

Contrôle Continu du 14 janvier 2026

Durée : 1,5 heure(s)

Documents autorisés : OUI ☒ NON ☐Autorisés : *Pycopiés de l'UE, notes manuscrites.*Interdits : *Écrans (sauf tablette et ordinateurs en mode avion), Livres et Internet***Calculatrice autorisée :** OUI ☒ NON ☐*Tout type***Exercice 1.**

Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = n^{\ln n} e^{-\sqrt{n}}.$$

On pourra montrer que

$$n^{\ln n} e^{-\sqrt{n}} \leq n^{-2}.$$

Exercice 2.

Soit

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3}. \quad (1)$$

(1) Montrer que c'est une série alternée.

(2) Donner une valeur approchée de S avec une erreur inférieure à 10^{-3} .(3) On pose pour tout $p \in]0, +\infty[$

$$\tilde{\zeta}(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p},$$

et pour tout $p \in]1, +\infty[$

$$\zeta(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}.$$

(a) Démontrer que $\tilde{\zeta}(p)$ et $\zeta(p)$ sont bien définies.(b) Déterminer S en fonction de $\zeta(3)$.

(c) Pourrait-on faire le même calcul pour déterminer

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} ? \quad (2)$$

(d) On donne

$$S \approx 0,901\,542\,677\,37.$$

Vérifier le calcul de la question 2.

Exercice 3.

- (1) Déterminez la complexité algorithmique de la résolution d'un système de n équations linéaires par la méthode du pivot de Gauss. On rappelle que, pour cela, on fera des opérations de lignes du type $L_i - a/bL_j \rightarrow L_i$, qui comportent une multiplication et une division, qui comptent comme deux multiplications.
- (2) Plus précisément, déterminez le nombre exact de multiplications faites pour cette méthode et retrouver le résultat de la question 1.

Exercice 4.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}_+^{*2}$. Montrer que l'application f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f(x) = \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{1/x},$$

est strictement croissante pour $a \neq b$ et constante pour $a = b$. On pourra noter $t = b/a \in \mathbb{R}_+^*$.

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur <http://utbmjb.ch ez-alice.fr/Polytech/index.html>