Informatique 3A MFI — Automne 2024

Corrigé du contrôle continu (rattrapage) du 07 février 2025

Correction de l'exercice 1.

(1) On choisit P sous la forme

$$P(n) = an^5 + bn^4 + cn^3 + dn^2 + en$$

L'équation $P(i+1) - P(i) = i^4$ fournit les 5 équations suivantes

$$\begin{aligned}
&e + a + b + c + d = 0,\\
&2\,d + 5\,a + 4\,b + 3\,c = 0,\\
&3\,c + 10\,a + 6\,b = 0,\\
&4\,b + 10\,a = 0,\\
&5\,a - 1 = 0,
\end{aligned}$$

que l'on résoud ; on trouve

$$\begin{aligned}
&a = 1/5,\\
&b = -1/2,\\
&c = 1/3,\\
&d = 0,\\
&e = -1/30.
\end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$P(n) = 1/5\,n^5 - 1/2\,n^4 + 1/3\,n^3 - 1/30\,n,$$

et en factorisant

$$P(n) = 1/30\,n\,(2\,n-1)\,(n-1)\left(3\,n^2 - 3\,n - 1\right).$$

(2) En sommant toutes les équations, on a donc

$$0^4 + 1^4 + 2^4 + \ldots + n^4 = P(n+1) - P(0),$$

et donc

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = P(n+1) - P(0),$$

soit encore

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = 1/30\,n\,(2\,n+1)\,(n+1)\left(3\,n^2 + 3\,n - 1\right).$$

(3) Sous matlab, on peut aussi taper :

```
syms k n;
factor(symsum(k^4,1,n))
```

ce qui redonne le même résultat :

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = 1/30\, n\,(2\,n+1)\,(n+1)\left(3\,n^2+3\,n-1\right).$$

Correction de l'exercice 2.
Exercice 1936 issu de `http://exo7.emath.fr/`, par Gineste et Lévi Operman 01/11/2001
Montrons que $\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\sim\frac{1}{n}$. En utilisant le développement limité de $\ln(1+x)$ en 0, on a : $\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\frac{1}{\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. De là on tire que $\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\sim\frac{1}{\sqrt{n}}\times\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{1}{n}$. Par équivalence, la série de terme général $n^{-\left(1+\frac{1}{n}\right)}$ est donc divergente.

Correction de l'exercice 3.

(1) Si on utillise directement l'expression donnée par l'équation (2) de l'énoncé, on calcule les différentes puissances β^i puis on multiplie chacune d'elles par a_i et l'on fait la somme de tout cela.

(2) (a) On a, après développement (on calcule en fait à l'envers)

$$((a_3\beta+a_2)\beta+a_1)\beta+a_0=a_3\beta^3+a_2\beta^2+a_1\beta+a_0 \tag{1}$$

ce qui est exactement l'expression de l'équation (2) de l'énoncé avec $n=3$.

(b) Il suffit de donc de partir de a_3, puis le multipier par β et y ajouter a_2. On recommence avec le résultat obtenu : on le multiplie par β et on y ajoute a_1 et encore une dernière fois : on multiplie le résultat obtnenu par β et on y ajoute a_0. De façon plus générale, on remarque que si d est donné par l'équation (2) de l'énoncé , alors

$$d=((((a_n\beta+a_{n-1})\beta+a_{n-2})\beta+.....+a_2)\beta+a_1)+a_0. \tag{2}$$

Algorithme 1 Algorithme de changement de base (de la base β vers la base 10) *base2dec*$(a,\beta\longrightarrow d)$

Entrée :
$a=(a_0,...,a_n)$: $n+1$ entiers appartenant $\{0,...,\beta-1\}$ avec $a_n\geq 1$ si $d\neq 0$
β : entier naturel supérieur ou égal à 2 ;
Sortie :
d : entier naturel vérifiant

$$d=\sum_{i=0}^{n} a_i\beta^i. \tag{3}$$

si a est vide **alors**
  $d\longleftarrow 0$
sinon
  $s\longleftarrow a_n$
  pour $i=n-1$ à 0 **faire**
    $s\longleftarrow s\beta+a_i$
  fin pour
  $d\longleftarrow s$
fin si

On renvoie à l'algorithme 1 qui traduit (2).

Remarque 1. En fait, l'expression (2) de l'énoncé correspond à l'expression du polynôme $a_n X^n + ... + a_0$ évalué en β. L'algorithme que l'on a utilisé est en fait l'algorithme de Horner. Voir par exemple `https://fr.wikipedia.org/wiki/Méthode_de_Ruffini-Horner`, ou l'algorithme 1.1 de la page 94 du cours (extrait lui même de [BM03]). On pourra aussi consulter la fonction de matlab `base2dec.m` ou celle programmée disponible à l'adrese web habituelle `base2decbis.m`. Notons que la fonction utilise la fonction optimisée `cumprod` de matlab. On pourrait aussi utiliser la fonction `polyval` de matlab, elle fondée sur l'algorithme de Horner.

(3) (a) La complexités de l'algorithme de la question 1 est en $\mathcal{O}\left(1+2+...+n\right) = \mathcal{O}(n^2)$.

(b) La complexités de l'algorithme de la question 2b est en $\mathcal{O}(n)$.

(4) On utilisant l'algorithme de la question 2b et on écrit l'équation (2) de l'énoncé avec $\beta = 2$. On a successivement

$$\begin{aligned} d &= (((1 \times 2 + 1) \times 2 + 0) \times 2 + 0) \times 2 + 1, \\ &= ((3 \times 2 + 0) \times 2 + 0) \times 2 + 1, \\ &= ((6 \times 2 + 0) \times 2 + 1, \\ &= 12 \times 2 + 1, \\ &= 25. \end{aligned}$$

et donc

$$d = 25. \tag{4}$$

(5) Proposons deux méthodes, chacune fondée sur l'un des deux algorithmes de la question 1 ou de la question 2b.

(a) Notons que si on dispose d'un tas de P cailloux pour $P \in \mathbb{N}$, on peut le multiplier par un entier $N \in \{0, ..., 10\}$ en dupliquant celui-ci $N - 1$ fois, en puisant les cailloux ailleurs.

(b) Pour celui de la question 1, on détermine, pour chaque $i \in \{0, ..., n\}$, un tas de 10^i puis un tas de $a_i 10^i$ en utilisant l'algorithme du point 5a. On réunit tous ces tas et on dispose donc de d cailloux.

(c) De façon beaucoup plus efficace, on utilise l'algorithme 1. Grâce à l'algorithme du point 5a, on crée un premier tas de cailloux contenant $a_n \times 10$, auquel on additionne a_{n-1} cailloux. On obtient donc $a_n \times 10 + a_{n-1}$. On recommence pour obtenir $(a_n \times 10 + a_{n-1}) \times 10 + a_{n-2}$ et ainsi de suite jusqu'à aboutir à (2) avec $\beta = 10$.

Correction de l'exercice 4.

Le petit texte proposé dans l'énoncé est issu de [ML24].

Rappelons ici l'extrait de la solution :

"Malgré les manisfestations spirituelles, cette méthode est une mise en œuvre physique sophistiquée de multiplication binaire. La rangée de droite, où le nombre de la valeur est divisé par deux de façon répétée (en arrondissant) et les nombres paires écartés, devient l'équivalent binaire du nombre en base dix. Donc, ici, 22 est réprésenté par 10110. Puis la rangée de gauche devient un moyen de multiplier les puissances de 2 en séquence pour le nombre du volume désigné. En partant de la valeur unitaire, 7, puis en la doublant, chaque colonne devient 7 fois ce chiffre binaire. 14 est 7×2, 28 est 7×4, et ainsi de suite. 22 étant 10110, 7×22 est $(0 \times 1) + (7 \times 2) + (7 \times 4) + (0 \times 8) + (7 \times 16)$, et en additionnant ces pierres, on obtient la réponse finale. La méthode est aussi efficace en sens inverse, évidément : 7, divisé et arrondi donne 3, qui donne 1. Pas de pairs, "malfaisants" seulement trois trous pour 22, 44, et 88 qui, additionnés donnent 154."

(1) (a) Reprenons l'exemple traité. Les divisions successives par 2, puis arrondis, correspondent à l'algorithme de décomposition en base $\beta = 2$ vu dans l'exercice de TD **??**. Les quotients successifs des

divions euclidiennes correspondent bien aux quotient arrondis successifs. On a donc successivement :

$$\begin{aligned} 22 &= 0 + 2 \times 11, \text{ et donc } n = 0 \text{ et } a_0 = 0\,; \\ 11 &= 1 + 2 \times 5, \text{ et donc } n = 1 \text{ et } a_1 = 1\,; \\ 5 &= 1 + 2 \times 2, \text{ et donc } n = 2 \text{ et } a_2 = 1\,; \\ 2 &= 0 + 2 \times 1, \text{ et donc } n = 3 \text{ et } a_3 = 0\,; \\ 1 &= 1 + 2 \times 0, \text{ et donc } n = 3 \text{ et } a_3 = 1. \end{aligned}$$

et donc, en base 2, $22 = 10110$, soit encore

$$22 = 2 + 4 + 16. \tag{5}$$

On a aussi en ne gardant parmi les nombres doublés successivement 7, 14, 28, 56 et 112 que les termes correspondant aux nombres impairs ci-dessus (de rang 2, 3 et 5) : 14, 28 et 112 et en réutilisant (5)

$$7 \times 22 = 7 \times (2 + 4 + 16) = 7 \times 2 + 7 \times 4 + 7 \times 16 = 14 + 28 + 112 = 154.$$

(b) De façon plus générale, on réécrit cela en remplaçant 22 par $P \in \mathbb{N}^*$ et 7 par $Q \in \mathbb{N}^*$. L'algorithme de décomposition en base $\beta = 2$ vu dans l'exercice de TD **??** permet donc d'écrire ($a_i \in \{0, 1\}$ et $a_n = 1$)

$$P = \sum_{i=0}^{n} a_i 2^i,$$

et

$$n = E\left(\frac{\ln(P)}{\ln(2)}\right), \tag{6}$$

soit encore, en notant $\mathcal{S}$ l'ensemble des entiers de $\{0, ..., n\}$ correspondant aux quotients arrondis impairs (c'est-à-dire aux restes égaux à 1)

$$P = \sum_{\substack{i=0,\\ i \in \mathcal{S}}} 2^i. \tag{7}$$

On écrit alors d'après (7)

$$PQ = \sum_{\substack{i=0,\\ i \in S}} 2^i Q, \tag{8}$$

somme où l'on voit apparaître Q doublés successivement, en ne conservant que les rangs de $\mathcal{S}$.

(2) L'algorithme de décomposition de P en base 2, d'après (6) et l'exercice de TD **??**, est en $\mathcal{O}\left(\frac{\ln(P)}{\ln(2)}\right)$. Le doublement successif de Q est aussi en $\mathcal{O}\left(\frac{\ln(P)}{\ln(2)}\right)$ et cet algorithme est en $\mathcal{O}\left(\frac{\ln(P)}{\ln(2)}\right)$. Mais il n'est pas magique car les doublements successifs de Q n'évitent pas les multiplications.

Références

[BM03] J. Bastien et J.-N. Martin. *Introduction à l'analyse numérique. Applications sous Matlab.* Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 519.4 BAS, 4e étage). Voir `https://www.dunod.com/sciences-techniques/introduction-analyse-numerique-applications-sous-matlab`. Paris : Dunod, 2003. 392 pages.

[ML24] F. Mazza et S. Lhullier. *Les Énigmes de Toutânkhamon.* Hachette Livre (Marabout). Vanves, France, sept. 2024.