Informatique 3A MFI | Automne 2022

Examen du 02 Février 2023

Durée : 1,5 heure(s)

Documents autorisés : OUI ☒ NON ☐

Polycopiés de l'UE, notes manuscrites. Écrans, Livres et Internet interdits

Calculatrice autorisée : OUI ☒ NON ☐

Tout type

Exercice 1.

Étudier (en montrant que ces deux suites sont adjacentes) les deux suites u_n et v_n respectivement définies par

$$u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n+1}, \quad v_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n}.$$

Exercice 2.

(1) Montrer que l'on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{x}{1+x^2+x^4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2-x+1} - \frac{1}{x^2+x+1}\right).$$

(2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer S_n définie par

$$S_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{p}{1+p^2+p^4}.$$

(3) En déduire la valeur de la somme S définie par

$$S = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{p}{1+p^2+p^4}.$$

(4) Pourriez-vous démontrer au préalable la convergence de la série de terme général $u_p = \dfrac{p}{1+p^2+p^4}$ sans expliciter la somme partielle ?

Exercice 3.

On étudie la désintégration d'un isotope radioactif de constante radioactive λ, c'est-à-dire que le nombre $N(t)$ d'atomes de cet isotope vérifie

$$N'(t) = -\lambda N(t). \tag{1}$$

(1) Résoudre l'équation différentielle (1) avec $N(t = 0) = N_0$. Calculer la demi-vie $t_{1/2}$ de l'isotope sachant que c'est le temps au bout duquel la moitié des atomes se sont désintégrés.

(2) Dans la haute atmosphère, du carbone radioactif est produit à partir des collisions entre des noyaux d'azote et des neutrons produits par les rayons cosmiques. Le dioxyde de carbone de l'atmosphère contient en proportion quasiment constante du carbone 14 et du carbone 12. La proportion de ces 2 isotopes est la même dans les végétaux et dans l'atmosphère. Lorsque la plante meurt, elle cesse d'assimiler le dioxyde de carbone et le carbone 14 qu'elle contient, de demi-vie 5570 ans se désintègre sans être renouvelé. Dans une tombe égyptienne, on a trouvé un échantillon de bois provenant d'un sarcophage qui produisait 560 désintégrations par seconde alors qu'un échantillon du même bois fraîchement coupé contenant la même masse de carbone produit 816 désintégrations par seconde. Déterminer la date de fabrication du sarcophage.

Exercice 4.
Soit $(a, b) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$. Montrer que l'application f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f(x) = \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{1/x},$$

est strictement croissante. On pourra noter $t = b/a \in \mathbb{R}_+^*$.

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`