

**Corrigé du contrôle Continu du 14 janvier
2026**
Correction de l'exercice 1.

 Exercice 1936 issu de <http://exo7.emath.fr/>, par Gineste et Lévi Operman 01/11/2001

On donne deux façon de procéder

- (1) Montrons que $n^{\ln n} e^{-\sqrt{n}} \leq n^{-2}$. On remarque que $n^{\ln n} e^{-\sqrt{n}} = e^{(\ln n)^2} e^{-\sqrt{n}}$. Or pour u assez grand $4u^2 + 4u \leq e^u$, soit $4u^2 - e^u \leq -4u$. En posant $u = \ln \sqrt{n} = \frac{1}{2} \ln n$, il vient $\ln^2 n - \sqrt{n} \leq -2 \ln n$. D'où

$$\underbrace{e^{\ln^2 n - \sqrt{n}}}_{n^{\ln n} e^{-\sqrt{n}}} \leq \underbrace{e^{-2 \ln n}}_{\frac{1}{n^2}}$$

Par comparaison, la série de terme général $n^{\ln n} e^{-\sqrt{n}}$ est donc convergente car la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ est convergente.

- (2) On peut aussi remarquer que

$$\begin{aligned} n^2 u_n &= n^2 n^{\ln n} e^{-\sqrt{n}}, \\ &= e^{2 \ln n + \ln(n)^2 - \sqrt{n}}, \\ &= e^{-\sqrt{n} \left(1 - \frac{\ln(n)^2}{\sqrt{n}} - \frac{2 \ln n}{\sqrt{n}} \right)}, \end{aligned}$$

expression qui tend vers zéro quand n tend vers l'infini car $1 - \frac{\ln(n)^2}{\sqrt{n}} - \frac{2 \ln n}{\sqrt{n}}$ tend vers 1. On conclut en utilisant la règle de Riemann (voir la propriété 9.24 du cours).

Correction de l'exercice 2.

 Exercice 1931 issu de <http://exo7.emath.fr/>, par Roussel 01/09/2001

- (1) La série est convergente car alternée (voir théorème 9.14 page 90 du cours). En effet, $\frac{1}{n^3}$ tend vers zéro en décroissant, puisque $n < n+1$ et donc $1/(n+1)^3 < 1/n^3$

Remarque 1. Elle est aussi absolument convergente, série de Riemann avec un exposant égal à 3, mais il est indispensable d'évoquer la série alternée pour le point suivant.

- (2) Le reste à l'ordre N est majoré par $1/(N+1)^3$. Voir en effet l'inégalité (9.15a) du cours. Il faut donc choisir N tel que $N+1 \geq \sqrt[3]{1/\varepsilon}$ soit

$$N \geq \sqrt[3]{1/\varepsilon} - 1$$

et donc numériquement $N = 9$. On trouve

$$S \approx S_N = 0,902\,116\,476.$$

- (3) (a) Remarquons que la série $\tilde{\zeta}(p)$ donnée pour tout $p \in]0, +\infty[$ par

$$\tilde{\zeta}(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}, \tag{1}$$

est une série alternée (même justification que dans la question 1) et que la série $\zeta(p)$ donnée pour tout $p \in]1, +\infty[$ par

$$\zeta(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \quad (2)$$

est une série absolument convergente (même justification que dans la remarque 1).

- (b) Remarquons que l'on peut écrire (chacune des deux sommes existent, puisque convergentes ; on admet que l'on peut scinder la somme en deux)

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta}(p) &= \sum_{\substack{n=1, \\ n \text{ pair}}}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p} + \sum_{\substack{n=1, \\ n \text{ impair}}}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}, \\ &= \sum_{q=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2q-1}}{(2q)^p} + \sum_{\substack{n=1, \\ n \text{ impair}}}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}, \\ &= -\frac{1}{2^p} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q^p} + \sum_{\substack{n=1, \\ n \text{ impair}}}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \end{aligned}$$

et donc

$$\tilde{\zeta}(p) = -\frac{1}{2^p} \zeta(p) + \sum_{\substack{n=1, \\ n \text{ impair}}}^{\infty} \frac{1}{n^p}. \quad (3)$$

Remarquons aussi que l'on peut écrire (chacune des deux sommes existent, puisqu'absolument convergentes ; on admet que l'on peut scinder la somme en deux) exactement de la même façon (sans les coefficients $(-1)^{n-1}$)

$$\zeta(p) = \sum_{\substack{n=1, \\ n \text{ pair}}}^{\infty} \frac{1}{n^p} + \sum_{\substack{n=1, \\ n \text{ impair}}}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \quad (4)$$

$$= \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{(2q)^p} + \sum_{\substack{n=1, \\ n \text{ impair}}}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \quad (5)$$

$$= \frac{1}{2^p} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q^p} + \sum_{\substack{n=1, \\ n \text{ impair}}}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \quad (6)$$

$$= \frac{1}{2^p} \zeta(p) + \sum_{\substack{n=1, \\ n \text{ impair}}}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \quad (7)$$

et donc

$$\sum_{\substack{n=1, \\ n \text{ impair}}}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \left(1 - \frac{1}{2^p}\right) \zeta(p). \quad (8)$$

Si l'on utilise (3) et (8), il vient donc successivement

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta}(p) &= -\frac{1}{2^p} \zeta(p) + \sum_{\substack{n=1, \\ n \text{ impair}}}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \\ &= -\frac{1}{2^p} \zeta(p) + \left(1 - \frac{1}{2^p}\right) \zeta(p), \end{aligned}$$

et donc

$$\tilde{\zeta}(p) = \frac{2^{p-1} - 1}{2^{p-1}} \zeta(p). \quad (9)$$

En particulier pour $p = 3$, (9) donne, après calculs

$$S = \frac{3}{4} \zeta(3). \quad (10)$$

Remarque 2. Justifions correctement (3) et (8). On écrit, pour N fixé (qui prend la place de ∞ dans les calculs précédents)

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n-1}}{n^p} &= \sum_{\substack{n=1, \\ n \text{ pair}}}^N \frac{(-1)^{n-1}}{n^p} + \sum_{\substack{n=1, \\ n \text{ impair}}}^N \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}, \\ &= \sum_{q=1}^N \frac{(-1)^{2q-1}}{(2q)^p} + \sum_{\substack{n=1, \\ n \text{ impair}}}^N \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}, \\ &= -\frac{1}{2^p} \sum_{q=1}^{2N} \frac{1}{q^p} + \sum_{\substack{n=1, \\ n \text{ impair}}}^N \frac{1}{n^p}, \end{aligned}$$

et on obtient (3) en faisant tendre N vers l'infini. (8) s'obtient exactement de la même façon.

Ces calculs peuvent aussi être justifiés en utilisant le fait que des séries absolument sommables (pour $p > 1$, ici) sont sommables dans tous les sens, soit dans l'ordre que l'on veut !!

(c) On ne peut faire le même calcul pour

$$\mathcal{S} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \quad (11)$$

puisque ici, il faudrait utiliser $\zeta(1)$, somme qui diverge (somme de Riemann avec un exposant 1) !

Cependant, grâce aux résultats de [Bas22, l'annexe "Quelques calculs explicites de sommes de Séries", section "Calcul par les séries entières"], on peut montrer que la somme donnée par (11) vaut $\ln(2)$.

(d) La fonction ζ étant tabulée, grâce à (10), on vérifie que *a posteriori* que

$$|S - S_N| = |0,901\,542\,677 - 0,902\,116\,476| = 5,737\,98 \times 10^{-4} \leq \varepsilon.$$

Correction de l'exercice 3.

- (1) Notons $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice carrée et B la matrice colonne associées au système linéaires écrit sous la forme $AX = B$.

Pour chaque pivot défini par son indice $k \in \{1, \dots, n-1\}$, il faut annuler les coefficients "sous le pivot", c'est-à-dire $A_{i,k}$ pour toute valeur $i \in \{k+1, n\}$. Enfin, pour annuler ces coefficients, il faut faire une opération de ligne, en soustrayant une ligne multipliée par un coefficient et divisée par le pivot, du type

$$L_i - a/bL_j \rightarrow L_i \quad (12)$$

à une autre, soit $O(n)$ opérations. On a donc 3 boucles de taille $O(n)$ imbriquées les unes dans les autres et donc

$$\text{une complexité en } O(n^3). \quad (13)$$

Pour chaque $k \in \{1, \dots, n-1\}$, pour chaque $i \in \{k+1, n\}$, il faut faire 2 multiplications sur les coefficients donnés par leurs indices de colonne j entre $k+1$ et n , ainsi qu'une opération supplémentaire pour le second membre, c'est-à-dire

$$s_{k,i} = 2 \times (n - (k+1) + 1 + 1),$$

et donc

$$s_{k,i} = 2(n - k + 1). \quad (14)$$

On obtient donc un nombre de multiplications donné par S_n par

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=k+1}^n s_{k,i}.$$

Compte tenu de (14), on a donc successivement :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=k+1}^n 2(n - k + 1), \\ &= 2 \sum_{k=1}^{n-1} (n - k + 1) \sum_{i=k+1}^n 1, \\ &= 2 \sum_{k=1}^{n-1} (n - k + 1)(n - (k + 1) + 1), \\ &= 2 \sum_{k=1}^{n-1} (n - k + 1)(n - k), \end{aligned}$$

on pose $k' = n - k$:

$$= 2 \sum_{k'=1}^{n-1} (k' + 1)k',$$

et donc

$$S_n = 2 \left(\sum_{k=1}^{n-1} k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k \right). \quad (15)$$

Compte des formules du cours (8.19), (8.20) et (8.30a), on a donc successivement, d'après (15),

$$\begin{aligned} S_n &= 2 \left(\frac{1}{6} n(n-1)(2n-1) + \frac{1}{2} n(n-1) \right), \\ &= \frac{n(n-1)}{3} (2n-1+3), \end{aligned}$$

On a donc

$$S_n = \frac{2}{3} n(n-1)(n+1), \quad (16)$$

ce qui cohérent avec (13).

Correction de l'exercice 4.

Exercice issu de [Mon90, exercice 5.4.5].

On a successivement

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{1/x}, \\ &= e^{\frac{1}{x} \ln \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)}, \\ &= e^{\frac{1}{x} \left(\ln(a^x) + \ln \left(\frac{1 + (b/a)^x}{2} \right) \right)}, \end{aligned}$$

et en notant $t = b/a \in \mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned}
 &= e^{\frac{1}{x}(\ln(a^x) + \ln(\frac{1+t^x}{2}))}, \\
 &= e^{\frac{1}{x} \ln(a^x)} e^{\frac{1}{x} \ln(\frac{1+t^x}{2})}, \\
 &= e^{\frac{1}{x} \ln(e^{x \ln a})} e^{\frac{1}{x} \ln(\frac{1+t^x}{2})}, \\
 &= e^{\frac{1}{x} x \ln a} e^{\frac{1}{x} \ln(\frac{1+t^x}{2})},
 \end{aligned}$$

et d'où

$$f(x) = a e^{\frac{1}{x} \ln(\frac{1+t^x}{2})}. \quad (17)$$

Montrons que f' est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

On a donc

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x} \ln \left(\frac{1+t^x}{2} \right) \right)' a e^{\frac{1}{x} \ln(\frac{1+t^x}{2})}.$$

Or,

$$\left(\frac{1}{x} \ln \left(\frac{1+t^x}{2} \right) \right)' = -\frac{1}{x^2} \ln \left(\frac{1+t^x}{2} \right) + \frac{1}{x} \left(\ln \left(\frac{1+t^x}{2} \right) \right)',$$

et on a successivement

$$\begin{aligned}
 \left(\ln \left(\frac{1+t^x}{2} \right) \right)' &= \frac{(1+t^x)'}{1+t^x}, \\
 &= \frac{(t^x)'}{1+t^x}, \\
 &= \frac{(e^{x \ln t})'}{1+t^x}, \\
 &= \frac{\ln t e^{x \ln t}}{1+t^x},
 \end{aligned}$$

et donc

$$\left(\ln \left(\frac{1+t^x}{2} \right) \right)' = \frac{(\ln t) t^x}{1+t^x}. \quad (18)$$

On a donc

$$\left(\frac{1}{x} \ln \left(\frac{1+t^x}{2} \right) \right)' = -\frac{1}{x^2} \ln \left(\frac{1+t^x}{2} \right) + \frac{1}{x} \frac{(\ln t) t^x}{1+t^x},$$

et donc f' est du signe de

$$h(x) = -\frac{1}{x^2} \ln \left(\frac{1+t^x}{2} \right) + \frac{1}{x} \frac{(\ln t) t^x}{1+t^x},$$

que l'on écrit sous la forme

$$h(x) = \frac{1}{x^2} \left(-\ln \left(\frac{1+t^x}{2} \right) + x \frac{(\ln t) t^x}{1+t^x} \right).$$

Ainsi,

f' est du signe de g , définie par (19)

$$g(x) = -\ln \left(\frac{1+t^x}{2} \right) + x \frac{(\ln t) t^x}{1+t^x}.$$

On a alors, d'après (18)

$$g'(x) = -\frac{(\ln t) t^x}{1+t^x} + \left(x \frac{(\ln t) t^x}{1+t^x} \right)'.$$

Or, on a

$$\begin{aligned} \left(x \frac{(\ln t)t^x}{1+t^x} \right)' &= \frac{(\ln t)t^x}{1+t^x} + x \left(\frac{(\ln t)t^x}{1+t^x} \right)', \\ &= \frac{(\ln t)t^x}{1+t^x} + x \frac{(\ln t)^2 t^x (1+t^x) - (\ln t)^2 t^x t^x}{(1+t^x)^2}, \\ &= \frac{(\ln t)t^x}{1+t^x} + x \frac{(\ln t)^2 t^x}{(1+t^x)^2}, \end{aligned}$$

et donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g'(x) = x \frac{(\ln t)^2 t^x}{(1+t^x)^2}. \quad (20)$$

Nous avons deux cas.

- (1) Si $t \neq 1$ (c'est-à-dire, si $a \neq b$), alors $\ln(t) > 0$ et donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g'(x) > 0. \quad (21a)$$

On a aussi

$$g(0) = 0. \quad (21b)$$

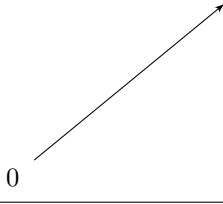
x	0	$+\infty$
g		
g'	+	

TABLEAU 1. Tableau de variation de la fonction g .

De (21), on déduit le tableau de variation 1 de g , qui est donc strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

De (19), on déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) > 0,$$

d'où la conclusion.

- (2) Si au contraire $t = 1$ (c'est-à-dire, si $a = b$), alors $\ln(t) = 0$ et donc d'après (20), f' est nulle sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc f est constante. On cela retrouve en calculant $f(x)$ pour $a = b$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{1/x}, \\ &= \left(\frac{2a^x}{2} \right)^{1/x}, \\ &= (a^x)^{1/x}, \end{aligned}$$

et donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = a.$$

Références

- [Bas22] J. BASTIEN. *Outils Mathématiques pour l'Ingénieur 3*. Notes de cours de l'UV OMI3 (Département Mécanique) de Polytech Lyon, disponible sur le web : <http://utbmjb.cher-alice.fr/Polytech/index.html>, rubrique "Mécanique 4A : Outils Mathématiques pour l'Ingénieur 3". 2022. 269 pages.
- [Mon90] J.-M. MONIER. *Analyse, tome 1 (mathématiques supérieures)*. Dunod, 1990.