

Contrôle Continu du 02 octobre 2025

Durée : 1,5 heure(s)

Documents autorisés (hors QCM) : OUI ☒ NON ☐

Autorisés : *Polycopiés de l'UE, notes manuscrites.*

Interdits : *Écrans (sauf tablette et ordinateurs en mode avion), Livres et Internet*

Calculatrice autorisée (hors QCM) : OUI ☒ NON ☐

Tout type

Exercice 1.

Durée : 15 minutes.

Voir sujet de QCM n° 3 distribué.

Aucun document, aucun écran autorisé pendant le temps de ce QCM.

Exercice 2.

- (1) Quels sont les développements limités des fonctions $\sin$ et $\tan$ au voisinage de 0 à l'ordre 4 ?
- (2) En déduire les développements limités de $\sin(\tan(x))$ et $\tan(\sin(x))$ au voisinage de 0 à l'ordre 4.
- (3) Peut-on affirmer que les développements de $\sin(\tan(x))$ et $\tan(\sin(x))$ au voisinage de 0 sont identiques à tous les ordres ?

Exercice 3.

Un crocodile a repéré une proie située à 20 mètres de lui sur la berge opposée d'une rivière, de largeur 6 m. Le crocodile se déplace à une vitesse différente sur terre ($10/4$ m/s) et dans l'eau ($10/5$ m/s). Le crocodile atteint le zèbre en passant par un certain point P , placé à x mètres du point de départ sur l'autre rive (voir figure 1 page suivante).

- (1) Déterminer le temps $T(x)$ (en dixièmes de secondes) mis par le crocodile pour atteindre sa cible.
- (2) Trouver $x \in [0, 20]$ qui minimise ce temps. On pourra montrer que l'étude complète d'une fonction est en fait inutile et qu'il suffit de trouver un minimum de trois valeurs.
- (3) *Question facultative*

Sauriez-vous formuler ce problème comme un problème d'optique géométrique ?

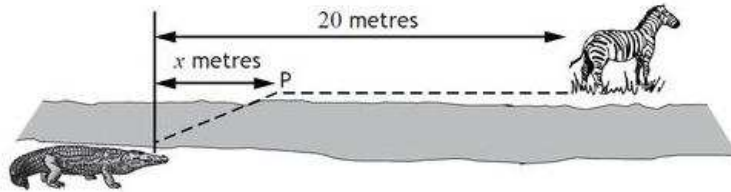


FIGURE 1. Le crocodile et sa proie.

Exercice 4.

On cherche dans cet exercice à retrouver la valeur de l'aire S d'un disque D de centre O et de rayon R .

(1)

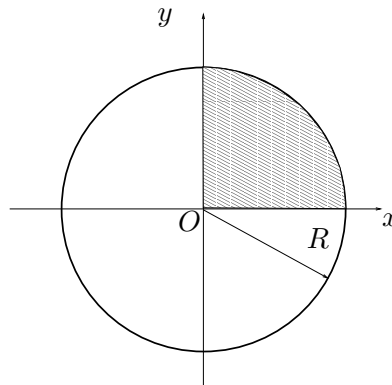


FIGURE 2. Un quart de cercle.

On décompose le disque D en 4 quarts de disque, comme le montre la figure 2.

- (a) Montrer que l'aire du quart de disque en haut à droite de cette figure peut être interprétée comme l'aire sous la courbe de la fonction f donnée par

$$\forall x \in [0, R], \quad f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}. \quad (1)$$

- (b) En déduire la valeur de l'aire S du disque de rayon R donnée par

$$S = 4 \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx. \quad (2)$$

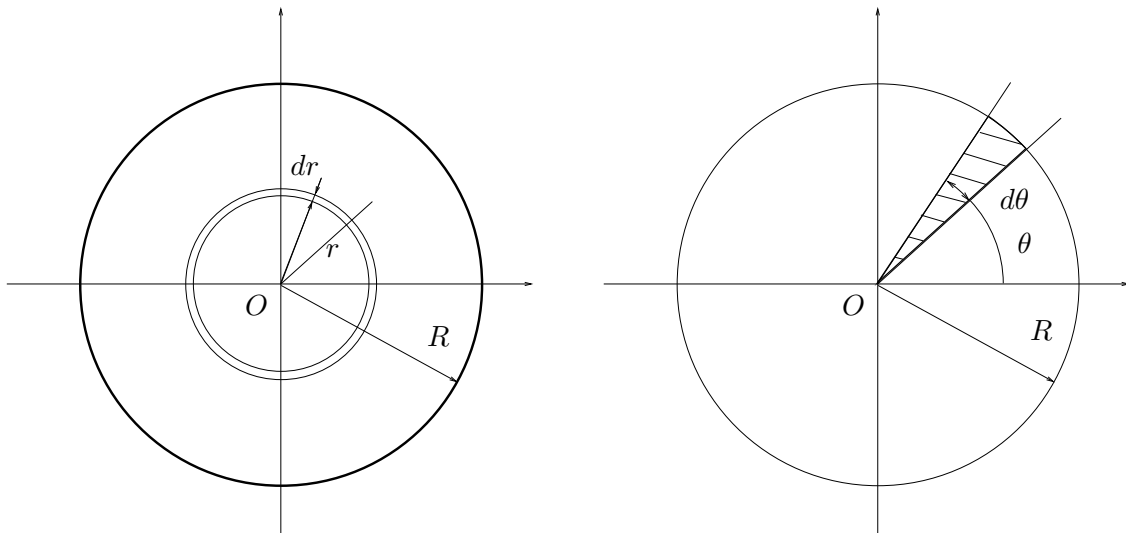
(2)

On décompose maintenant le disque D en couronnes élémentaires chacune d'elles étant comprise entre les rayons r et $r + dr$ où $r \in [0, R]$, comme le montre la figure 3(a) page ci-contre.

- (a) Quelle est la surface $dS(r)$ de cette couronne ?

- (b) En déduire S donnée par

$$S = \int_0^R dS(r). \quad (3)$$



(a) Un disque avec une couronne élémentaire comprise entre les rayons r et $r + dr$ où $r \in [0, R[$.

(b) Un disque avec une portion de disque élémentaire compris entre les angles θ et $\theta + d\theta$ où $\theta \in [0, 2\pi[$

FIGURE 3. Un disque de rayon R décomposé de deux façons différentes.

(3)

On décompose enfin le disque D en portions de disques élémentaires chacune d'elles étant comprise entre les angles θ et $\theta + d\theta$ comme le montre la figure 3(b).

- (a) Quelle est la surface $dS(\theta)$ la portion de disque élémentaire compris entre les angles θ et $\theta + d\theta$? On pourra montrer que pour $d\theta$ petit, cette surface est celle d'un triangle.
 (b) En déduire S donnée par

$$S = \int_0^{2\pi} dS(\theta). \quad (4)$$

(4) Certains de ces trois calculs s'appuient en fait sur la valeur du périmètre d'un cercle. Lesquels?

Exercice 5.

Déterminez la solution de l'équation différentielle

$$y'(t) + 3y(t) = 1 + 2t + t^2 + t^3,$$

avec la condition initiale

$$y(1) = 2.$$

On cherchera une solution particulière sous la forme d'un polynôme.

Exercice 6.

Résoudre les systèmes matriciels $AX = b$ avec

(1)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

(2)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Les deux questions sont indépendantes.

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html>