localement, vers le modèle de Malthus

Si on choisit r_ξ constante, on retrouve le modèle de Malthus.

Transition démographique

Tentative de modélisation : localement, vers le modèle de Malthus

Si on choisit r_ξ constante, on retrouve le modèle de Malthus.

Ou si on l'on fait un développement limité à l'ordre 0 en N_0 de r_ξ :

$$r_\xi(N) = r_\xi(N_0),$$

puisque (35a) devient, pour $t \approx t_0$

$$N'(t) = r_\xi(N(t)) N(t) = r_\xi(N_0) N(t),$$

et on retrouve l'équation différentielle (10).

Transition démographique

Tentative de modélisation : localement, vers le modèle de Verhulst

Si on choisit r_ξ affine avec

$$r_\xi(N_0) > 0, \quad (41a)$$

$$r'_\xi(N_0) < 0, \quad (41b)$$

la fonction $N \mapsto r(N)$ est strictement positive et strictement décroissante (pour N proche de $N_0 > 0$) et on retrouve le modèle de Verhulst décrit par l'équation différentielle (15).

Transition démographique

Tentative de modélisation : localement, vers le modèle de Verhulst

Si on choisit r_ξ affine avec

$$r_\xi(N_0) > 0, \quad (41a)$$

$$r'_\xi(N_0) < 0, \quad (41b)$$

la fonction $N \mapsto r(N)$ est strictement positive et strictement décroissante (pour N proche de $N_0 > 0$) et on retrouve le modèle de Verhulst décrit par l'équation différentielle (15).

Ou si on l'on fait un développement limité à l'ordre 1 en N en N_0 de r_ξ :

$$\begin{aligned} r_\xi(N) &= r_\xi(N_0) + r'_\xi(N_0)(N - N_0), \\ &= (r_\xi(N_0) - r'_\xi(N_0)N_0) + r'_\xi(N_0)N \end{aligned}$$

et on retrouve, avec les hypothèses (41), pour $t \approx t_0$ l'équation différentielle (31) avec (15).

Prospective démographique

Enjeux de l'humanité

La plupart des pays du monde ont (pour ceux dits "développés") dépassé ou sont en train de franchir (ceux dit "en développement") la phase de transition. L'enjeu est donc de prévoir la progression de la démographie mondiale, après cette phase.

Prospective démographique

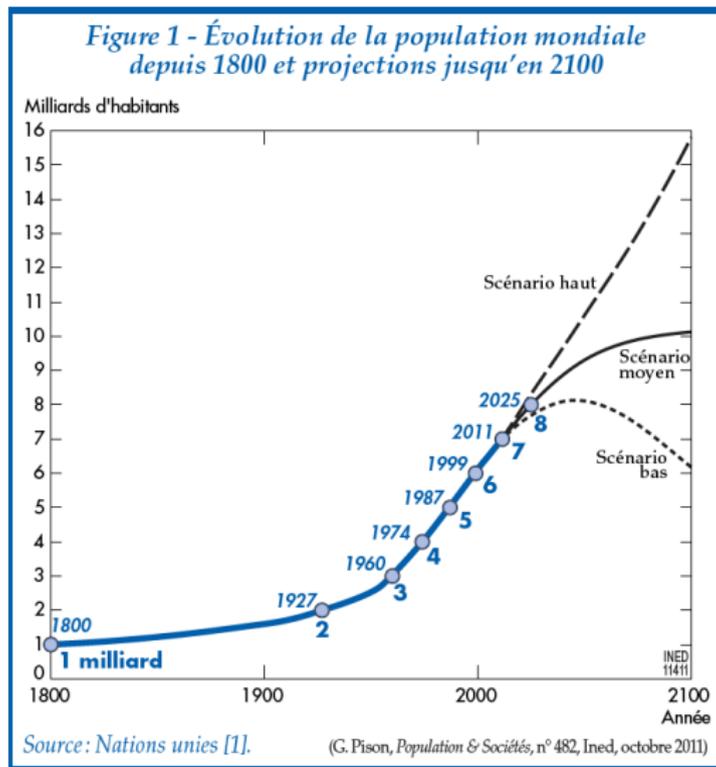
Enjeux de l'humanité

La plupart des pays du monde ont (pour ceux dits "développés") dépassé ou sont en train de franchir (ceux dit "en développement") la phase de transition. L'enjeu est donc de prévoir la progression de la démographie mondiale, après cette phase.

L'ONU a prévu quatre scénarios jusqu'en 2100. Voir https://fr.wikipedia.org/wiki/Prospective_démographique, [Pis11] et les données dans <https://population.un.org/wpp/>.

Prospective démographique

Population mondiale



Prospective démographique

Population mondiale (hypothèse de fertilité constante)

Figure 1. Population of the world, 1950-2100, according to different projections and variants

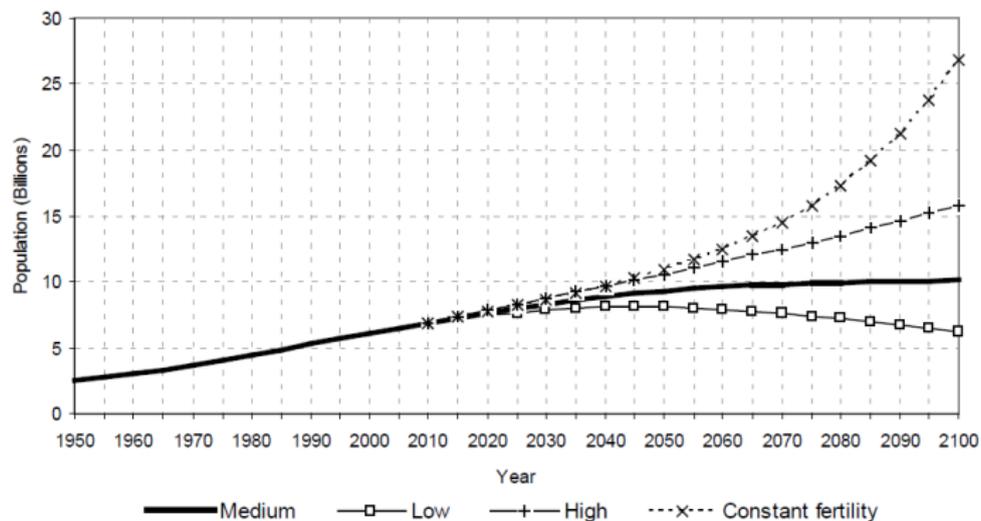


Figure issue de <https://www.un.org/en/development/desa/population/publications/pdf/trends/WPP2010/>

WPP2010_Volume-I_Comprehensive-Tables.pdf

Prospective démographique

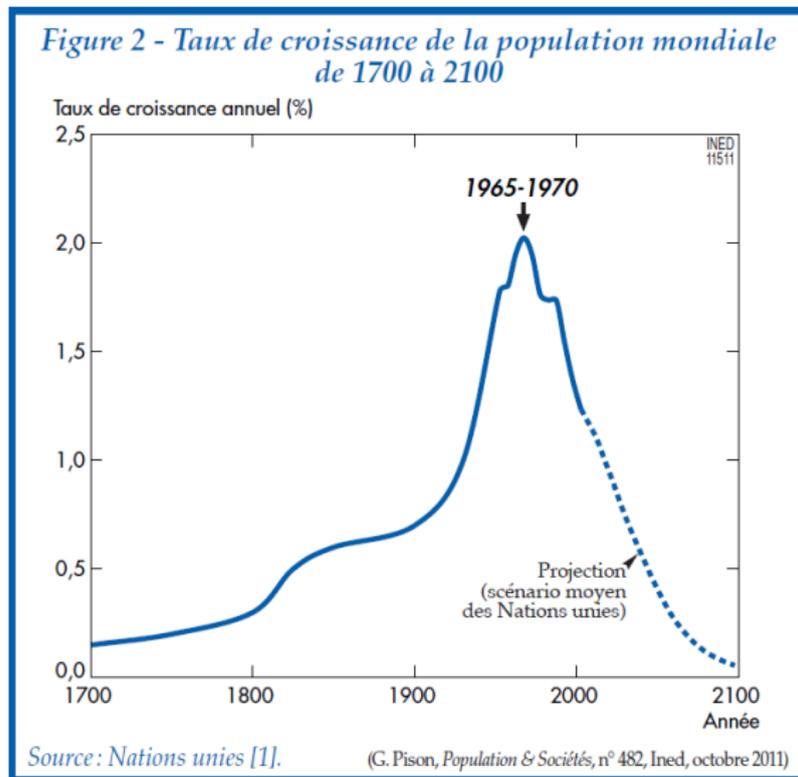
Population mondiale : différents scénarios et projection en 2100.

| scénario | population (G) |
|---------------------|----------------|
| bas | 6.17 |
| moyen | 10.10 |
| haut | 15.98 |
| fertilité constante | 26.65 |

Données issues de [Pis11] et https://www.un.org/en/development/desa/population/publications/pdf/trends/WPP2010/WPP2010_Volume-I_Comprehensive-Tables.pdf

Prospective démographique

Taux de croissance



Prospective démographique

Différentes hypothèses sur le taux de croissance

Le taux de croissance est décroissant, on est dans la phase de post-transition.

Prospective démographique

Différentes hypothèses sur le taux de croissance

Le taux de croissance est décroissant, on est dans la phase de post-transition.

Vues les difficultés de la modélisation de Verhulst (voir transparents 68 et 69), il n'est pas possible de prendre en compte des cas où la population décroît. On souhaite donc se passer de l'hypothèse (34).

Prospective démographique

Différentes hypothèses sur le taux de croissance

Le taux de croissance est décroissant, on est dans la phase de post-transition.

Vues les difficultés de la modélisation de Verhulst (voir transparents 68 et 69), il n'est pas possible de prendre en compte des cas où la population décroît. On souhaite donc se passer de l'hypothèse (34).

Le taux de croissance ne dépend pas que la taille de la population, mais du temps et de nombreux facteurs.

Prospective démographique

Différentes hypothèses sur le taux de croissance

Le taux de croissance est décroissant, on est dans la phase de post-transition.

Vues les difficultés de la modélisation de Verhulst (voir transparents 68 et 69), il n'est pas possible de prendre en compte des cas où la population décroît. On souhaite donc se passer de l'hypothèse (34).

Le taux de croissance ne dépend pas que la taille de la population, mais du temps et de nombreux facteurs.

Est-il possible de passer du taux de croissance à la taille de la population ?

Prospective démographique

Détermination de la population

- ① Si on reprend le calcul fait dans le transparent 18 (et l'équation (7)) et que l'on ne fait plus d'hypothèse sur la dépendance entre r et N , on peut écrire :

$$r(t) = \frac{N(t + \Delta) - N(t)}{\Delta N(t)},$$

et si Δ tend vers zéro¹⁴

$$r(t) = \frac{N'(t)}{N(t)}, \quad (42)$$

14. On retrouve le point 2 du transparent 9.

Prospective démographique

Détermination de la population

- 1 Si on reprend le calcul fait dans le transparent 18 (et l'équation (7)) et que l'on ne fait plus d'hypothèse sur la dépendance entre r et N , on peut écrire :

$$r(t) = \frac{N(t + \Delta) - N(t)}{\Delta N(t)},$$

et si Δ tend vers zéro¹⁴

$$r(t) = \frac{N'(t)}{N(t)}, \quad (42)$$

- 2 Autrement dit, on retrouve l'équation différentielle (33) dans le cas simplifié suivant :

$$N'(t) = r(t)N(t). \quad (43)$$

14. On retrouve le point 2 du transparent 9.

Prospective démographique

Résolution de l'équation différentielle

Pour résoudre (43), on utilise une méthode classique¹⁵ : on suppose $N(t) > 0$ et on écrit :

$$\frac{N'(t)}{N(t)} = r(t),$$

et donc

15. Voir par exemple le chapitre "Équations différentielles (ordinaires) à coefficients constants" de [Bas22a] ou [Bas22c].

Prospective démographique

Résolution de l'équation différentielle

Pour résoudre (43), on utilise une méthode classique¹⁵ : on suppose $N(t) > 0$ et on écrit :

$$\frac{N'(t)}{N(t)} = r(t),$$

et donc

$$(\ln |N(t)|)' = r(t),$$

soit

$$N(t) = e^{\int r(t)dt},$$

15. Voir par exemple le chapitre "Équations différentielles (ordinaires) à coefficients constants" de [Bas22a] ou [Bas22c].

Prospective démographique

Résolution de l'équation différentielle

Pour résoudre (43), on utilise une méthode classique¹⁵ : on suppose $N(t) > 0$ et on écrit :

$$\frac{N'(t)}{N(t)} = r(t),$$

et donc

$$(\ln |N(t)|)' = r(t),$$

soit

$$N(t) = e^{\int r(t)dt},$$

puis finalement, grâce à la condition initiale $N(t_0) = N_0$:

$$N(t) = N_0 e^{\int_{t_0}^t r(s)ds}, \quad (44)$$

15. Voir par exemple le chapitre "Équations différentielles (ordinaires) à coefficients constants" de [Bas22a] ou [Bas22c].

Prospective démographique

Simulations (scénario moyen et à fertilité constante)

- ① On se donne : $t_0 \in \mathbb{R}$, t_p , T tels que $t_0 < t_p < T$,
- ② On suppose connus
 - r mesuré sur $[t_0, t_p]$ (voir transparent 83);
 - r estimé sur $[t_p, T]$ (voir transparent 83);
 - $N_0 = N(t_0)$ mesuré.

Prospective démographique

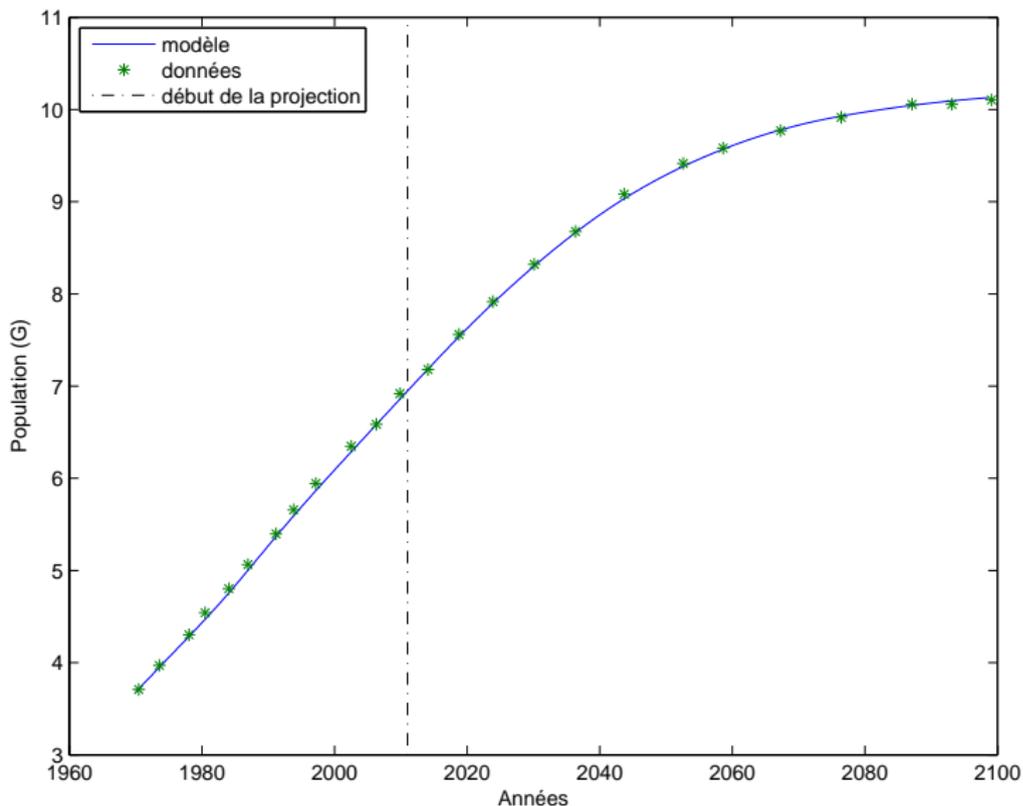
Simulations (scénario moyen et à fertilité constante)

- 1 On se donne : $t_0 \in \mathbb{R}$, t_p , T tels que $t_0 < t_p < T$,
- 2 On suppose connus
 - r mesuré sur $[t_0, t_p]$ (voir transparent 83);
 - r estimé sur $[t_p, T]$ (voir transparent 83);
 - $N_0 = N(t_0)$ mesuré.

- 1 On détermine N sur $[t_0, T]$ en utilisant (43) ou (44) et la condition initiale en t_0 ;
- 2 On compare le résultat obtenu avec les données de la figure des transparents 80 et 81.

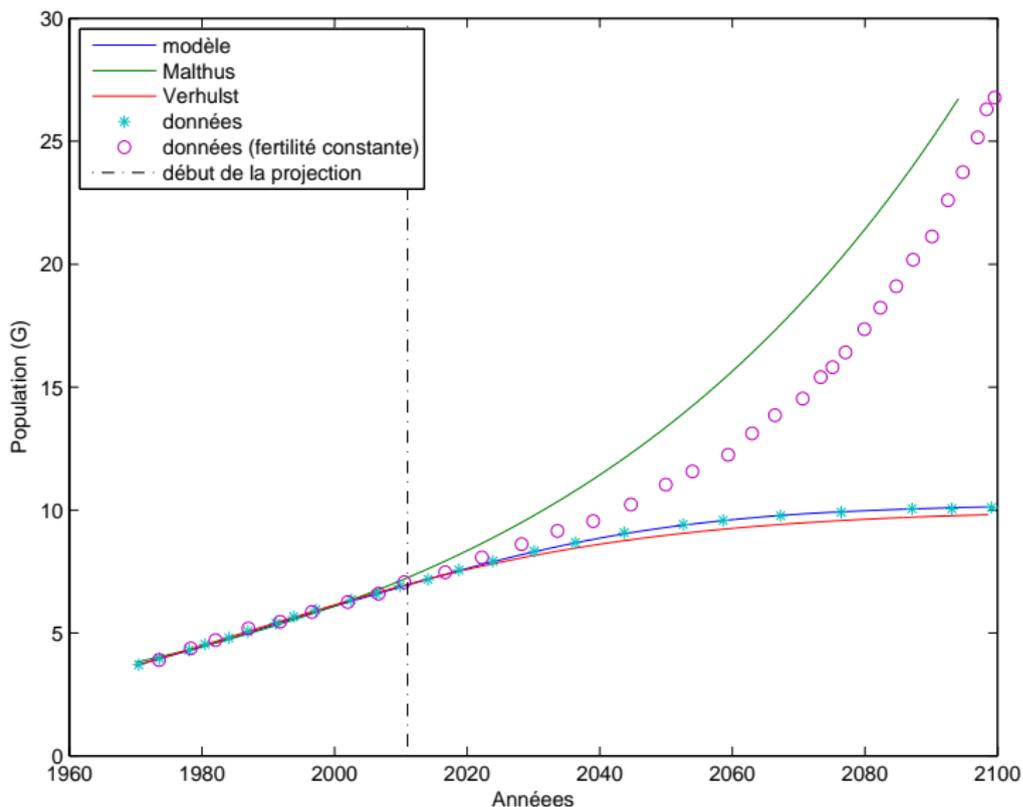
Prospective démographique

Simulations (scénarios moyen et à fertilité constante) avec $t_0 = 1970$, $t_b = 2011$,
 $T = 2098.60$.



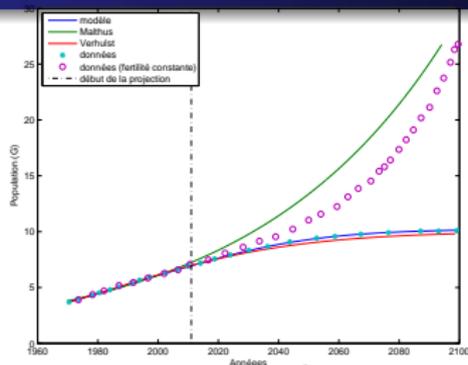
Prospective démographique

Simulations (scénarios moyen et à fertilité constante) avec $t_0 = 1970$, $t_b = 2011$,
 $T = 2098.60$.



Prospective démographique

Simulations (scénarios moyen et à fertilité constante) avec $t_0 = 1970$, $t_b = 2011$, $T = 2098.60$.

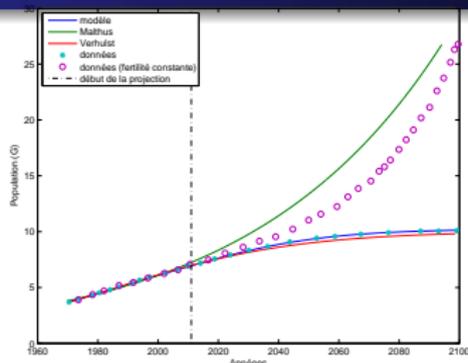


On obtient :

- Une bonne adéquation entre les données en population et N : erreur relative égale à $2.778 \cdot 10^{-3}$;

Prospective démographique

Simulations (scénarios moyen et à fertilité constante) avec $t_0 = 1970$, $t_b = 2011$, $T = 2098.60$.

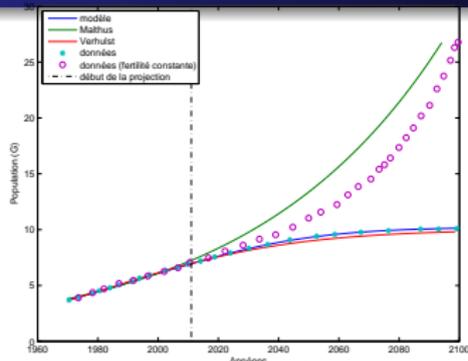


On obtient :

- Une bonne adéquation entre les données en population et N : erreur relative égale à $2.778 \cdot 10^{-3}$;
- Une assez bonne adéquation entre les données en population et le modèle de Verhulst, ce qui ne serait sûrement pas le cas pour le scénario bas puisque la population décroît (voir transparent 68) !

Prospective démographique

Simulations (scénarios moyen et à fertilité constante) avec $t_0 = 1970$, $t_b = 2011$, $T = 2098.60$.



On obtient :

- Une bonne adéquation entre les données en population et N : erreur relative égale à $2.778 \cdot 10^{-3}$;
- Une assez bonne adéquation entre les données en population et le modèle de Verhulst, ce qui ne serait sûrement pas le cas pour le scénario bas puisque la population décroît (voir transparent 68) !
- Une tendance correcte entre les données en population (hypothèse de fertilité constante) et le modèle de Malthus.

Prospective démographiques

Critiques des modèles présentés

- 1 Hétérogénéité de la population dans le monde ;

Prospective démographiques

Critiques des modèles présentés

- 1 Hétérogénéité de la population dans le monde ;
- 2 Hétérogénéité de la population dans chaque pays ;

Prospective démographiques

Critiques des modèles présentés

- 1 Hétérogénéité de la population dans le monde ;
- 2 Hétérogénéité de la population dans chaque pays ;
- 3 Absence de prise en compte de l'immigration et de l'émigration ;

Prospective démographiques

Critiques des modèles présentés

- 1 Hétérogénéité de la population dans le monde ;
- 2 Hétérogénéité de la population dans chaque pays ;
- 3 Absence de prise en compte de l'immigration et de l'émigration ;
- 4 Forte dépendance des taux de natalité et de mortalité avec de nombreux facteurs (sociaux-culturels, politiques, scientifiques ...) ou d'autres événements (épidémies, guerres, retour de guerre ...)

Prospective démographique

Liens avec le climat

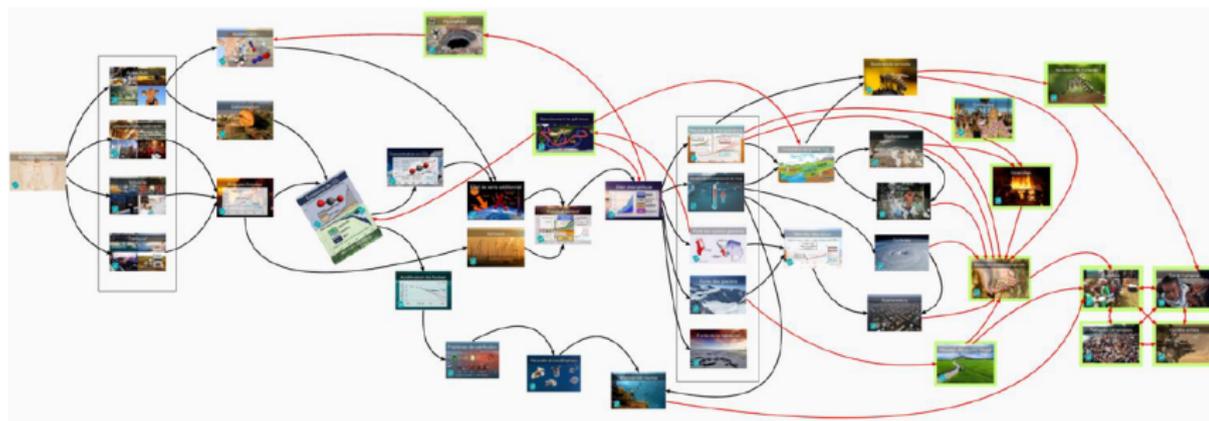
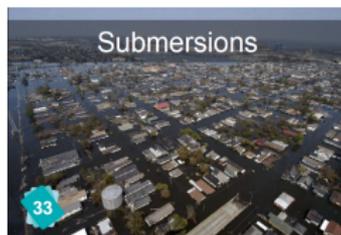
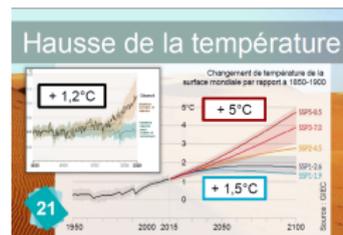
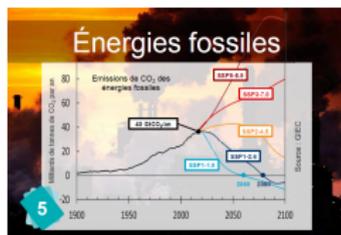


Figure (et suivantes) issues de la fresque du climat [Rin23].

Prospective démographique

Liens avec le climat



Prospective démographique

Liens avec le climat (carré d'as)



Prospective démographique

Dynamique des population et d'autres types de modèles

Voir https://fr.wikipedia.org/wiki/Dynamique_des_populations

- 1 Modèle de compétition de Lotka-Volterra qui généralise le modèle de Verhulst à deux espèces :

$$\frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 \left(1 - \frac{N_1 + \alpha_{12} N_2}{K_1} \right),$$
$$\frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 \left(1 - \frac{N_2 + \alpha_{21} N_1}{K_2} \right),$$

avec N_1 (respectivement N_2) le nombre d'individus de la première (respectivement seconde) espèce ;

Prospective démographique

Dynamique des population et d'autres types de modèles

Voir https://fr.wikipedia.org/wiki/Dynamique_des_populations

- 1 Modèle de compétition de Lotka-Volterra qui généralise le modèle de Verhulst à deux espèces :

$$\frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 \left(1 - \frac{N_1 + \alpha_{12} N_2}{K_1} \right),$$
$$\frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 \left(1 - \frac{N_2 + \alpha_{21} N_1}{K_2} \right),$$

avec N_1 (respectivement N_2) le nombre d'individus de la première (respectivement seconde) espèce ;

- 2 Modèle de propagation du coronavirus :

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI, \quad \frac{dI}{dt} = \beta SI - \alpha I, \quad \frac{dR}{dt} = \alpha I.$$

avec : S : "susceptible" d'être contaminés, I : les "infectés" et R : en anglais "recovered", c'est-à-dire ceux qui ont guéri.

Prospective démographique

Les limites à la croissance

Voir [https:](https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Les_Limites_à_la_croissance)

[//fr.m.wikipedia.org/wiki/Les_Limites_à_la_croissance](https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Les_Limites_à_la_croissance)

Les Limites à la croissance (dans un monde fini) [Mea+72 ; Mea+12] connu sous le nom de Rapport du club de Rome, ou encore de Rapport Meadows est un rapport commandé par le club de Rome et publié en 1972.

- ① Forte croissance de la population mondiale ;

Prospective démographique

Les limites à la croissance

Voir https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Les_Limites_à_la_croissance

[//fr.m.wikipedia.org/wiki/Les_Limites_à_la_croissance](https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Les_Limites_à_la_croissance)

Les Limites à la croissance (dans un monde fini) [Mea+72 ; Mea+12] connu sous le nom de Rapport du club de Rome, ou encore de Rapport Meadows est un rapport commandé par le club de Rome et publié en 1972.

- 1 Forte croissance de la population mondiale ;
- 2 Croissance encore plus forte de la croissance, avec le frein de la loi des rendements décroissants¹⁶.

16. l'analogie économique du modèle de Verhulst !

Prospective démographique

Les limites à la croissance

Voir https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Les_Limites_à_la_croissance

[//fr.m.wikipedia.org/wiki/Les_Limites_à_la_croissance](https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Les_Limites_à_la_croissance)

Les Limites à la croissance (dans un monde fini) [Mea+72 ; Mea+12] connu sous le nom de Rapport du club de Rome, ou encore de Rapport Meadows est un rapport commandé par le club de Rome et publié en 1972.

- 1 Forte croissance de la population mondiale ;
- 2 Croissance encore plus forte de la croissance, avec le frein de la loi des rendements décroissants¹⁶.
- 3 Cela provoque l'augmentation de la pollution.

16. l'analogie économique du modèle de Verhulst !

Prospective démographique

Les limites à la croissance

Voir https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Les_Limites_à_la_croissance

[//fr.m.wikipedia.org/wiki/Les_Limites_à_la_croissance](https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Les_Limites_à_la_croissance)

Les Limites à la croissance (dans un monde fini) [Mea+72 ; Mea+12] connu sous le nom de Rapport du club de Rome, ou encore de Rapport Meadows est un rapport commandé par le club de Rome et publié en 1972.

- 1 Forte croissance de la population mondiale ;
- 2 Croissance encore plus forte de la croissance, avec le frein de la loi des rendements décroissants¹⁶.
- 3 Cela provoque l'augmentation de la pollution.
- 4 Insuffisance des ressources naturelles qui ne suivent plus.

16. l'analogie économique du modèle de Verhulst !

Prospective démographique

Les limites à la croissance

Voir https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Les_Limites_à_la_croissance

[//fr.m.wikipedia.org/wiki/Les_Limites_à_la_croissance](https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Les_Limites_à_la_croissance)

Les Limites à la croissance (dans un monde fini) [Mea+72 ; Mea+12] connu sous le nom de Rapport du club de Rome, ou encore de Rapport Meadows est un rapport commandé par le club de Rome et publié en 1972.

- 1 Forte croissance de la population mondiale ;
- 2 Croissance encore plus forte de la croissance, avec le frein de la loi des rendements décroissants¹⁶.
- 3 Cela provoque l'augmentation de la pollution.
- 4 Insuffisance des ressources naturelles qui ne suivent plus.
- 5 \implies Interdépendance de toutes ces notions et "cercles vicieux".

16. l'analogie économique du modèle de Verhulst !

Prospective démographique

Les limites à la croissance : retour aux fondamentaux !

Ce rapport se fonde sur un modèle de dynamique des systèmes (world3) dont l'évolution est simulée informatiquement pour différents scénarios.

Il n'est pas question d'étudier ce modèle très complexe mais juste d'en décrire sommairement quelques lignes, en guise de conclusion.

Sommaire

- 1 Modèles simples de croissance démographique (Malthus et Verhulst)
- 2 La transition démographique et la prospective démographique
- 3 Perspectives et conclusions

Perspectives

Les limites à la croissance : le modèle world 3

Voir <https://fr.m.wikipedia.org/wiki/World3>

Ce modèle est résumé dans le livre [Mea+72 ; Mea+12] et décrit précisément dans [L M+74]. Première version de 1972, puis réactualisée en 1992 et 2004 [MMR22 ; MRM04].

Perspectives

Les limites à la croissance : le modèle world 3

Voir <https://fr.m.wikipedia.org/wiki/World3>

Ce modèle est résumé dans le livre [Mea+72 ; Mea+12] et décrit précisément dans [L M+74]. Première version de 1972, puis réactualisée en 1992 et 2004 [MMR22 ; MRM04].

Il s'agit d'un ensemble d'équations différentielles liant différentes variables (315 pour la version de 2004), ces variables étant classées en secteurs et sous-secteurs, dont par exemple :

- 1 La population, divisées en 4 sous-secteurs ;
- 2 Le capital, contenant industrie, services, emplois ;
- 3 L'agriculture ;
- 4 Les ressources non renouvelables ;
- 5 La pollution.

Perspectives

Les limites à la croissance : le modèle world 3

Ces équations forment un vaste système différentiel du type

$$Y'(t) = F(t, Y(t)),$$

Perspectives

Les limites à la croissance : le modèle world 3

Ces équations forment un vaste système différentiel du type

$$Y'(t) = F(t, Y(t)),$$

De nombreuses des boucle de rétroaction (équation différentielle) liant les variables entre elles à la dérivée de l'une d'elles ;

Perspectives

Les limites à la croissance : le modèle world 3

Ces équations forment un vaste système différentiel du type

$$Y'(t) = F(t, Y(t)),$$

De nombreuses des boucle de rétroaction (équation différentielle) liant les variables entre elles à la dérivée de l'une d'elles ;

Par exemple :

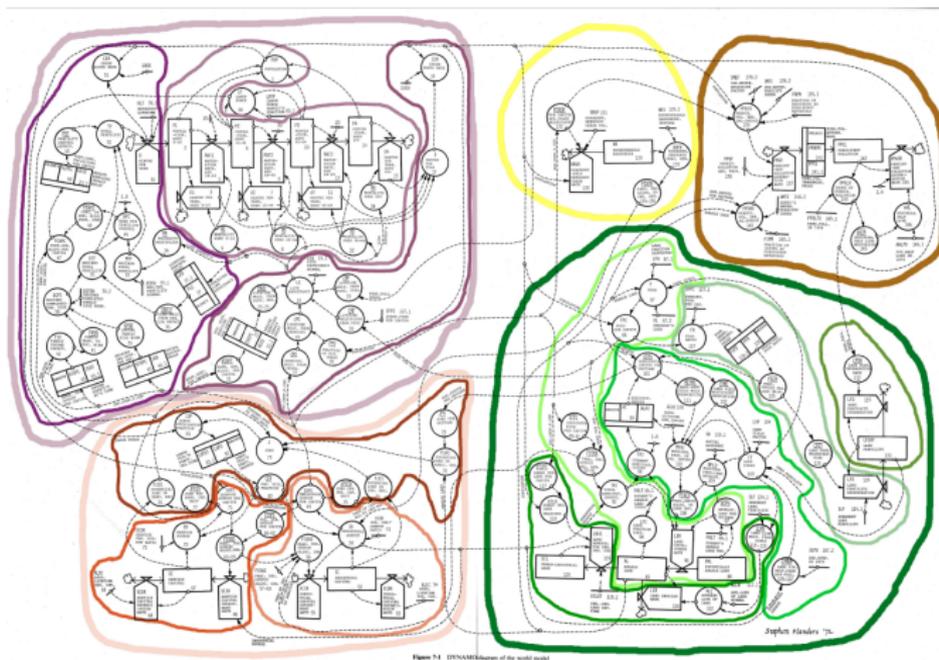
$$R'(t) = -kPC$$

avec

- 1 R quantité de ressources naturelles disponibles ;
- 2 P la population humaine ;
- 3 C la consommation moyenne de ressources par habitant ;
- 4 k est un coefficient qui représente la vitesse à laquelle les ressources naturelles sont épuisées.

Perspectives

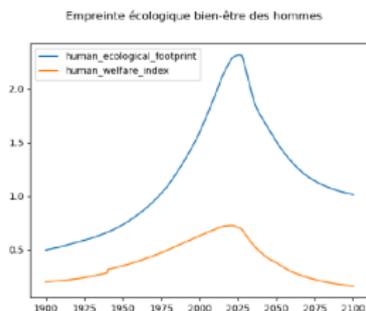
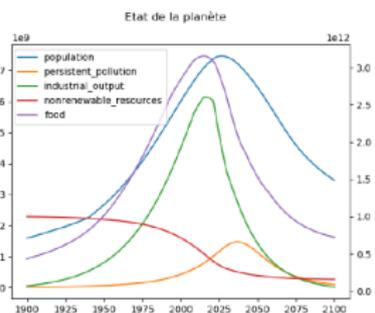
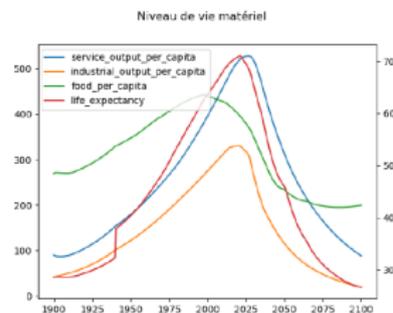
Les limites à la croissance : le modèle world 3



Liens entre les variables (Issu de [Joc19]).

Prospective démographique

Les limites à la croissance : différents scénarios du modèle world 3



Scénario 1 (scénario de référence) "Business As Usual" (voir [Gon23 ; Joc19]).

Prospective démographique

Les limites à la croissance : différents scénarios du modèle world 3

- ➊ Scénario 2 : scénario 1 et on multiplie par deux le stock de ressources non renouvelables par rapport au Scénario 1 ;
- ➋ Scénario 3 : on reprend le scénario 2 avec en plus des technologies de contrôle de la pollution plus performantes ;
- ➌ Scénario 4 : on reprend le scénario 3 avec en plus des technologies améliorant les rendements agricoles.
- ➍ Scénario 5 : on reprend le scénario 4 avec en plus une protection contre l'érosion des sols,

Prospective démographique

Les limites à la croissance : différents scénarios du modèle world 3

- ❶ Scénario 6 : on reprend le scénario 5 avec en plus une technologie permettant l'utilisation efficiente des ressources ;
- ❷ Scénario 7 : des mesures sont prises en 2002 pour stabiliser la population mondiale (politique de deux enfants par famille) ;
- ❸ Scénario 8 : on reprend le scénario 7 avec en plus des mesures prises pour stabiliser la production industrielle par habitant.

Prospective démographique

Les limites à la croissance : premières leçons

- ① Les premiers scénarios provoqueraient la fin de la croissance au cours du XXI^e siècle.
- ② Le progrès technique ne ferait que différer l'effondrement inéluctable de l'écosystème mondial, incapable de supporter cette croissance exponentielle.
- ③ Les autres scénarios ne mènent pas un effondrement. Ce sont ceux qui abandonnent la recherche d'une croissance exponentielle sans limite de la production.

Et pour finir ...

Un dessin de Sempé

Et pour finir ...



<https://dtdb.wordpress.com/2008/11/01/sempe-soyons-moins/>



J.-L. Bantignies. *Anthropocène. Formation des formateurs*
Polytech, Lyon 2023. 2023.



J. Bastien. *Mathématiques Fondamentales pour l'Informatique..*
Notes de cours de l'UV MFI (Département Informatique) de
Polytech Lyon, disponible sur le web :
<http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html>. 2022.
270 pages.



J. Bastien. *Mathématiques Fondamentales pour l'Informatique..*
Travaux Dirigés de l'UV MFI (Département Informatique) de
Polytech Lyon, disponible sur le web :
<http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html>. 2022.
39 pages.



J. Bastien. *Mathématiques Fondamentales pour l'Ingénieur..*
Notes de cours de l'UV MFImater (Département Matériaux) de
Polytech Lyon, disponible sur le web :
<http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html>. 2022.
127 pages.



J. Bastien. *Mathématiques Fondamentales pour l'Ingénieur..*
Travaux Dirigés de l'UV MFImater (Département Matériaux) de
Polytech Lyon, disponible sur le web :

<http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html>. 2022.
27 pages.



J. Bastien et J.-N. Martin. *Introduction à l'analyse numérique. Applications sous Matlab*. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 519.4 BAS, 4^e étage). Voir <https://www.dunod.com/sciences-techniques/introduction-analyse-numerique-applications-sous-matlab>. Paris : Dunod, 2003. 392 pages.



M. Crouzeix et A. L. Mignot. *Analyse numérique des équations différentielles*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree]. Masson, Paris, 1984, pages viii+171.



N. Débit et J. Bastien. *Méthodes numériques de base..* Notes de cours de l'UV MNB (Département Matériaux) de Polytech Lyon, disponible sur le web : <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html>. 2022. 326 pages.



P. Finaud-Guyot, J.-L. Bantignies et P. Papet. "Introduction aux enjeux de transition pour l'ingénieur". Recueil d'exercices corrigés,

hal-03941536, disponible sur <https://hal.science/hal-03941536>.
Polytech Montpellier, France, 2023.



A. Gondran. *Le rapport Meadows, 50 ans plus tard, 50 ans trop tard ?*. Présentation au 24^e congrès annuel de la Société Française de Recherche Opérationnelle et d'Aide à la Décision, disponible sur hal-04010564. Fév. 2023.



M. Jochaud Du Plessix. *Analyse du modèle World3 : sensibilité, dynamique, et pistes d'évolution. Modélisation et simulation*. Disponible sur hal-02434683. 2019.



D. L. Meadows, W. W. Behrens, D. H. Meadows, R. F. Naill, J. Randers et E. K. Zahn. *Dynamics of Growth in a Finite World*. Wright-Allen Press, 1974.



J. Mathieu. *La dynamique des populations, modèle continu, Partie 1 : modèles sans interaction. TS-D.M..* disponible sur <https://www.mathemathieu.fr/component/attachments/download/294> et <https://www.mathemathieu.fr/>.



D. Meadows, D. Meadows, J. Randers et W. W. Ehrens. *Les Limites à la croissance (dans un monde fini)*. traduction en français de [Mea+72]. Rue de l'échiquier, 2012.



D. Meadows, D. Meadows, J. Randers et W. W. Ehrens. *The Limits to Growth*. Universe Books, 1972.



D. Meadows, D. Meadows et J. Randers. *Beyond the limits*. Chelsea Green Pub. Co., 1922.



D. Meadows, J. Randers et D. Meadows. *The Limits to Growth : The 30-year Update*. Routledge, London, 2004.



H. Perdry. *temps discret, temps continu (biol 367)*. disponible sur https://genostats.github.io/herve.perdry/temps_discret_temps_continu.pdf.



D. Perrin. *Cours numéro 5 : Équations différentielles du premier ordre 3, l'équation logistique*. disponible sur <https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~daniel.perrin/interdisciplines/Cours5equadiff3-2011.pdf> et <https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/fr/perso/daniel-perrin/>. 2011.



D. Piau. *cours de l'UE MAT127*. chapitre 1, disponible sur <https://www-fourier.univ-grenoble-alpes.fr/~dpiau/mat127/chapitre1.pdf>. 2012.



D. Piau. *cours de l'UE MAT127*. chapitre 3, disponible sur <https://www-fourier.univ-grenoble-alpes.fr/~dpiau/mat127/chapitre3.pdf>. 2012.



D. Piau. *cours de l'UE MAT127*. chapitre 2, disponible sur <https://www-fourier.univ-grenoble-alpes.fr/~dpiau/mat127/chapitre2-2013.pdf>. 2013.



G. Pison. "Sept milliards d'êtres humains aujourd'hui, combien demain?". In : *Population & Sociétés* 482 (2011). disponible sur <https://www.cairn.info/revue-population-et-societes-2011-9-page-1.htm>, page 4. doi : 10.3917/popsoc.482.0001.



L. Pujo-Menjouet. "Équations Différentielles Ordinaires et Partielles". Cours de Licence Sciences, Technologies & Santé, Spécialité Mathématiques, disponible sur <http://math.univ-lyon1.fr/~pujo/coursED0.pdf>.



Quino. *Mafalda, l'intégrale*. Glénat, 1999.



C. Ringerbach. *la fresque du climat*. FR-FR- Adults - V8.4. <https://fresqueduclimat.org/>. 25 jan. 2023.



M. Schatzmann. *Analyse numérique, une approche mathématique, Cours et exercices*. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 518.1 SCH, 4^e étage). Dunod, 2001.