

**Examen du 5 octobre 2018**

Durée : 1,5 heure(s)

**Documents autorisés :** OUI  NON *Polycopiés de l'UE, notes manuscrites. Livres interdits***Calculatrice autorisée :** OUI  NON *Tout type***Exercice 1.**Former le développement limité en zéro de la fonction  $f(x) = \tan(\sin(x))$  à l'ordre 4.**Exercice 2.**On admet que la dérivée de  $x \mapsto \arctan x$  est définie par  $x \mapsto 1/(1+x^2)$ . Calculer par intégration par partie

$$I = \int_0^1 2x \arctan x dx.$$

**Exercice 3.**

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$4y'(x) + 2y(x) = x^2 + 3x,$$
$$y(0) = 1.$$

**Exercice 4.**Résoudre le système matriciel  $AX = b$  dans chacun des 3 cas suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & -10 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \\ -29 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & -10 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

On précisera dans chaque cas s'il y a une, aucune ou un nombre infini de solution.

**Exercice 5.**

On considère la fonction  $f$  définie de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases} \quad (1)$$

(1) Quel est le domaine de définition de  $f$  ?

(2) (a) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leq x^2. \quad (2)$$

(b) Montrer que (2) implique la continuité de  $f$  en zéro.

(3) (a) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \left| \frac{f(x) - f(0)}{x} \right| \leq |x|. \quad (3)$$

(b) Montrer que (3) implique la dérivabilité de  $f$  en zéro avec  $f'(0) = 0$ .

(4) (a) Déterminer la dérivée de  $f$  sur  $\mathbb{R}^*$ .

(b) Est-ce que la dérivée de  $f$  est continue en zéro ?

**Corrigé**

Un corrigé sera disponible sur <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html>