Informatique 3A MFI — Automne 2023

Examen du 30 novembre 2023

Durée : 1,5 heure(s)

Documents autorisés : OUI ☒ NON ☐
Polycopiés de l'UE, notes manuscrites. Écrans, Livres et Internet interdits

Calculatrice autorisée : OUI ☒ NON ☐
Tout type

Exercice 1.
Soit un réel α donné. On cherche une suite réelle $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_{n+1} - y_n = n, \tag{1a}$$

$$y_0 = \alpha. \tag{1b}$$

Déterminer $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On pourra d'abord déterminer une solution particulière v_n de (1), par sommation de toute les équations (1a) pour n variant de 0 à $N-1$, puis chercher la solution y_n de (1) en montrant que $w_n = y_n - v_n$ vérifie $w_{n+1} = w_n$ et $w_0 = 0$.

Exercice 2.
Les deux questions sont indépendantes.

(1) Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{n!}{n^n}.$$

On pourra en majorer son terme général par le terme général d'une série convergente.

(2) Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = (\cosh\sqrt{\ln n})^{-2}.$$

On rappelle que $\cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2$.

Exercice 3.
Montrer le résultat suivant :
Soit une fonction F, de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, dérivable en 1. Les deux assertions suivantes sont équivalentes

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*, \quad F(ab) = F(a) + F(b), \tag{2a}$$

$$\exists K \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad F(t) = K\int_1^t \frac{du}{u}. \tag{2b}$$

Exercice 4.
Construire le graphe de la fonction suivante, donnée sur $\mathbb{R}_+$:

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

Exercice 5.

(1) Exhiber deux algorithmes de complexité respectives en $\mathcal{O}(n)$ et $\mathcal{O}(n^2)$.

(2) Pour chacun d'eux, on montrera que la complexité est bien celle demandée.

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`