Informatique 3A MFI — Automne 2024

**Contrôle continu (rattrapage) du 07 février 2025**

Durée : 1,5 heure(s)

**Documents autorisés** : OUI ☒ NON ☐
Autorisés *: Polycopiés de l'UE, notes manuscrites.*
Interdits *: Écrans (sauf tablette et ordinateurs en mode avion), Livres et Internet*

**Calculatrice autorisée** : OUI ☒ NON ☐
*Tout type*

**Exercice 1.**
En raisonnant comme dans le point 5a)i) p.65 du cours, déterminer la somme

$$S_n^{(4)} = \sum_{k=1}^{n} k^4.$$

**Exercice 2.**
Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

On pourra montrer que

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{n}.$$

**Exercice 3.**
On considère un entier $\beta \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ et un entier naturel $d$ dont les chiffres en base $\beta$ sont (dans l'ordre inverse de l'ordre habituel de celui d'écriture) $a_0$, $a_1$, ...., $a_n$ écrit sous la forme

$$d = \overline{a_n a_{n-1} .... a_0} \tag{1}$$

et vérifiant donc

$$d = \sum_{i=0}^{n} a_i \beta^i. \tag{2}$$

Par convention, si $d \neq 0$, on a

$$a_n \geq 1. \tag{3}$$

(1) Déterminer un algorithme très simple et "naïf" qui permette de calculer $d$ en fonction de $(a_n, a_{n-1}, ...., a_0)$ et de $\beta$.

(2) On cherche dans cette question à améliorer cet algorithme de façon à éviter les calculs inutiles de puissance de $\beta$.

 (a) Développer et simplifier l'expression suivante

$$((a_3\beta + a_2)\beta + a_1)\beta + a_0.$$

 (b) En déduire, en généralisant ce calcul, un algorithme de détermination de $d$ en fonction de $(a_n, a_{n-1}, ...., a_0)$ et de $\beta$.

(3) Quelles sont les complexités des algorithmes des questions 1 et 2b ?

(4) En utilisant l'algorithme de la question 2b, déterminer l'écriture décimale du nombre écrit en base 2 sous la forme

$$d = 11001. \tag{4}$$

(5) Est-ce que l'algorithme de la question 2b peut être utilisé ou modifié par des hommes qui ne savent compter que jusqu'à 10 et ne savent pas faire de multiplications ? Plus précisément, pour dénombrer un tas de cailloux, on dispose d'un premier tas de caillou, sans limite, ainsi que $n+1$ tas de cailloux chacun des tas étant de cardinal $a_i$ et donc représentant l'écriture de $d$ sous la forme (1). On montrera de façon constructive que l'on peut à partir de ces $n+1$ tas de cailloux extraire du premier tas de cailloux une quantité $d$ de cailloux, définie par (2).

**Exercice 4.**

Le texte suivant est issu d'une référence qui sera fournie dans le corrigé.

"Au cours du XIXᵉ siècle, un colonnel européen en poste en Éthiopie fit le compte-rendu d'une rencontre avec un tribu locale à laquelle il achetait du bétail. Il voulait sept bêtes à un prix unitaire de 22 birs. Le berger ne savait pas compter et fil appel au prêtre local pour vérifier le prix total.

Le prêtre creusa deux rangées parallèles de trous. La rangée de droite représentait le prix d'achat. Dans le premier trou, il plaça 22 pierres, puis divisa le nombre de pierres dans le trou suivant, en arrondissant : 22, 11, 5, 2 et 1 pierres. La rangée de gauche représentait le bétail et dans le premier trou il plaça 7 petites pierres. Puis il doubla le nombre de pierres dans chaque trou suivant de la rangée : 7, 14, 28, 56 et 112.

Après avoir déclaré que les valeurs paires étaient malfaisantes, il descendit le long de la rangées de droite et, à chaque fois qu'il rencontra un nombre pair de pierres - les trous 22 et 2 en l'occurence -, il retira les pierres du trou et du trou voisin dans la rangé de gauche. Pour terminer, il réunit les pierres restant dans la rangée de gauche - 14, 28 et 112 respectivement - en piles et les compta une à une. Il obtint un total de 154 birs, ce qui est effectivement $22 \times 7$.

Cette technique de multiplication fonctionne toujours pour les nombres entiers. Mais pourquoi ?"

(1) Répondre à la question posée.

(2) Déterminer la complexité de cette méthode.

## Corrigé

Un corrigé sera disponible sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`