Informatique 3A MFI — Automne 2024

Contrôle continu du 25 novembre 2024

Durée : 1,5 heure(s)

Documents autorisés (hors QCM) : OUI ☒ NON ☐
Autorisés *: Polycopiés de l'UE, notes manuscrites.*
Interdits *: Écrans (sauf tablette et ordinateurs en mode avion), Livres et Internet*

Calculatrice autorisée (hors QCM) : OUI ☒ NON ☐
Tout type

Exercice 1.
Durée : 15 minutes.
Voir sujet de QCM n° 4 distribué.
Aucun document, aucun écran autorisé pendant le temps de ce QCM.

Exercice 2.
Les deux questions de cet exercice sont indépendantes. Chacune d'elles propose une preuve alternative de la formule (8.20) du cours pour déterminer la valeur de

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k.$$

(1) On se pose l'habituel problème : "n personnes trinquent ensemble, chacune d'elles trinquant une fois seulement avec chacune des autres. Combien de "tchin" entend-on en tout ?". Notons N le nombre de "tchin".

(a) Si on affirme que chaque personne fait un " tchin " avec chacune des $n-1$ autres, montrer que le nombre obtenu de "tchin" ainsi déterminé est égal à $2N$. En déduire la valeur de N en fonction de n.

(b) On raisonne maintenant autrement.
— La personne n° 1 fait $n-1$ "tchin" avec les personnes n° 2, n° 3, ..., n° n ;
— La personne n° 2 fait $n-2$ "tchin" avec les personnes n° 3, n° 4, ..., n° n, puisque le "tchin" avec la personne n° 1 a déjà été pris en compte ;
— La personne n° 3 fait $n-3$ "tchin" avec les personnes n° 4, n° 5, ..., n° n, puisque les autres "tchin" avec les personnes n° 1 et n° 2 ont déjà été pris en compte ;
— $\vdots$ $\vdots$

— La personne n° $n-2$ fait 2 "tchin" avec les personnes n° $n-1$ et n° n, puisque les autres "tchin" avec les personne n° 1 à n° $n-3$ ont déjà été pris en compte ;
— La personne n° $n-1$ fait 1 "tchin" avec la personne n° n, puisque les autres "tchin" avec les personne n° 1 à n° $n-1$ ont déjà été pris en compte ;
— La personne n° n fait 0 "tchin", puisque les autres "tchin" avec les personnes n° 1 à n° $n-1$ déjà été pris en compte.

En déduire N sous la forme d'une somme.

(c) Des questions 1a et 1b, déduire l'expression explicite de S_{n-1} puis de S_n.

(2) Calculer de deux façons différentes la somme

$$\mathcal{S}_{n,2} = \sum_{k=1}^{n} (k+1)^2 - k^2,$$

et en déduire de nouveau la valeur de S_n.

Exercice 3.
Soit

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3}.$$

(1) Montrer que c'est une série alternée.

(2) Donner une valeur approchée de S avec une erreur inférieure à 10^{-3}.

Exercice 4. Construire le graphe de la fonction suivante :

$$f(x) = xe^{\frac{2x}{x^2-1}}.$$

Exercice 5.
Fournir deux algorithmes de complexité $\mathcal{O}(n)$ et $\mathcal{O}(n^3)$. On prendra soin de détailler la preuve de la complexité.

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`