Informatique 3A MFIappro Automne 2021

Corrigé de l'examen complémentaire du 08 Juin 2022

Correction de l'exercice 1.

(1) On trouve en utilisant par exemple la fonction suivante
`http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MFI/fichiers_matlab/developpement_limite.m`,

$$f(x) = x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1 + o\left(x^8\right).$$

Ce calcul peut être aussi fait directement à la main en utilisant

$$\frac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + y^3 + y^4 + o(y)$$

et en ramplcaçant y par $-x^2$.

(2) On trouve

$$f(x) = 1/6\, x^3 - 1/2\, x^2 + x + o\left(x^3\right).$$

Correction de l'exercice 2.

f_3 est définie et continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Etude en $-\infty$. Soit $x \leq -1$.

$$f_3(x) = x + \sqrt{x^2-1} = \frac{(x+\sqrt{x^2-1})(x-\sqrt{x^2-1})}{x-\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}.$$

Or, quand x tend vers $-\infty$, $x - \sqrt{x^2-1}$ tend vers $-\infty$ et donc $\lim_{x\to-\infty} f_3(x) = 0$.

Étude en $+\infty$. Immédiatement, $\lim_{x\to+\infty} f_3(x) = +\infty$. Ensuite, pour $x \geq 1$,

$$\frac{f_3(x)}{x} = \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x} = 1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}},$$

qui tend vers 2 quand x tend vers $+\infty$. Mais alors,

$$f_3(x) - 2x = -x + \sqrt{x^2-1} = \frac{(-x+\sqrt{x^2-1})(-x-\sqrt{x^2-1})}{-x-\sqrt{x^2-1}} = -\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}.$$

On en déduit que $\lim_{x\to+\infty}(f_3(x) - 2x) = 0$ et donc que la droite (D) d'équation $y = 2x$ est asymptote à $\mathcal{C}_3$ en $+\infty$.

Étude en 1. Pour $x > 1$,

$$\frac{f_3(x) - f_3(1)}{x-1} = \frac{(x-1) + \sqrt{(x-1)(x+1)}}{x-1} = 1 + \sqrt{\frac{x+1}{x-1}},$$

et pour $x \in]-1, 1[$,

$$\frac{f_3(x) - f_3(1)}{x-1} = \frac{(x-1) + \sqrt{(-x+1)(x+1)}}{-(-x+1)} = 1 - \sqrt{\frac{x+1}{-x+1}}.$$

Par suite, $\lim_{x\to 1,\, x>1} \frac{f_3(x)-f_3(1)}{x-1} = +\infty$ et $\lim_{x\to 1,\, x<1} \frac{f_3(x)-f_3(1)}{x-1} = -\infty$. On en déduit que f_3 n'est pas dérivable en 1, mais que $\mathcal{C}_3$ admet deux demi-tangentes parallèles à (Oy) au point de $\mathcal{C}_3$ d'abscisse 1. Les résultats sont analogues en -1.
Étude des variations de $\mathbf{f_3}$. Pour $x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$, $f_3(x) = x+\sqrt{x^2-1}$ et donc

$$f_3'(x) = 1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Si $x>1$, on a $x+\sqrt{x^2-1}>0$ et donc, $f_3'(x)>0$. Si $x<-1$, on a

$$\sqrt{x^2-1} < \sqrt{x^2} = |x| = -x,$$

et donc, $x+\sqrt{x^2-1}<0$ puis $f_3'(x)<0$. Ainsi, f_3 est strictement décroissante sur $]-\infty,-1[$ et strictement croissante sur $]1,+\infty[$. Pour $x\in]-1,1[$, $f_3(x) = x+\sqrt{-x^2+1}$ et donc

$$f_3'(x) = 1-\frac{x}{\sqrt{-x^2+1}} = \frac{\sqrt{-x^2+1}-x}{\sqrt{-x^2+1}}.$$

Si $x\in]-1,0]$, on a clairement $f_3'(x)>0$. Si x$\in[0,1[$, par stricte croissance de la fonction $x\mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}^+$, on a

$$\operatorname{sgn}(f_3'(x)) = \operatorname{sgn}(\sqrt{-x^2+1}-x) = \operatorname{sgn}((-x^2+1)-x^2) = \operatorname{sgn}(1-2x^2) = \operatorname{sgn}((1-x\sqrt{2})(1+x\sqrt{2})) = \operatorname{sgn}[\frac{1}{\sqrt{2}}-x).$$

Donc, f_3' est strictement positive sur $\left[0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right[$, strictement négative sur $\left]\frac{1}{\sqrt{2}},1\right[$ et s'annule en $\frac{1}{\sqrt{2}}$. En résumé, f_3' est strictement négative sur $]-\infty,-1[$ et sur $\left]\frac{1}{\sqrt{2}},1\right[$ et strictement positive sur $\left]-1,\frac{1}{\sqrt{2}}\right[$ et sur $]1,+\infty[$. f_3 est donc strictement décroissante sur $]-\infty,-1]$ et sur $\left[\frac{1}{\sqrt{2}},1\right[$ et strictement croissante sur $\left[-1,\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ et sur $[1,+\infty[$. On en déduit $\mathcal{C}_3$.
Voir la figure 1.

Correction de l'exercice 3.
On pourra consulter :
`https://fr.wikipedia.org/wiki/Décroissance_exponentielle`
`https://fr.wikipedia.org/wiki/Période_radioactive`
`https://fr.wikipedia.org/wiki/Carbone_14`

(1) La résolution classique fournit :

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}. \tag{1}$$

La demi-vie, notée $t_{1/2}$, correspond à

$$N\left(t_{1/2}\right) = \frac{N_0}{2},$$

ce qui donne

$$N_0 e^{-\lambda t_{1/2}} = \frac{N_0}{2},$$

et donc

$$e^{-\lambda t_{1/2}} = \frac{1}{2},$$

soit

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}. \tag{2}$$

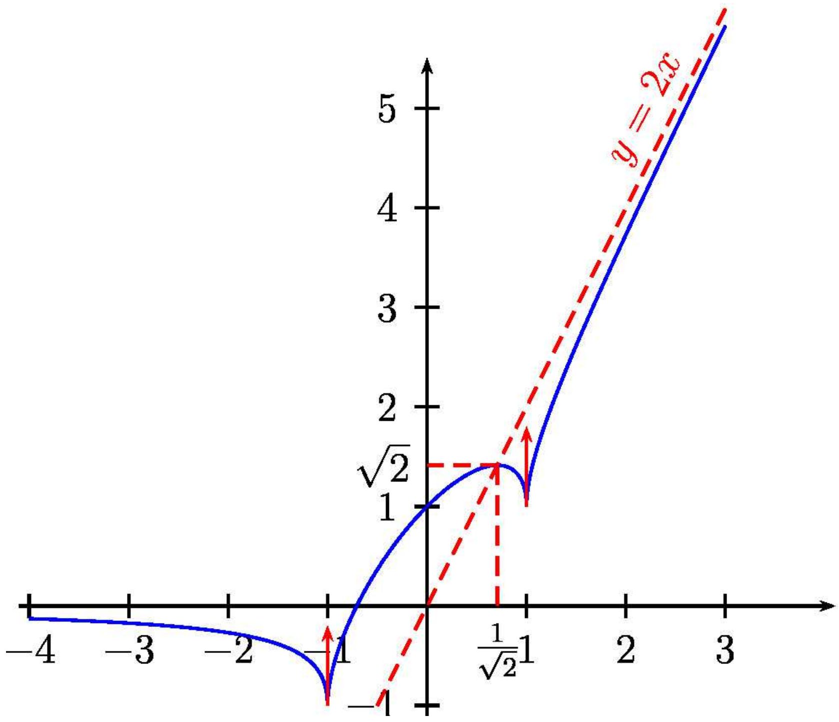

FIGURE 1. Le graphe $\mathcal{C}_3$.

(2) Le nombre $n(t)$ de désintégrations par seconde (ici Δt vaut une seconde) , mesurable expérimentalement, vérifie, à l'instant t :

$$n(t) = \frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta} \approx N'(t),$$

et donc

$$n(t) = -\lambda N(t).$$

soit encore

$$n(t) = -\lambda N_0 e^{-\lambda t}. \tag{3}$$

On a de même

$$n(0) = -\lambda N_0. \tag{4}$$

En divisant (4) par (3), on a donc

$$\frac{n(0)}{n(t)} = e^{\lambda t}, \tag{5}$$

qui est égal au nombre

$$\gamma = \frac{816}{560}, \tag{6}$$

connu. De (6), (5) et (2), on déduit

$$e^{\dfrac{\ln 2}{t_{1/2}} t} = \gamma,$$

et donc

$$t = \frac{\ln(\gamma)}{\ln 2} t_{1/2}.$$

Numériquement, $t \approx 3\,025$ ans.

Correction de l'exercice 4.

(1) Un équivalent de $u_n \geq 0$ est
$$v_n = 1/n^2,$$
donc la série converge.

(2) On a
$$u_n = \ln\left(\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}\right)$$
donc
$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{N} u_n &= \sum_{n=2}^{N} \ln\left(\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}\right), \\
&= \ln \prod_{n=2}^{N} \frac{(n+1)(n-1)}{n^2}, \\
&= \ln \prod_{n=2}^{N} \left(\frac{(N+1)(N-1)}{N^2}\frac{N(N-2)}{(N-1)^2}\frac{(N-1)(N-3)}{(N-2)^2} \dots \frac{5\times 3}{4^2}\frac{4\times 2}{3^2}\frac{3\times 1}{2^2}\right), \\
&= \ln \prod_{n=2}^{N} \left(\frac{(N+1)(\cancel{N-1)}}{N^{\cancel{2}}}\frac{\cancel{N}(\cancel{N-2)}}{(\cancel{N-1})^2}\frac{(\cancel{N-1)}(\cancel{N-3)}}{(\cancel{N-2})^2} \dots \frac{\cancel{5}\times \cancel{3}}{\cancel{4}^2}\frac{\cancel{4}\times \cancel{2}}{\cancel{3}^2}\frac{\cancel{3}\times 1}{2^{\cancel{2}}}\right), \\
&= \ln\left(\frac{N+1}{2N}\right)
\end{aligned}$$
dont la limite vaut $-\ln 2$; la somme vaut donc $-\ln 2$.