

**Corrigé du contrôle Continu du 02 octobre 2025****Correction de l'exercice 1.**

Voir correction du QCM n° 3 en date du 02 octobre 2025, disponible sur Internet.

**Correction de l'exercice 2.**

- (1) L'annexe A du cours nous donne par exemple

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4),$$
$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4),$$

- (2) On obtient, après calculs (c'est à dire substitution de  $x$  par le dl du tan dans celui de sin et suppression des termes de degrés strictement supérieurs à 4) :

$$\sin(\tan(x)) = x + 1/6 x^3 + o(x^4).$$

On obtient de même

$$\tan(\sin(x)) = x + 1/6 x^3 + o(x^4).$$

- (3) Jusqu'à  $n = 6$ , les deux développements limités coïncident mais pour  $n = 7$ , on obtient

$$\sin(\tan(x)) = x + 1/6 x^3 - 1/40 x^5 - \frac{55}{1008} x^7 + o(x^7),$$
$$\tan(\sin(x)) = x + 1/6 x^3 - 1/40 x^5 - \frac{107}{5040} x^7 + o(x^7),$$

et donc on peut conclure qu'ils ne sont pas identiques à tout ordre !

**Correction de l'exercice 3.**

Cet exercice est issu de [Bas18, l'annexe A].

- (1) On écrit que le temps total est égal à la somme du temps que met le crocodile pour franchir la rivière et du temps que met le crocodile pour finir le chemin sur la terre ferme. Chacun de ces temps est exprimé en fonction de la distance et de la vitesse en utilisant la relation habituelle :

$$v = \frac{d}{t}$$

D'après le théorème de Pythagore la première distance est égale à  $\sqrt{x^2 + 6^2}$ , tandis que la seconde vaut  $20 - x$ . On en déduit donc que

$$T(x) = \frac{5}{10} \sqrt{x^2 + 36} + \frac{4}{10} (20 - x),$$

soit, en dixième de secondes,

$$T(x) = 5\sqrt{x^2 + 36} + 4(20 - x). \quad (1)$$

(2) La fonction  $T$  présente un extrémum local sur  $]0, 20[$ , là où sa dérivée est nulle. Or,

$$\begin{aligned} T'(x) &= \frac{5/2 \times 2x}{\sqrt{x^2 + 36}} - 4, \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 36}} \left( 5x - 4\sqrt{x^2 + 36} \right), \end{aligned}$$

et donc  $T'(x)$  est nulle si et seulement si

$$5x = 4\sqrt{x^2 + 36}.$$

Puisque  $x \in ]0, 20[$ , cela est équivalent à

$$25x^2 = 16(x^2 + 36)$$

soit encore

$$9x^2 - 16 \times 36 = 0,$$

soit

$$x^2 = \frac{16 \times 36}{9},$$

et donc

$$x = \pm \frac{4 \times 6}{3} = \pm 8.$$

On cherche  $x > 0$  et donc  $T'$  ne s'annule sur  $]0, 20[$  qu'en

$$x_0 = 8. \quad (2)$$

Pour conclure, on peut procéder à l'habituelle étude de variation de  $T$  sur  $[0, 20]$ . Mais il est un peu plus rapide de constater que la fonction  $T$ , continue sur  $[0, 20]$  y atteint ses extrémums. On sait que les extrémums locaux (dans  $]0, 20[$ ) ne peuvent qu'être donnés par (2). En y rajoutant les valeurs aux bord, on en déduit que les extrémums de  $T$  sont nécessairement dans  $\{T(0), T(20), T(x_0)\}$ . On détermine alors successivement

$$\begin{aligned} T(0) &= 5\sqrt{0^2 + 36} + 4(20 - 0) = 110, \\ T(x_0) &= 5\sqrt{8^2 + 36} + 4(20 - 8) = 98, \\ T(20) &= 5\sqrt{20^2 + 36} + 4(20 - 20) \approx 104. \end{aligned}$$

Ainsi, vu l'ordre de ces trois valeurs,  $T$  présente nécessairement un minimum, égal à 98, en  $x_0 = 8$ .

*Remarque 1.* Si  $x$  décrit  $\mathbb{R}$ , l'expression (1) est encore valable à condition de remplacer la distance  $20 - x$  par  $|20 - x|$ , de façon que cette quantité doit toujours positive pour tout  $x$

$$T(x) = 5\sqrt{x^2 + 36} + 4|20 - x|. \quad (3)$$

On dérive de nouveau la fonction  $T$ , là où elle est dérivable, c'est-à-dire sur  $\mathbb{R} \setminus \{20\}$ . Pour  $x \leq 20$ , on a  $|20 - x| = 20 - x$  et les calculs précédents sont encore valables et donc  $T'$  ne peut s'annuler qu'en  $x_0 = 8$ . Pour  $x \geq 20$ , on a  $|20 - x| = x - 20$  et donc

$$T(x) = 5\sqrt{x^2 + 36} + 4(x - 20). \quad (4)$$

Dans ce cas, les calculs sont identiques aux précédents et on a

$$T'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 36}} \left( 5x + 4\sqrt{x^2 + 36} \right),$$

et  $T'$  est nulle si et seulement si

$$-5x = 4\sqrt{x^2 + 36},$$

avec  $x \geq 20 > 0$ , ainsi  $-5x$  est négatif et cette équation ne peut avoir lieu. Bref, le seul de  $T'$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{20\}$  est donné par (2). On conclue comme précédemment, sans faire d'étude fastidieuse de tableau de variation. Les extréma de  $T$  sont nécessairement dans  $\{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} T(x), T(20), T(x_0)\}$  donné par

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \pm\infty} T(x) &= +\infty, \\ T(x_0) &= 98, \\ T(20) &\approx 104\end{aligned}$$

On conclue comme précédemment. Le minimum obtenu est donc global sur  $\mathbb{R}$ .

- (3) Ce problème peut se voir comme un problème d'optique géométrique ; en effet, la lumière se déplace avec une vitesse différente selon l'indice du milieu dans lequel elle se propage.

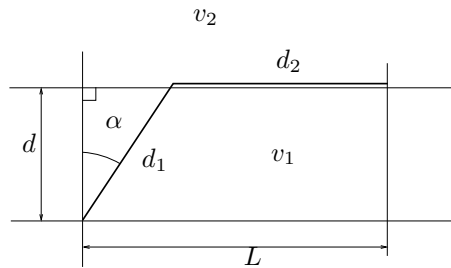


FIGURE 1. Le problème du crocodile traité de façon optique géométrique.

Montrons qu'on peut le traiter de la sorte. On se réfère à la figure 1. Le temps mis par le crocodile est égal à

$$T = t_1 + t_2 = \frac{d_1}{v_1} + \frac{d_2}{v_2},$$

où  $v_1$  est la vitesse dans la rivière et  $v_2$  sur terre. Au lieu de paramétrer par le déplacement  $x$ , on choisit l'angle  $\alpha$  comme le montre la figure 1. Puisque l'on a  $\cos \alpha = d/d_1$ , il vient  $d_1 = d/\cos \alpha$ . De même, on a  $\tan \alpha = (L - d_2)/d$  et donc  $d_2 = L - d \tan \alpha$  et ainsi, il vient

$$T = \frac{d}{v_1 \cos \alpha} + \frac{L - d \tan \alpha}{v_2 \cos \alpha} \quad (5)$$

On a alors

$$T'(\alpha) = \frac{d}{v_1} \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} - \frac{d}{v_2} \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{d}{\cos^2 \alpha} \left( \frac{\sin \alpha}{v_1} - \frac{1}{v_2} \right).$$

L'optimum annule  $T'$  et correspond à

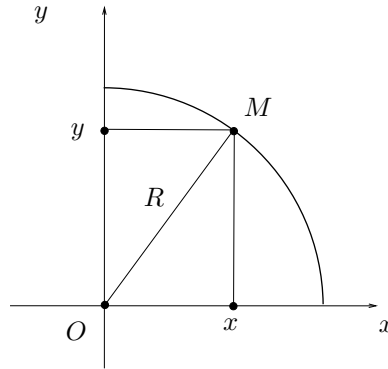
$$v_2 \sin \alpha = v_1.$$

Cela correspond aux lois de la refraction de Descartes : un rayon lumineux va du milieu d'indice optique proportionnel à  $v_1$  dans un milieu d'indice optique proportionnel à  $v_2$ . L'angle d'incidence est  $\alpha$  et l'angle d'incidence de sortie, dite rasante, vaut  $\pi/2$ . On a donc bien la loi  $n_1 \sin_i = n_2 \sin_i$ .

On pourrait s'amuser à utiliser cela de façon expérimentale pour déterminer la valeur de  $\alpha$ . On envoie un rayon avec un angle, choisi pour que l'angle d'incidence de sortie soit rasante.

#### Correction de l'exercice 4.

(1)

FIGURE 2. Un quart de cercle et la fonction  $f$ .

(a)

Considérons la fonction  $f$  qui à tout réel  $x$  de  $[0, R]$  associe le réel  $y \in [0, R]$  tel que  $(x, y)$  soient les coordonnées du point  $M$  de l'arc de cercle de centre  $O$  et de rayon  $R$ , comme le montre la figure 2. On a d'après le théorème de Pythagore  $x^2 + y^2 = R^2$  et donc, puisque  $y$  est positif,

$$y = |y| = \sqrt{y^2} = \sqrt{R^2 - x^2},$$

ce qui fournit l'expression de l'équation (1) de l'énoncé. L'aire comprise sous la graphe de  $f$  et les droites d'équation  $x = 0$  et  $x = R$  est égale à

$$S' = \int_0^R f(x) dx. \quad (6)$$

(b) On a donc l'équation (2) de l'énoncé. Le calcul de cette intégrale se retrouve précisément rédigé dans l'exemple 3.4 page 26 du cours. D'après l'équation (1) de l'énoncé, (6) et l'équation (3.16) du cours, il vient

$$S = 4S' = 4 \times \frac{\pi}{4} R^2,$$

et donc le fameux

$$S = \pi R^2. \quad (7)$$

(2)

Le raisonnement infinitésimal fait dans cette question est analogue à celui qui a été fait dans [Bas22, l'exercice de TD 3.2].

(a) La couronne comprise entre les rayon  $r$  et  $r + dr$  peut être assimilée, pour  $dr$  petit, à un rectangle de longueur égale au périmètre du cercle de centre  $O$  et de largeur  $dr$ . Ce périmètre vaut  $2\pi r$ . En d'autres termes, sa surface  $dS(r)$  est donc égale à

$$dS(r) = 2\pi r dr. \quad (8)$$

(b) Il ne reste plus qu'à sommer toutes ces surfaces élémentaires et d'après l'équation (3) de l'énoncé et (8), on a donc

$$S = \int_0^R 2\pi r dr, \quad (9)$$

et finalement

$$S = 2\pi \int_0^R r dr = 2\pi \left[ \frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^{r=R},$$

ce qui redonne bien (7).

(3)

On considère enfin la décomposition du disque donnée dans la question 3 de l'énoncé.

(a)

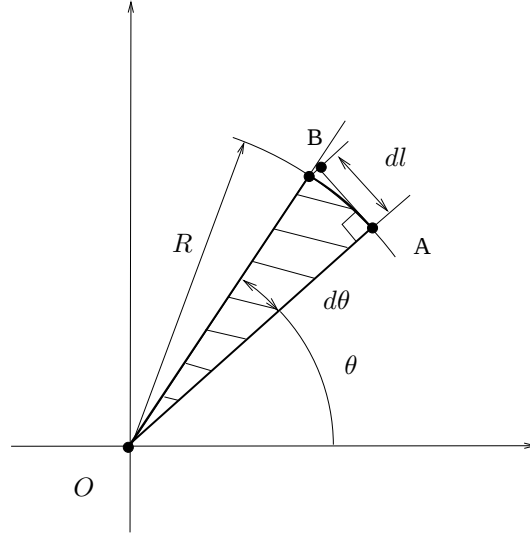


FIGURE 3. Le triangle élémentaire défini par  $d\theta$  et  $R$ .

Déterminons la surface  $dS(\theta)$  la portion de disque élémentaire compris entre les angles  $\theta$  et  $\theta + d\theta$ .

- (i) On pourrait écrire que  $dS(\theta)$  est égale à la fraction de l'aire totale du disque  $\pi R^2$  correspondant à l'angle  $2\pi$  vaut, si les angles sont exprimés en radians :

$$dS(\theta) = \frac{\pi R^2}{2\pi} d\theta$$

soit encore

$$dS(\theta) = \frac{1}{2} R^2 d\theta. \quad (10)$$

Cependant, cette méthode s'appuie sur la connaissance de l'aire totale du disque, que l'on cherche justement à déterminer !

- (ii) Procédons autrement. Remarquons sur la figure 3 que le triangle élémentaire de surface  $dS(\theta)$  est identique, pour  $d\theta$  petit, au triangle rectangle  $OAB$  de surface

$$d\tilde{S}(\theta) = \frac{1}{2} OA AB,$$

soit puisque  $dS(\theta) \approx d\tilde{S}(\theta)$  et que  $A$  appartient au cercle de rayon  $R$  :

$$dS(\theta) = \frac{1}{2} R dl. \quad (11)$$

Il reste à déterminer la longueur infinitésimale  $dl$ . Plusieurs façons de procéder sont possibles.

- (A) On peut écrire d'après les règles de trigonométrie dans le triangle rectangle  $OAB$  :

$$\tan(d\theta) \approx \frac{dl}{R},$$

et donc, pour  $d\theta$  petit <sup>1</sup>

$$dl \approx R \tan(d\theta) \approx R d\theta, \quad (12)$$

et de (11), on en déduit (10).

(B) Plus fondamentalement et plus géométriquement, on peut s'appuyer sur la preuve de la Proposition I.25 page 174, de l'annexe I, pour montrer que, dans le cas  $R = 1$ , (12) a bien lieu <sup>2</sup>.

(b) Comme dans la question 2b page 4, il ne reste plus qu'à sommer toutes ces surfaces élémentaires et d'après l'équation (4) de l'énoncé et (10), on a donc

$$S = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} R^2 d\theta, \quad (13)$$

et donc

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} R^2 \int_0^{2\pi} d\theta, \\ &= \frac{1}{2} R^2 \times 2\pi, \end{aligned}$$

ce qui redonne bien (7).

(4) On a rencontré et utilisé le fait que le périmètre d'un cercle valait  $2\pi R$  au point 2a page 4 donc pour la méthode de la question 2 et à la question 3a page précédente donc pour la méthode de la question 3. Ainsi, la seule méthode, la moins jolie, qui évite un raisonnement circulaire est celle de la méthode 1. Si on y réfléchit bien, cette méthode, fondée sur un changement de variable, s'appuie en fait sur les dérivées des fonctions sin et cos, donc sur les résultats de la Proposition I.25 page 174 de l'annexe I et qui s'appuie en fait là encore sur (10), ce qui boucle la boucle du raisonnement circulaire !

*Remarque 2.* Il suffit en fait de passer des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires pour donner un sens aux deux équations (9) et (13). En effet, on se donne  $f$  définie sur une partie  $D$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  et on calcule de deux façons différentes l'intégrale double (voir par exemple [Bas11, Chapitre "Intégrales multiples", section "Intégrales doubles"] disponible sur [http://cel.archives-ouvertes.fr/docs/00/55/55/01/PDF/coursMT31\\_A04.pdf](http://cel.archives-ouvertes.fr/docs/00/55/55/01/PDF/coursMT31_A04.pdf))

$$I = \iint_{(x,y) \in D} f(x,y) dx dy$$

et de la calculer en polaire, en faisant un changement de variable :

$$I = \iint_{(r,\theta) \in \tilde{D}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) dx dy$$

en écrivant de façon informelle que

$$dx dy = r dr d\theta.$$

Plus de détails dans les sections "Théorèmes de Fubini" p. 57, "Calculs de Surface" p. 60 et "Changements de variables" p. 60 de [Bas11]).

---

1. ce qui s'appuie sur le développement limité de la tangente à l'ordre 1 en zéro :

$$\tan(d\theta) = d\theta + o(d\theta) \approx d\theta.$$

2. Malheureusement, un peu de réflexion nous montre que ce raisonnement s'appuie en fait sur (10) !

### Correction de l'exercice 5.

On obtient successivement : la solution générale de l'équation homogène associée (sans second membre) :

$$y_g(t) = ce^{-3t};$$

( $c$  est une constante quelconque), une solution particulière {Plus précisément, on cherche un polynôme de degré 3 du type  $at^3 + bt^2 + ct + 1$  et si on réinjecte ce polynôme dans l'équation différentielle, on obtient un système de 4 équations en  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  que l'on résoud.} :

$$y_p(t) = 1/9 + 2/3 t + 1/3 t^3;$$

la solution générale de l'équation différentielle donnée par  $y = y_g + y_p$ , soit ici :

$$y(t) = ce^{-3t} + 1/9 + 2/3 t + 1/3 t^3;$$

et enfin, en utilisant la condition initiale, on détermine la valeur de  $c$ , ce qui donne

$$y(t) = \frac{8}{9} e^3 e^{-3t} + 1/9 + 2/3 t + 1/3 t^3.$$

### Correction de l'exercice 6.

On obtient les résultats suivants :

- (1) Le système admet une solution unique donnée par

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (2) Il y a au moins une équation redondante (et aucun couple d'équations contradictoires et aucune équation impossible) et le système admet un ensemble infini de solutions.

### Références

- [Bas11] J. BASTIEN. *Mathématiques : Applications*. Notes de cours de l'UV MT31 de l'UTBM, disponible sur le web : <http://utbmjb.chez-alice.fr/UTBM/index.html>, rubrique MT31. 2011. 158 pages.
- [Bas18] J. BASTIEN. *Biomécanique du mouvement*. Notes de cours de l'UE Biomécanique (L2) de l'UFRSTAPS de Lyon 1, disponibles sur le web : <http://utbmjb.chez-alice.fr/UFRSTAPS/index.html>, rubrique L2 Bioméca. 2018. 190 pages.
- [Bas22] J. BASTIEN. *Mathématiques Fondamentales pour l'Ingénieur*. Corrigés des Travaux Dirigés de l'UV MFImater (Département Matériaux) de Polytech Lyon, disponible sur le web : <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html>, rubrique "Matériaux 3A : Mathématiques Fondamentales pour l'Ingénieur". 2022. 49 pages.