Informatique 3A MFI — Automne 2022

Examen complémentaire du 21 Février 2023

Durée : 1,5 heure(s)

Documents autorisés : OUI ☒ NON ☐
Polycopiés de l'UE, notes manuscrites. Écrans, Livres et Internet interdits

Calculatrice autorisée : OUI ☒ NON ☐
Tout type

Exercice 1.
Étudier (en montrant que ces deux suites sont adjacentes) les deux suites u_n et v_n respectivement définies par

$$u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n+1}, \quad v_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n}.$$

Exercice 2.
Soient $a > 0$ et $b > 0$ et (u_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{a^n 2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n}} + b^n}.$$

(1) Déterminer, selon les valeurs de b, les limites de la suite $v_n = 2^{\sqrt{n}}/b^n$.

(2) En déterminant un équivalent de u_n, en déduire la nature de la série de terme géneral u_n.

Exercice 3.
Nous donnons quelques lignes extraites de [BM03, pages 10 à 12].
"De manière générale les fonctions T_1 et T_2 ou leurs majorations s'écriront, quand elles sont exprimables, sous forme de fonctions de la variable n et de paramètres liés au matériel. Pour connaître le comportement d'un algorithme traitant des données de taille n, nous déterminerons le terme dominant en n de la fonction coût, ou éventuellement du majorant trouvé, noté $T(n)$; c'est un infiniment grand principal $e(n)$, choisi parmi une famille de fonctions classiques de comparaison ; nous dirons alors que l'algorithme étudié présente une complexité temporelle d'ordre $e(n)$ ou au pire d'ordre $e(n)$. À une constante multiplicative près, les $e(n)$ intervenant seront le plus souvent éléments de

$$\mathcal{E} = \{1,\ \ln(n),\ n^{\varepsilon},\ n,\ n\ln(n),\ n^c,\ c^n,\ n!\}$$

avec ε dans $]0,1[$ et c dans $\mathbb{R}_+^*$; la famille $\mathcal{E}$ sera affinée si besoin."

....
"

Définition 1. Etant donné f de $\mathcal{F}$, on appelle ensemble des fonctions asymptotiquement dominées par f la partie de $\mathcal{F}$ définie par :

$$\mathcal{O}(f) = \{g \in \mathcal{F} : \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \exists c \in \mathbb{R}_+, \quad \forall n \geq n_0, \quad g(n) \leq cf(n)\}. \tag{1}$$

"
....
"

Proposition 2. *Soit deux réels* ε *et* c *vérifiant* $0 < \varepsilon < 1 < c$
alors on a

$$\mathcal{O}(1) \subset \mathcal{O}(\ln(n)) \subset \mathcal{O}(n^\varepsilon) \subset \mathcal{O}(n) \subset \mathcal{O}(n\ln(n)) \subset \mathcal{O}(n^c) \subset \mathcal{O}(c^n) \subset \mathcal{O}(n!).$$

"
Commentez ces extraits en justifiant le résultat de la proposition 2.

Exercice 4.
Étudier et tracer le graphe des fonctions définies par

$$f(x) = \frac{x+e^x}{e^x},$$
$$f(x) = \frac{1}{e^x - 1}$$

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`

Références

[BM03] J. Bastien et J.-N. Martin. *Introduction à l'analyse numérique. Applications sous Matlab.* Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 519.4 BAS, 4e étage). Voir `https://www.dunod.com/sciences-techniques/introduction-analyse-numerique-applications-s` Paris : Dunod, 2003. 392 pages.