

QCM (maison) pour le 03 octobre 2024

Important :

Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter aucune, une ou plusieurs bonnes réponses. Les autres questions ont une unique bonne réponse.

Ce QCM est en principe modifiable à l'écran et vous devez cocher les cases manuellement. En cas d'erreur, vous pouvez les cocher ou décocher autant de fois que nécessaire.

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html>

HAUNIME Anne

Chapitre 1, section 1.2

Question 1 Si f est une fonction définie en x_0 , elle est nécessairement continue en x_0 .

C'est faux C'est vrai

Question 2 ♣ La fonction $x \mapsto \sin(x)/x$ est continue sur \mathbb{R} .

C'est vrai si on la prolonge par continuité par la valeur 0 en zéro. C'est vrai

C'est vrai si on la prolonge par continuité par la valeur 1 en zéro. C'est faux

Aucune de ces réponses n'est correcte.

Question 3 La fonction signe est continue sur \mathbb{R} .

C'est vrai C'est faux

Chapitre 1, section 1.3

Question 4 Si une fonction est dérivable en x_0 , elle est alors

discontinue en x_0 continue en x_0

Question 5 La dérivée de $x \mapsto \sqrt{x}$ est $x \mapsto 1/(2\sqrt{x})$.

C'est vrai C'est faux

Question 6 ♣ La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur

\mathbb{R}_+^* \mathbb{R} \mathbb{R}_+ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 7 ♣ Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Soit une fonction est continue et positive sur $[0, a]$, nulle en 0 et en a , Alors

elle admet un maximum positif sur $[0, a]$.

elle admet un maximum strictement positif sur $[0, a]$.

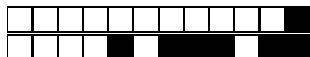
elle admet un maximum positif sur $]0, a[$.

elle admet un maximum positif sur $[0, a]$, atteint en un unique point.

elle admet un maximum strictement positif sur $[0, a]$, atteint en un unique point.

elle admet un maximum positif sur $]0, a[$, atteint en un unique point.

Aucune de ces réponses n'est correcte.

**Chapitre 1, section 1.4**

Question 8 Une fonction qui admet un développement limité à l'ordre 5 en un point x_0
admet un développement limité à l'ordre 6 admet un développement limité à l'ordre 3

en ce point.

Question 9 La fonction $f : x \mapsto \sin(\tan x)$ admet à l'ordre 7, en zéro le développement limité suivant

$$x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 - \frac{55}{1008}x^7 + o(x^7). \quad (1)$$

$$x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^4 - \frac{55}{1008}x^7 + o(x^7). \quad (2)$$

$$x + \frac{1}{6x^3} - \frac{1}{40}x^4 - \frac{55}{1008}x^7 + o(x^7). \quad (3)$$

Question 10 La fonction $f : x \mapsto \sin^6 x$ admet à l'ordre 6, en zéro le développement limité suivant

$$x^5 + o(x^6) \quad (1)$$

$$x^6 + o(x^6) \quad (2)$$

Chapitre 3

Question 11 Posons

$$I = \int_0^{1/3\pi} \tan(x) dx.$$

On a

$$I = \ln(2). \quad (1)$$

$$I = -1. \quad (2)$$

$$I = 2 \tan(1/3\pi). \quad (3)$$

Question 12 ♣ Posons

$$I = \int_0^{1/2\pi} \cos^2 x \sin x dx$$

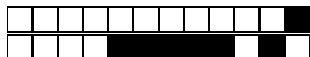
On effectue le changement de variable $t = \cos x$. L'intégrale I est égale à

$$I = \int_0^1 x^2 dx. \quad (1)$$

$$I = \int_0^{1/2\pi} x^2 dx. \quad (2)$$

$$I = \int_0^{1/2\pi} t^2 dt. \quad (3)$$

Aucune de ces réponses n'est correcte.

**Question 13 ♣**

Reprenons l'exemple 3.4 page 20 du cours :

Calculons, pour $R \in \mathbb{R}_+$, l'intégrale

$$I_R = \int_0^R \sqrt{R^2 - u^2} du.$$

On pose

$$u = R \cos x,$$

c'est-à-dire, on que l'on choisit ϕ définie par

$$\phi(x) = R \cos x, \tag{1}$$

L'"ancienne variable" est u et la "nouvelle" est x . Procédons donc aux *trois* substitutions vue en section 3.4.1 du cours.

1. On remplace l'intégrande $\sqrt{R^2 - u^2}$ par $\sqrt{R^2 - R^2 \cos^2 x}$. On a donc successivement

$$\begin{aligned} \sqrt{R^2 - R^2 \cos^2 x} &= \sqrt{R^2 (1 - \cos^2 x)}, \\ &= \sqrt{R^2} \sqrt{1 - \cos^2 x}, \\ &= \sqrt{R^2} \sqrt{\sin^2 x}, \\ &= |R| |\sin x|, \end{aligned}$$

et puisque $R \geq 0$

$$= R |\sin x|.$$

2. Choisissons *une* valeur de α telle que $0 = R \cos(\alpha)$. Choisissons ^a

$$\alpha = \frac{\pi}{2}. \tag{2}$$

Choisissons *une* valeur de α telle que $R = R \cos(\alpha)$. Choisissons

$$\alpha = 2\pi. \tag{3}$$

3. On a aussi $\frac{du}{dx} = \phi'(x) = -R \sin x$, et donc $du = -R \sin x dx$. Ainsi,

on remplace du par $-R \sin x dx$.

Finissons maintenant effectivement le calcul. On a donc successivement :

$$I_R = \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} R |\sin x| (-R \sin x) dx = -R^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} |\sin x| \sin x dx = -R^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \sin^2 x dx.$$

On linéarise le sinus sous la forme :

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)).$$

On a donc

$$\begin{aligned} I &= -R^2 \int_{\pi/2}^{2\pi} \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)) dx, \\ &= -\frac{1}{2} R^2 \int_{\pi/2}^{2\pi} 1 - \cos(2x) dx, \\ &= -\frac{1}{2} R^2 \left[x - \frac{1}{2} \sin(2x) \right]_{\pi/2}^{2\pi}. \end{aligned}$$

Et donc, on a

$$I_R = -\frac{3\pi}{4} R^2. \tag{4}$$

Ce raisonnement est faux parce que $\phi : x \mapsto R \cos x$ n'est pas bijective sur l'intervalle $[\pi/2, 2\pi]$.

Ce raisonnement est faux parce que la formule de changement de variable de la section 3.4.1 page 20 du cours est fausse.

Ce raisonnement est faux parce que les valeurs données par (2) et (3) sont erronées.

Ce raisonnement est vrai.

Aucune de ces réponses n'est correcte.

a. On pourra prendre tout autre valeur !



Question 14

Calculer le travail qu'il faut dépenser pour allonger un ressort d'une longueur passant de 0 à l_0 sachant que la force est proportionnelle au déplacement : $F = Kx$.

On pourra décomposer le travail de la force en une somme de travaux élémentaires dW chacun étant égal au travail de la force F sur le trajet dx puis sommer tous ces travaux élémentaires :

$$I = \int_0^{l_0} dW.$$

f p m j *Reservé*

Large rectangular area with horizontal dotted lines for writing the solution to Question 14.

Question 15 Soit

$$I = \int_0^{1/4 \pi} (\cos(x))^3 dx$$

On a

$$I = \frac{5}{12} \sqrt{2}$$

$$I = 5/6 \sqrt{2}$$

$$I = 5/4 \sqrt{2}$$

Question 16 Soit

$$I = \int_0^{e^1} x^7 e^{-x} dx$$

On a

$$I = 5040 - 13700 e^{-1}$$

$$I = 30240 - 82200 e^{-1}$$

$$I = 15113 - 41100 e^{-1}$$



Question 17 Soit

$$I = \int_0^5 (2x^2 + 13x + 15)^{-1} dx$$

On a

$$I = -1/7 \ln\left(\frac{6}{13}\right)$$

$$I = -2/7 \ln\left(\frac{6}{13}\right)$$

$$I = -3/7 \ln\left(\frac{6}{13}\right) - 4$$

Généralités

Question 18 ♣ On suppose que l'on a montré l'implication

$$\mathcal{A} \implies \mathcal{B},$$

où \mathcal{A} et \mathcal{B} sont deux propriétés. Alors,

la propriété \mathcal{A} est une condition nécessaire à la propriété \mathcal{B}

la propriété \mathcal{B} est une condition suffisante à la propriété \mathcal{A}

la propriété \mathcal{B} est une condition nécessaire à la propriété \mathcal{A}

la propriété \mathcal{A} est une condition suffisante à la propriété \mathcal{B}

Aucune de ces réponses n'est correcte.

Question 19 ♣ On suppose que l'on a montré la double implication

$$\mathcal{A} \iff \mathcal{B},$$

où \mathcal{A} et \mathcal{B} sont deux propriétés. Alors,

la propriété \mathcal{A} est une condition nécessaire à la propriété \mathcal{B}

la propriété \mathcal{B} est une condition suffisante à la propriété \mathcal{A}

la propriété \mathcal{B} est une condition nécessaire à la propriété \mathcal{A}

la propriété \mathcal{A} est une condition suffisante à la propriété \mathcal{B}

Aucune de ces réponses n'est correcte.