POLYTECH LYON

Université Claude Bernard Lyon 1

Informatique 3A MFI & MFIappro

Automne 2024

QCM (maison) pour le 03 octobre 2024

Important :
Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter aucune, une ou plusieurs bonnes réponses. Les autres questions ont une unique bonne réponse.

Ce QCM est en principe modifiable à l'écran et vous devez cocher les cases manuellement. En cas d'erreur, vous pouvez les cocher ou décocher autant de fois que nécesaire.

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur `http ://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`

HAUNIME Anne

Chapitre 1, section 1.2

Question 1 Si f est une fonction définie en x_0, elle est nécessairement continue en x_0.

☐ C'est faux ☐ C'est vrai

Question 2 ♣ La fonction $x \mapsto \sin(x)/x$ est continue sur $\mathbb{R}$.

☐ C'est vrai si on la prolonge par continuité par la valeur 0 en zéro.
☐ C'est vrai si on la prolonge par continuité par la valeur 1 en zéro.
☐ C'est vrai
☐ C'est faux
☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 3 La fonction signe est continue sur $\mathbb{R}$.

☐ C'est vrai ☐ C'est faux

Chapitre 1, section 1.3

Question 4 Si une fonction est dérivable en x_0, elle est alors

☐ discontinue en x_0 ☐ continue en x_0

Question 5 La dérivée de $x \mapsto \sqrt{x}$ est $x \mapsto 1/(2\sqrt{x})$.

☐ C'est vrai ☐ C'est faux

Question 6 ♣ La fonction $f\ : x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur

☐ $\mathbb{R}_+^*$ ☐ $\mathbb{R}$ ☐ $\mathbb{R}_+$ ☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 7 ♣ Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Soit une fonction est continue et positive sur $[0, a]$, nulle en 0 et en a, Alors

☐ elle admet un maximum positif sur $[0, a]$.
☐ elle admet un maximum strictement positif sur $[0, a]$.
☐ elle admet un maximum positif sur $]0, a[$.
☐ elle admet un maximum positif sur $[0, a]$, atteint en un unique point.
☐ elle admet un maximum strictement positif sur $[0, a]$, atteint en un unique point.
☐ elle admet un maximum positif sur $]0, a[$, atteint en un unique point.
☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Chapitre 1, section 1.4

Question 8 Une fonction qui admet un développement limité à l'ordre 5 en un point x_0

☐ admet un développement limité à l'ordre 6 ☐ admet un développement limité à l'ordre 3

en ce point.

Question 9 La fonction $f\ : x \mapsto \sin(\tan x)$ admet à l'ordre 7, en zéro le développement limité suivant

☐
$$x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 - \frac{55}{1008}x^7 + o\left(x^7\right). \tag{1}$$

☐
$$x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^4 - \frac{55}{1008}x^7 + o\left(x^7\right). \tag{2}$$

☐
$$x + \frac{1}{6x^3} - \frac{1}{40}x^4 - \frac{55}{1008}x^7 + o\left(x^7\right). \tag{3}$$

Question 10 La fonction $f\ : x \mapsto \sin^6 x$ admet à l'ordre 6, en zéro le développement limité suivant

☐
$$x^5 + o\left(x^6\right) \tag{1}$$

☐
$$x^6 + o\left(x^6\right) \tag{2}$$

Chapitre 3

Question 11 Posons

$$I = \int_0^{1/3\,\pi} \tan(x)\,dx.$$

On a

☐
$$I = \ln(2). \tag{1}$$

☐
$$I = -1. \tag{2}$$

☐
$$I = 2\tan(1/3\,\pi). \tag{3}$$

Question 12 ♣ Posons

$$I = \int_0^{1/2\,\pi} \cos^2 x \sin x dx$$

On effectue le changement de variable $t = \cos x$. L'intégrale I est égale à

☐
$$I = \int_0^1 x^2 dx. \tag{1}$$

☐
$$I = \int_0^{1/2\,\pi} x^2 dx. \tag{2}$$

☐
$$I = \int_0^{1/2\,\pi} t^2 dt. \tag{3}$$

☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 13 ♣
Reprenons l'exemple 3.4 page 20 du cours :
Calculons, pour $R \in \mathbb{R}_+$, l'intégrale

$$I_R = \int_0^R \sqrt{R^2 - u^2}du.$$

On pose

$$u = R\cos x,$$

c'est-à-dire, on que l'on choisit ϕ définie par

$$\phi(x) = R\cos x, \tag{1}$$

L'"ancienne variable" est u et la "nouvelle" est x. Procèdons donc aux *trois* substitutions vue en section 3.4.1 du cours.

1. On remplace l'intégrande $\sqrt{R^2-u^2}$ par $\sqrt{R^2 - R^2\cos^2 x}$. On a donc successivement

$$\begin{aligned}\sqrt{R^2 - R^2\cos^2 x} &= \sqrt{R^2\left(1-\cos^2 x\right)},\\ &= \sqrt{R^2}\sqrt{\left(1-\cos^2 x\right)},\\ &= \sqrt{R^2}\sqrt{\sin^2 x},\\ &= |R|\,|\sin x|\,,\end{aligned}$$

   et puisque $R \geq 0$

$$= R\,|\sin x|\,.$$

2. Chosissons *une* valeur de α telle que $0 = R\cos(\alpha)$. Choisissons [a]

$$\alpha = \frac{\pi}{2}. \tag{2}$$

   Chosissons *une* valeur de α telle que $R = R\cos(\alpha)$. Choisissons

$$\alpha = 2\pi. \tag{3}$$

3. On a aussi $\frac{du}{dx} = \phi'(x) = -R\sin x$, et donc $du = -R\sin x dx$. Ainsi,

   on remplace du par $-R\sin dx$.

Finissons maintenant effectivement le calcul. On a donc successivement :

$$I_R = \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} R\,|\sin x|\,(-R\sin x)\,dx = -R^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} |\sin x|\sin x dx = -R^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}\sin^2 x dx.$$

On linéarise le sinus sous la forme :

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}\big(1-\cos(2x)\big).$$

On a donc

$$\begin{aligned}I &= -R^2\int_{\pi/2}^{2\pi}\frac{1}{2}\big(1-\cos(2x)\big)dx,\\ &= -\frac{1}{2}R^2\int_{\pi/2}^{2\pi} 1-\cos(2x)dx,\\ &= -\frac{1}{2}R^2\left[x - \frac{1}{2}\sin(2x)\right]_{\pi/2}^{2\pi}.\end{aligned}$$

Et donc, on a

$$I_R = -\frac{3\pi}{4}R^2. \tag{4}$$

- ☐ Ce raisonnement est faux parce que $\phi\ : x \mapsto R\cos x$ n'est pas bijective sur l'intervalle $[\pi/2, 2\pi]$.
- ☐ Ce raisonnement est faux parce que la formule de changement de variable de la section 3.4.1 page 20 du cours est fausse.
- ☐ Ce raisonnement est faux parce que les valeurs données par (2) et (3) sont erronées.
- ☐ Ce raisonnement est vrai.
- ☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

---

a. On pourra prendre tout autre valeur !

Question 14
Calculer le travail qu'il faut dépenser pour allonger un ressort d'une longueur passant de 0 à l_0 sachant que la force est proportionnelle au déplacement : $F = Kx$.
On pourra décomposer le travail de la force en une somme de travaux élémentaires dW chacun étant égal au travail de la force F sur le trajet dx puis sommer tous ces travaux élémentaires :

$$I = \int_0^{l_0} dW.$$

☐ f ☐ p ☐ m ☐ j *Reservé*

Question 15 Soit

$$I = \int_0^{1/4\,\pi} (\cos(x))^3\, dx$$

On a

☐ $I = \frac{5}{12}\sqrt{2}$ ☐ $I = 5/6\sqrt{2}$ ☐ $I = 5/4\sqrt{2}$

Question 16 Soit

$$I = \int_0^{e^1} x^7 e^{-x} dx$$

On a

☐ $I = 5040 - 13700\, e^{-1}$ ☐ $I = 30240 - 82200\, e^{-1}$ ☐ $I = 15113 - 41100\, e^{-1}$

Question 17 Soit

$$I = \int_0^5 \left(2\,x^2 + 13\,x + 15\right)^{-1} dx$$

On a

☐ $I = -1/7\ \ln\left(\frac{6}{13}\right)$ ☐ $I = -2/7\ \ln\left(\frac{6}{13}\right)$ ☐ $I = -3/7\ \ln\left(\frac{6}{13}\right) - 4$

Généralités

Question 18 ♣ On suppose que l'on a montré l'implication

$$\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B},$$

où $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux propriétés. Alors,

☐ la propriété $\mathcal{A}$ est une condition nécessaire à la propriété $\mathcal{B}$
☐ la propriété $\mathcal{B}$ est une condition suffisante à la propriété $\mathcal{A}$
☐ la propriété $\mathcal{B}$ est une condition nécessaire à la propriété $\mathcal{A}$
☐ la propriété $\mathcal{A}$ est une condition suffisante à la propriété $\mathcal{B}$
☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 19 ♣ On suppose que l'on a montré la double implication

$$\mathcal{A} \Longleftrightarrow \mathcal{B},$$

où $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux propriétés. Alors,

☐ la propriété $\mathcal{A}$ est une condition nécessaire à la propriété $\mathcal{B}$
☐ la propriété $\mathcal{B}$ est une condition suffisante à la propriété $\mathcal{A}$
☐ la propriété $\mathcal{B}$ est une condition nécessaire à la propriété $\mathcal{A}$
☐ la propriété $\mathcal{A}$ est une condition suffisante à la propriété $\mathcal{B}$
☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*