Informatique 3A MFI & MFIappro — Automne 2024

QCM (maison) pour le 03 octobre 2024

Important :
Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter aucune, une ou plusieurs bonnes réponses. Les autres questions ont une unique bonne réponse.

Ce QCM est en principe modifiable à l'écran et vous devez cocher les cases manuellement. En cas d'erreur, vous pouvez les cocher ou décocher autant de fois que nécesaire.

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur `http ://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`

HAUNIME Anne

Chapitre 1, section 1.2

Question 1 Si f est une fonction définie en x_0, elle est nécessairement continue en x_0.

- [x] C'est faux
- [ ] C'est vrai

Explication **:** Voir la section 1.2 du cours.

Question 2 ♣ La fonction $x \mapsto \sin(x)/x$ est continue sur $\mathbb{R}$.

- [ ] C'est vrai si on la prolonge par continuité par la valeur 0 en zéro.
- [x] C'est vrai si on la prolonge par continuité par la valeur 1 en zéro.
- [ ] C'est vrai
- [ ] C'est faux
- [ ] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Explication **:** Elle n'est pas définie en zéro mais on peut la prolonger par continuité en zéro, par sa limite qui vaut 1. Voir l'exemple 1.3 du cours.

Question 3 La fonction signe est continue sur $\mathbb{R}$.

- [ ] C'est vrai
- [x] C'est faux

Explication **:** Elle est discontinue en zéro. Voir l'exemple 1.1 du cours.

Chapitre 1, section 1.3

Question 4 Si une fonction est dérivable en x_0, elle est alors

- [ ] discontinue en x_0
- [x] continue en x_0

Explication **:** Voir section 1.3.1. du cours. En effet, on a

$$f(b) - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \times (b - a),$$

et si f est dérivable, alors d'après (1.9), on a à la limite $b \to a$:

$$\lim_{\substack{b \to a \\ b \neq a}} f(b) - f(a) = 0.$$

Question 5 La dérivée de $x \mapsto \sqrt{x}$ est $x \mapsto 1/(2\sqrt{x})$.

- [x] C'est vrai
- [ ] C'est faux

Explication **:** Voir par exemple la formule (1.19f)du cours avec $\alpha = 1/2$.

Question 6 ♣ La fonction $f\ : x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur

■ $\mathbb{R}_+^*$ ☐ $\mathbb{R}$ ☐ $\mathbb{R}_+$ ☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Explication : La fonction f n'est définie que sur $\mathbb{R}_+$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, de dérivée $x \mapsto 1/(2\sqrt{x})$. Voir par exemple la formule (1.19f) du cours avec $\alpha = 1/2$. En zéro, cette fonction a une pente infinie et n'y est donc pas dérivable. Pour démontrer cela, on peut remarquer que

$$\forall x > 0, \quad \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

et donc

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = +\infty. \tag{1}$$

On peut aussi écrire

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

et donc

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f'(x) = +\infty,$$

ce qui implique aussi (1).

Question 7 ♣ Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Soit une fonction est continue et positive sur $[0, a]$, nulle en 0 et en a,
Alors

■ elle admet un maximum positif sur $[0, a]$.
☐ elle admet un maximum strictement positif sur $[0, a]$.
☐ elle admet un maximum positif sur $]0, a[$.
☐ elle admet un maximum positif sur $[0, a]$, atteint en un unique point.
☐ elle admet un maximum strictement positif sur $[0, a]$, atteint en un unique point.
☐ elle admet un maximum positif sur $]0, a[$, atteint en un unique point.
☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Explication : La fonction atteint ses bornes sur $[0, a]$ (puisqu'elle y est continue). Elle admet donc un maximum sur $[0, a]$ qui positif puisque f est positive. Son maximum n'est pas nécessairement atteint en $]0, a[$ et n'est pas nécessairement strictement positif (si par exemple la fonction est nulle $[0, a]$). Enfin, il n'y a aucune raison que ce maximum soit atteint en un unique point (penser par exemple à la fonction $\cos^2(x)$ sur $[0, 14\pi + \pi/2]$ qui atteint son maximum 1, en tous les multiples de π). On peut donc affirmer que "elle admet un maximum positif sur $[0, a]$", les autres réponses étant fausses.

Chapitre 1, section 1.4

Question 8 Une fonction qui admet un développement limité à l'ordre 5 en un point x_0

☐ admet un développement limité à l'ordre 6 ■ admet un développement limité à l'ordre 3

en ce point.
Explication : Qui peut le plus peut le moins. On peut tronquer un développement limité puisque $o((x - x_0)^3 = o((x - x_0)^5$. Mais, dans l'autre sens, le terme $o((x - x_0)^5$ "bloque" le développement limité à l'ordre 5 et on ne peut obtenir le terme en $(x - x_0)^6$ du développement limité. Voir section 1.4.1 du cours.

Question 9 La fonction $f\ : x \mapsto \sin(\tan x)$ admet à l'ordre 7, en zéro le développement limité suivant

■
$$x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 - \frac{55}{1008}x^7 + o\left(x^7\right). \tag{1}$$

☐
$$x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^4 - \frac{55}{1008}x^7 + o\left(x^7\right). \tag{2}$$

☐
$$x + \frac{1}{6x^3} - \frac{1}{40}x^4 - \frac{55}{1008}x^7 + o\left(x^7\right). \tag{3}$$

Explication : La fonction f est impaire : son dévelopement limité ne contient que des termes associés à des puisssances impaires. Ainsi, on pouvait sans calcul et d'emblée éliminer la réponse (2) qui contenait un terme associé à une puissance paire. Par ailleurs, la réponse (3) contient un terme $\frac{1}{6x^3}$ qui tend vers $\pm\infty$ quand x tend vers zéro ce qui n'est pas possible puisque f est continue en zéro. La seule bonne réponse possible (1) venait de la CORRECTION DE L'EXERCICE DE TD 1.23.

Question 10 La fonction $f\ : x \mapsto \sin^6 x$ admet à l'ordre 6, en zéro le développement limité suivant

☐
$$x^5 + o\left(x^6\right) \tag{1}$$

☒
$$x^6 + o\left(x^6\right) \tag{2}$$

Explication : la réponse (1) impliquerait qu'en zéro, f serait équivalent à x^5. Or, en zéro, $x \mapsto \sin x$ est équivalente à x donc f est équivalent à x^6. La seule bonne réponse possible (2) venait de la CORRECTION DE L'EXERCICE DE TD 1.26.

Chapitre 3

Question 11 Posons
$$I = \int_0^{1/3\,\pi} \tan(x)\, dx.$$

On a

☒
$$I = \ln(2)\,. \tag{1}$$

☐
$$I = -1. \tag{2}$$

☐
$$I = 2\tan(1/3\,\pi)\,. \tag{3}$$

Explication : On peut éliminer d'emblée les résultats des équations (2) et (3). En effet, on a, puisque $x \mapsto \tan$ est croissante sur $[0, 1/3\,\pi]$
$$\forall x \in [0, 1/3\,\pi]\,, \quad 0 \le \tan(x) \le \tan(1/3\,\pi)\,,$$
et par intégration sur $[0, 1/3\,\pi]$
$$0 \le \int_0^{1/3\,\pi} \tan(x)\, dx \le 1/3\,\pi \tan(1/3\,\pi)\,,$$
et en particulier puisque $1/3\,\pi < 2$
$$-1 < I < 2\tan(1/3\,\pi)\,.$$
Il ne reste plus que le résultat correct ((1)), issu de la CORRECTION DE L'EXERCICE DE TD 3.1, question 5 .

Question 12 ♣ Posons
$$I = \int_0^{1/2\,\pi} \cos^2 x \sin x dx$$
On effectue le changement de variable $t = \cos x$. L'intégrale I est égale à

☒
$$I = \int_0^1 x^2 dx. \tag{1}$$

☐
$$I = \int_0^{1/2\,\pi} x^2 dx. \tag{2}$$

☒
$$I = \int_0^{1/2\,\pi} t^2 dt. \tag{3}$$

☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Explication : L'équation (1) est correcte. (Voir l'exemple 3.7 du cours.) L'équation (3), où l'on a simplement changé la variable muette x en t est aussi correcte ! L'équation (1) n'est correcte (les bornes n'ont pas été modifiées !).

Question 13 ♣
Reprenons l'exemple 3.4 page 20 du cours :
Calculons, pour $R \in \mathbb{R}_+$, l'intégrale

$$I_R = \int_0^R \sqrt{R^2 - u^2} du.$$

On pose

$$u = R \cos x,$$

c'est-à-dire, on que l'on choisit ϕ définie par

$$\phi(x) = R \cos x, \tag{1}$$

L'"ancienne variable" est u et la "nouvelle" est x. Procèdons donc aux *trois* substitutions vue en section 3.4.1 du cours.

1. On remplace l'intégrande $\sqrt{R^2 - u^2}$ par $\sqrt{R^2 - R^2 \cos^2 x}$. On a donc successivement

$$\begin{aligned}\sqrt{R^2 - R^2 \cos^2 x} &= \sqrt{R^2 \left(1 - \cos^2 x\right)},\\ &= \sqrt{R^2}\sqrt{\left(1 - \cos^2 x\right)},\\ &= \sqrt{R^2}\sqrt{\sin^2 x},\\ &= |R| \left|\sin x\right|,\end{aligned}$$

et puisque $R \geq 0$

$$= R \left|\sin x\right|.$$

2. Chosissons *une* valeur de α telle que $0 = R\cos(\alpha)$. Choisissons [a]

$$\alpha = \frac{\pi}{2}. \tag{2}$$

Chosissons *une* valeur de α telle que $R = R\cos(\alpha)$. Choisissons

$$\alpha = 2\pi. \tag{3}$$

3. On a aussi $\frac{du}{dx} = \phi'(x) = -R \sin x$, et donc $du = -R \sin x dx$. Ainsi,

on remplace du par $-R \sin dx$.

Finissons maintenant effectivement le calcul. On a donc successivement :

$$I_R = \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} R \left|\sin x\right| \left(-R \sin x\right) dx = -R^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \left|\sin x\right| \sin x dx = -R^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \sin^2 x dx.$$

On linéarise le sinus sous la forme :

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}\big(1 - \cos(2x)\big).$$

On a donc

$$\begin{aligned}I &= -R^2 \int_{\pi/2}^{2\pi} \frac{1}{2}\big(1 - \cos(2x)\big) dx,\\ &= -\frac{1}{2}R^2 \int_{\pi/2}^{2\pi} 1 - \cos(2x) dx,\\ &= -\frac{1}{2}R^2 \left[x - \frac{1}{2}\sin(2x)\right]_{\pi/2}^{2\pi}.\end{aligned}$$

Et donc, on a

$$I_R = -\frac{3\pi}{4}R^2. \tag{4}$$

- ☐ Ce raisonnement est faux parce que $\phi\ : x \mapsto R \cos x$ n'est pas bijective sur l'intervalle $[\pi/2, 2\pi]$.
- ☐ Ce raisonnement est faux parce que la formule de changement de variable de la section 3.4.1 page 20 du cours est fausse.
- ☐ Ce raisonnement est faux parce que les valeurs données par (2) et (3) sont erronées.
- ☐ Ce raisonnement est vrai.
- ■ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Explication : On renvoie à la nouvelle annexe E du cours, non distribuée en version papier, mais présente sur le ouaib à l'url `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MFI/new_annexeD_coursMFI.pdf`.

---

[a] On pourra prendre tout autre valeur !

Question 14
Calculer le travail qu'il faut dépenser pour allonger un ressort d'une longueur passant de 0 à l_0 sachant que la force est proportionnelle au déplacement : $F = Kx$.
On pourra décomposer le travail de la force en une somme de travaux élémentaires dW chacun étant égal au travail de la force F sur le trajet dx puis sommer tous ces travaux élémentaires :

$$I = \int_0^{l_0} dW.$$

☐ f ☐ p ☐ m ■ j *Reservé*

Le travail d'une force $\vec{F}$ sur un trajet $\overrightarrow{AB}$ est égal à

$$W_{\overrightarrow{AB}}\left(\vec{F}\right) = \vec{F}\cdot\overrightarrow{AB} \tag{1}$$

formule qu'il n'est valable que si la force $\vec{F}$ est constante le long de $\overrightarrow{AB}$. Si elle n'est pas constante, il faut déterminer une somme des travaux infinitésimaux dW. Le travail infinitésimal est défini comme le travail $\vec{F}$ sur le trajet infinitésimal $\overrightarrow{dl}$ le long duquel $\vec{F}$ est "approximativement constant", de sorte que (1) devient

$$dW\left(\vec{F}\right) = \vec{F}\cdot\overrightarrow{dl}, \tag{2}$$

et naturellement :

$$\overrightarrow{AB} = \int_A^B \overrightarrow{dl}. \tag{3}$$

On n'a plus qu'à écrire

$$W_{\overrightarrow{AB}}\left(\vec{F}\right) = \int_A^B \vec{F}\cdot\overrightarrow{dl}. \tag{4}$$

Dans le cas du ressort, F est dans l'axe du ressort et colinéaire à $\overrightarrow{dl}$ de sorte que

$$W_{\overrightarrow{AB}}\left(\vec{F}\right) = \int_A^B F dl.$$

On passe d'une position au repos (ou la longueur du ressort, par rapport à sa longueur à vide) est nulle à une position où la longueur est l_0. On a donc

$$W\left(\vec{F}\right) = \int_0^{l_0} F(l) dl.$$

et puisque $F(l) = Kl$, on a donc

$$W\left(\vec{F}\right) = \int_0^{l_0} Kl dl.$$

soit encore

$$W\left(\vec{F}\right) = K\left[\frac{l^2}{2}\right]_0^{l_0},$$

et donc

$$W\left(\vec{F}\right) = \frac{1}{2}Kl_0^2, \tag{5}$$

qui correspond à l'énergie de déformation élastique du ressort de longueur l_0 (emmagisinée par le ressort et fournie par celui qui a tiré !).

Question 15 Soit

$$I = \int_0^{1/4\,\pi} (\cos(x))^3\, dx$$

On a

■ $I = \frac{5}{12}\sqrt{2}$ ☐ $I = 5/6\sqrt{2}$ ☐ $I = 5/4\sqrt{2}$

Explication **:** On linéarise le cube du cosinus.

Question 16 Soit
$$I = \int_0^{e^1} x^7 e^{-x} dx$$
On a

■ $I = 5040 - 13700\, e^{-1}$ ☐ $I = 30240 - 82200\, e^{-1}$ ☐ $I = 15113 - 41100\, e^{-1}$

Explication : Voir exercice la CORRECTION DE L'EXERCICE DE TD 3.3.

Question 17 Soit
$$I = \int_0^5 \left(2\,x^2 + 13\,x + 15\right)^{-1} dx$$
On a

■ $I = -1/7\, \ln\left(\frac{6}{13}\right)$ ☐ $I = -2/7\, \ln\left(\frac{6}{13}\right)$ ☐ $I = -3/7\, \ln\left(\frac{6}{13}\right) - 4$

Explication : On factorise le dénominateur et on décompose en éléments simples.

Généralités

Question 18 ♣ On suppose que l'on a montré l'implication
$$\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B},$$
où $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux propriétés. Alors,

- ☐ la propriété $\mathcal{A}$ est une condition nécessaire à la propriété $\mathcal{B}$
- ☐ la propriété $\mathcal{B}$ est une condition suffisante à la propriété $\mathcal{A}$
- ■ la propriété $\mathcal{B}$ est une condition nécessaire à la propriété $\mathcal{A}$
- ■ la propriété $\mathcal{A}$ est une condition suffisante à la propriété $\mathcal{B}$
- ☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Explication : Simple question de vocabulaire !
En effet, d'après `https://fr.wikipedia.org/wiki/Condition_nécessaire` en logique mathématique, une condition nécessaire à l'assertion $\mathcal{A}$ est une assertion $\mathcal{B}$ telle que : $\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}$. Autrement dit, il est nécessaire que l'assertion $\mathcal{B}$ soit vraie pour que l'assertion $\mathcal{A}$ le soit.
D'après `https://fr.wikipedia.org/wiki/Condition_suffisante`, une condition suffisante à l'assertion $\mathcal{B}$ est une assertion $\mathcal{A}$ telle que : $\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}$. Autrement dit, il suffit que l'assertion $\mathcal{A}$ soit vraie pour que l'assertion $\mathcal{B}$ le soit.

Question 19 ♣ On suppose que l'on a montré la double implication
$$\mathcal{A} \Longleftrightarrow \mathcal{B},$$
où $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux propriétés. Alors,

- ■ la propriété $\mathcal{A}$ est une condition nécessaire à la propriété $\mathcal{B}$
- ■ la propriété $\mathcal{B}$ est une condition suffisante à la propriété $\mathcal{A}$
- ■ la propriété $\mathcal{B}$ est une condition nécessaire à la propriété $\mathcal{A}$
- ■ la propriété $\mathcal{A}$ est une condition suffisante à la propriété $\mathcal{B}$
- ☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Explication : Simple question de vocabulaire, puisque
$$\mathcal{A} \Longleftrightarrow \mathcal{B},$$
est équivalent à
$$\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B} \text{ et } \mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{A}$$
En effet, d'après `https://fr.wikipedia.org/wiki/Condition_nécessaire` en logique mathématique, une condition nécessaire à l'assertion $\mathcal{A}$ est une assertion $\mathcal{B}$ telle que : $\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}$. Autrement dit, il est nécessaire que l'assertion $\mathcal{B}$ soit vraie pour que l'assertion $\mathcal{A}$ le soit.
D'après `https://fr.wikipedia.org/wiki/Condition_suffisante`, une condition suffisante à l'assertion $\mathcal{B}$ est une assertion $\mathcal{A}$ telle que : $\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}$. Autrement dit, il suffit que l'assertion $\mathcal{A}$ soit vraie pour que l'assertion $\mathcal{B}$ le soit.