Informatique 3A MFI | Automne 2024

Corrigé du contrôle continu du 25 novembre 2024

Correction de l'exercice 1.
Voir correction du QCM n° 4 en date du 25 novembre 2024, disponible sur Internet.

Correction de l'exercice 2.

(1) Donnons un petit texte qui sera intégré dans le polycopié de cours.

On se pose l'habituel problème : "n personnes trinquent ensemble, chacune d'elles trinquant une fois seulement avec chacune des autres. Combien de "tchin" entend-on en tout ?". Notons N le nombre de "tchin".

On peut raisonner de la façon suivante :

(a) On affirme que chaque personne fait un " tchin " avec chacune des $n-1$ autres. On numérote par exemple les personnes 1, 2, 3, ..., n. Dans ce raisonnement,
- La personne n° 1 fait $n-1$ "tchin" avec les personnes n° 2, n° 3, ..., n° n ;
- La personne n° 2 fait $n-2$ "tchin" avec les personnes n° 3, n° 4, ..., n° n et 1 "tchin" avec la personne n° 1 déjà été pris en compte ;
- La personne n° 3 fait $n-3$ "tchin" avec les personnes n° 4, n° 5, ..., n° n et 2 "tchin" avec les personnes n° 1 et n° 2 déjà été pris en compte ;
- $\vdots$ $\quad$ $\vdots$
- La personne n° $n-2$ fait 2 "tchin" avec les personnes n° $n-1$ et n° n et $n-3$ "tchin" avec les personnes n° 1 à n° $n-3$ déjà été pris en compte ;
- La personne n° $n-1$ fait 1 "tchin" avec la personne n° n et $n-2$ "tchin" avec les personnes n° 1 à n° $n-2$ déjà été pris en compte.
- La personne n° n fait 0 "tchin" et $n-1$ "tchin" avec les personnes n° 1 à n° $n-1$ déjà été pris en compte.

Autrement dit, on pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, la personne n° i fait
- $n-i$ "tchin" avec les personnes n° $i+1$ à n ;
- et $i-1$ "tchin" avec les personnes n° 1 à $i-1$, déjà pris en compte ;

et donc en tout $n-1$ "tchin". Le nombre de "tchin" est bien le double du nombre de "tchin" réellement entendu. Puisque dans ce raisonnement, on compte $n \times (n-1)$ (puisque $n-1$ "tchin" pour chacune des n personnes), on a donc

$$2N = n(n-1),$$

et donc

$$N = \frac{n(n-1)}{2}. \tag{1}$$

(b) On raisonne maintenant autrement.
- La personne n° 1 fait $n-1$ "tchin" avec les personnes n° 2, n° 3, ..., n° n ;
- La personne n° 2 fait $n-2$ "tchin" avec les personnes n° 3, n° 4, ..., n° n, puisque le "tchin" avec la personne n° 1 a déjà été pris en compte ;

— La personne n° 3 fait $n-3$ "tchin" avec les personnes n° 4, n° 5, ..., n° n, puisque les autres "tchin" avec les personnes n° 1 et n° 2 ont déjà été pris en compte ;
— $\vdots$ $\vdots$
— La personne n° $n-2$ fait 2 "tchin" avec les personnes n° $n-1$ et n° n, puisque les autres "tchin" avec les personne n° 1 à n° $n-3$ ont déjà été pris en compte ;
— La personne n° $n-1$ fait 1 "tchin" avec la personne n° n, puisque les autres "tchin" avec les personne n° 1 à n° $n-1$ ont déjà été pris en compte ;
— La personne n° n fait 0 "tchin", puisque les autres "tchin" avec les personnes n° 1 à n° $n-1$ déjà été pris en compte.

Autrement dit, on pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, la personne n° i fait $n-i$ "tchin" avec les personnes n° $i+1$ à n. On déduit donc que le nombre de "tchin" vaut

$$N = (n-1) + (n-2) + ... + 2 + 1 = S_n$$

et donc

$$N = 1 + 2 + 3 + ... + (n-1) = S_{n-1}. \tag{2}$$

(c) De (1) et (2), on déduit

$$S_{n-1} = \frac{n(n-1)}{2},$$

et on retrouve bien, en remplaçant $n-1$ par n :

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2},$$

(2) Rappelons le calcul fait dans le point 5b(ii) page 67 du cours.

On calcule de deux façons différentes la somme

$$\mathcal{S}_{n,2} = \sum_{k=1}^{n} (k+1)^2 - k^2$$

(a) Par somme télescopique, on a, d'une part

$$\mathcal{S}_{n,2} = (n+1)^2 - 1. \tag{3}$$

(b) D'autre part, si on développe le terme $(k+1)^2$, il vient

$$\mathcal{S}_{n,2} = \sum_{k=1}^{n} k^2 + 2k + 1 - k^2,$$

et donc

$$\mathcal{S}_{n,2} = \sum_{k=1}^{n} (2k+1). \tag{4}$$

En comparant (3) et (4), il vient

$$\sum_{k=1}^{n} (2k+1) = (n+1)^2 - 1,$$

et donc

$$2\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} 1\right) = (n+1)^2 - 1,$$

et donc

$$2S_n + n = (n+1)^2 - 1,$$

ce qui est finalement équivalent à

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{2}\left((n+1)^2-1-n\right),\\
&= \frac{n+1}{2}\left(n+1-1\right),\\
&= \frac{n+1}{2}\left(n\right).
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 3.
Exercice 1931 issu de `http://exo7.emath.fr/`, par Roussel 01/09/2001

(1) La série est convergente car alternée (voir théorème 9.14 page 80 du cours).

Remarque 1. Elle est aussi absolument convergente, mais il est indispensable d'évoquer la série alternée pour le point suivant.

(2) Le reste à l'ordre N est majoré par $1/(N+1)^3$. Voir en effet l'inégalité (9.15a) du cours. Il faut donc choisir N tel que $N+1 \geq \sqrt[3]{1/\varepsilon}$ soit, numériquement $N=9$. On trouve

$$S \approx S_N = 0,902\ 116\ 476.$$

Remarque 2. On peut calculer

$$S = 3/4\,\zeta\left(3\right).$$

En effet, on peut écrire successivement

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3},\\
&= \sum_{\substack{n=1,\\ n \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3} + \sum_{\substack{n=1,\\ n \text{ impair}}}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3},\\
&= -\sum_{\substack{n=1,\\ n \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{1}{n^3} + \sum_{\substack{n=1,\\ n \text{ impair}}}^{+\infty} \frac{1}{n^3},\\
&= -2\sum_{\substack{n=1,\\ n \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{1}{n^3} + \sum_{\substack{n=1,\\ n \text{ impair}}}^{+\infty} \frac{1}{n^3} + \sum_{\substack{n=1,\\ n \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{1}{n^3},\\
&= -2\sum_{\substack{n=1,\\ n \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{1}{n^3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3},\\
&= -2\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3},\\
&= -\frac{1}{4}\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3},\\
&= \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}.
\end{aligned}$$

On vérifie *a posteriori* que

$$|S-S_N| = |0,901\ 542\ 677 - 0,902\ 116\ 476| = 5,737\ 98 \times 10^{-4} \leq \varepsilon.$$

Correction de l'exercice 4.
On renvoie au corrigé de l'exercice de TD 11.6 rappelé ci-dessous :
Exercice 5443-4) issu de `http://exo7.emath.fr/`, par Rouget 2010/07/10
On notera $\mathcal{C}$ le graphe de f.
f est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$. De plus, pour $x\neq 0$,

$$f(\frac{1}{x})=\frac{1}{x}e^{\frac{2/x}{1/x^2-1}}=\frac{1}{x}e^{-\frac{2x}{x^2-1}}=\frac{1}{f(x)}.$$

Ce genre de constatation peut servir à calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ si l'on connait $\lim_{x\to 0,\, x>0} f(x)$, obtenir les variations de f sur $]0,1[$ si on les connait sur $]1,+\infty[$ ...
On peut aussi noter que $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, $f(-x)f(x)=-x^2$ et donc, pour $x\neq 0$, $f(-x)=\frac{-x^2}{f(x)}$. Cette constatation pourra être utile pour déduire l'étude de f en -1 de l'étude en 1.
Etude en $+\infty$ et $-\infty$.
Puisque $\frac{2x}{x^2-1}\underset{x\to\pm\infty}{\to}0$, on a $f(x)\underset{x\to\pm\infty}{\sim}x$ ce qui montre déjà que $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ et que $\mathcal{C}$admet en $+\infty$ et $-\infty$, une direction asymptotique d'équation $y=x$. Plus précisément,

$$\frac{2x}{x^2-1}\underset{x\to\pm\infty}{=}\frac{2}{x}(1-\frac{1}{x^2})^{-1}=\frac{2}{x}+o(\frac{1}{x^2}),$$

puis,

$$e^{\frac{2x}{x^2-1}}\underset{x\to\pm\infty}{=}1+(\frac{2}{x})+(\frac{2}{x})^2+o(\frac{1}{x^2})=1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}+o(\frac{1}{x^2}).$$

On en déduit que

$$f(x)\underset{x\to\pm\infty}{=}x+2+\frac{2}{x}+o(\frac{1}{x}).$$

Par suite, $\mathcal{C}$admet la droite d'équation $y=x+2$ pour droite asymptote en $+\infty$ et $-\infty$. De plus, le signe de $f(x)-(x+2)$ étant localement le signe de $\frac{2}{x}$, $\mathcal{C}$est au-dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$ et au-dessous au voisinage de $-\infty$.
Etude en 1 (et -1).
Clairement, $\lim_{x\to1,\,x>1}f(x)=+\infty$ et $\lim_{x\to-1,\,x>-1}f(x)=-\infty$. Ensuite, $\lim_{x\to1,\,x<1}f(x)=0$ et $\lim_{x\to-1,\,x<-1}f(x)=0$.
On prolonge f par continuité à gauche en 1 en posant $f(1)=0$, et de même en -1 et on étudie la dérivabilité du prolongement encore noté f.
f est continue sur $]-1,1]$, de classe C^1 sur $]-1,1[$ et pour $x\in]-1,1[$ (voir dérivée-variations),

$$f'(x)=\frac{x^4-2x^3-2x^2-2x+1}{(x^2-1)^2}e^{\frac{2x}{x^2-1}}\underset{x\to1,\,x<1}{\to}0.$$

D'après un théorème classique d'analyse, f est de classe C^1 sur $]-1,1]$ et en particulier dérivable à gauche en 1 et $f'_g(1)=0$.
De même, f est dérivable à gauche en -1 et $f'_g(-1)=0$. $\mathcal{C}$admet en ces points des demi-tangentes parallèles à l'axe (Ox).
Dérivée. Variations.
f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ en vertu de théorèmes généraux et pour $x\neq 0$,

$$\begin{aligned}\frac{f'(x)}{f(x)}&=(\ln|f|)'(x)=(\ln|x|+\frac{2x}{x^2-1})'(x)=\frac{1}{x}+2\frac{(x^2-1)-x(2x)}{(x^2-1)^2}\\&=\frac{(x^2-1)^2-2x(x^2+1)}{x(x^2-1)^2}=\frac{x^4-2x^3-2x^2-2x+1}{x(x^2-1)^2},\end{aligned}$$

et donc

$$\forall x \neq 0,\ f4'(x) = \frac{x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x + 1}{(x^2-1)^2} e^{\frac{2x}{x^2-1}},$$

ce qui reste vrai pour $x = 0$ par continuité de f' en 0.
f' est donc du signe de $P(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x + 1$. Or, pour $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} P(x) = x^2((x^2 + \frac{1}{x^2}) - 2(x + \frac{1}{x}) - 2) = x^2((x + \frac{1}{x})^2 - 2(x + \frac{1}{x}) - 4) = \\ = x^2(x + \frac{1}{x} - (1 - \sqrt{5})(x + \frac{1}{x} - (1 + \sqrt{5})) = (x^2 - (1 - \sqrt{5})x + 1)(x^2 - (1 + \sqrt{5})x + 1), \end{aligned}$$

ce qui reste vrai pour $x = 0$.
Le premier trinôme a un discriminant égal à $(\sqrt{5}-1)^2-4 = 2-2\sqrt{5} < 0$ et donc $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2-(1-\sqrt{5})x+1 > 0$.
Le deuxième trinôme a un discriminant égal à $(\sqrt{5}+1)^2 - 4 = 2 + 2\sqrt{5} > 0$ et admet donc deux racines réelles $\alpha = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5} + \sqrt{2 + \sqrt{5}}) \approx 2.89 > 1$ et $\beta = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5} - \sqrt{2 + 2\sqrt{5}}) = \frac{1}{\alpha} \approx 0.34 \in]0, 1[$.

x	$-\infty$		-1		0		$\beta \approx 0.34$		1		$\alpha \approx 2.89$		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	0 ‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	≈ -0.15	$\searrow$	0 ‖ $+\infty$	$\searrow$	≈ 6.34	$\nearrow$	$+\infty$
f'		$+$	‖	$+$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

Table 1. Tableau de variation de la fonction f.

On en déduit le tableau 1 de variation de f.
Voir le graphe de la fonction f sur la figure 1 page suivante.

Correction de l'exercice 5.

(1) Le calcul du produit scalaire de deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ donné par

$$< u, v >= \sum_{i=1}^{n} u_i v_i,$$

fait intervenir n multiplications et est donc de complexité $\mathcal{O}(n)$.

(2) On a vu en cours que la résolution d'un système linéaire $Ax = b$ où A est une matrice carrée de taille n est de complexité $\mathcal{O}(n^3)$.

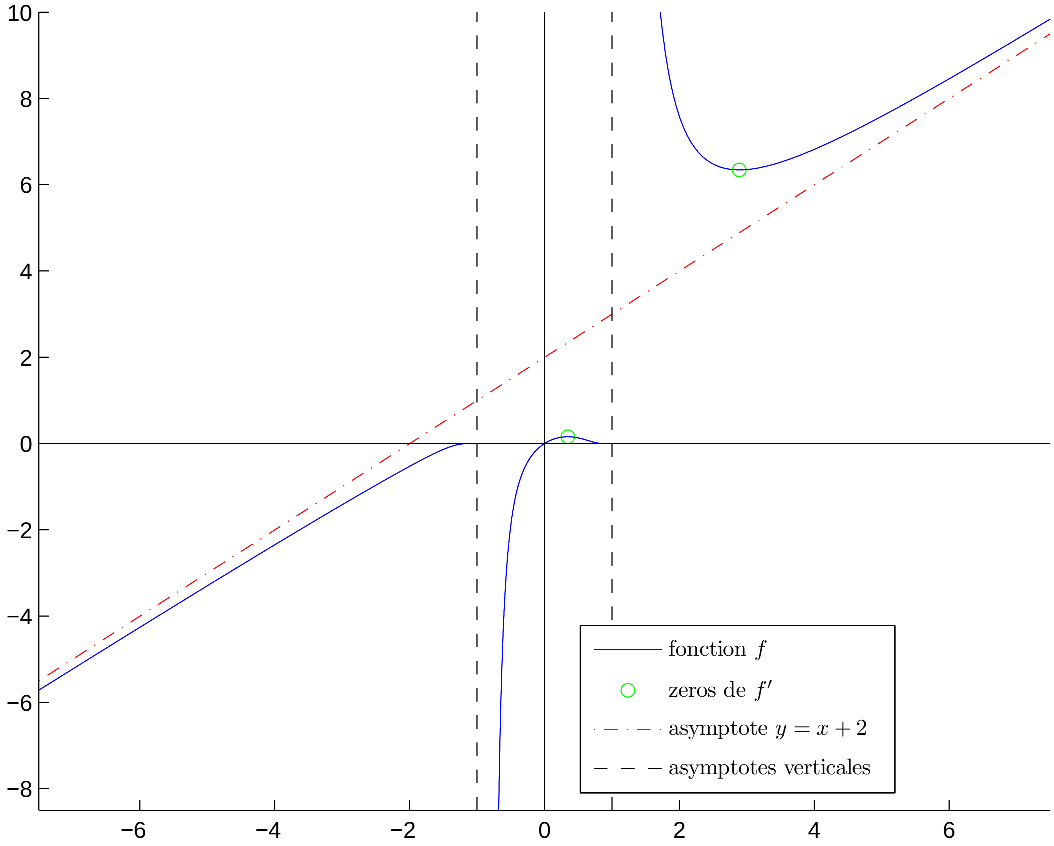

FIGURE 1. Le graphe de la fonction f.