Informatique 3A MFI Automne 2022

Corrigé de l'examen complémentaire du 21 Février 2023

Correction de l'exercice 1.

[Mon90, exercice 3.6.1 h)]

(1) On a

$$u_{n+1} = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+2},$$

et donc

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+2} + 2\sqrt{n+1}, \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left(1 - 2\sqrt{(n+1)(n+2)} + 2(n+1)\right), \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left(2n + 3 - 2\sqrt{(n+1)(n+2)}\right) \end{aligned}$$

On a deux façons possibles (presques équivalentes) de conclure.

(a) Soit, on écrit que $u_{n+1} - u_n > 0$ est équivalent à

$$2n + 3 - 2\sqrt{(n+1)(n+2)} > 0,$$

ce qui est successivement équivalent à (puisque tout est positif)

$$\begin{aligned} 2n + 3 > 2\sqrt{(n+1)(n+2)} &\iff (2n+3)^2 > \left(2\sqrt{(n+1)(n+2)}\right)^2, \\ &\iff 4n^2 + 12n + 9 > 4(n+1)(n+2), \\ &\iff 4n^2 + 12n + 9 > 4n^2 + 12n + 8, \\ &\iff 1 > 0, \end{aligned}$$

ce qui est vrai.

(b) Soit, on utilise l'astuce classique

$$\forall A, B \in \mathbb{R}_+^*, \quad A - B = \frac{A^2 - B^2}{A + B}, \tag{1}$$

obtenu en écrivant

$$A - B = \frac{(A-B)(A+B)}{A+B}.$$

Notons que si $A = \sqrt{a}$ et $B = \sqrt{b}$ où $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, on obtient l'astuce dite de la "pseudo quantité conjuguée" :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*, \quad \sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}. \tag{2}$$

On a alors

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left(2n + 3 - 2\sqrt{(n+1)(n+2)}\right),$$

et en utilisant (1) avec $A = 2n+3$ et $B = 2\sqrt{(n+1)(n+2)}$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{n+1}\left(2n+3+2\sqrt{(n+1)(n+2)}\right)}\left((2n+3)^2 - 4(n+1)(n+2)\right),\\
&= \frac{1}{\sqrt{n+1}\left(2n+1+2\sqrt{(n+1)(n+2)}\right)}\left(4n^2+12n+9-4n^2-12n-8\right),\\
&= \frac{1}{\sqrt{n+1}\left(2n+2+2\sqrt{(n+1)(n+2)}\right)} > 0,
\end{aligned}
$$

Ainsi, la suite u_n est croissante.

Remarque 1. Deux autres méthodes, tout à fait valables, ont été suggérées par deux d'entre vous.

(a) On peut écrire :

$$
\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+2} + 2\sqrt{n+1},\\
&= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\right),
\end{aligned}
$$

et en utilisant l'astuce (2)

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\frac{n+2-(n+1)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}},\\
&= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\frac{n+2-n-1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}},\\
&= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}},\\
&= \frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}-2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right)},\\
&= \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right)}
\end{aligned}
$$

cette dernière quantité est strictement positive, puisque c'est équivalent à

$$\sqrt{n+2} > \sqrt{n+1}$$

et donc à

$$n+2 > n+1,$$

ce qui est vrai.

(b) On peut aussi écrire (plus longuement !)

$$
\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+2} + 2\sqrt{n+1},\\
&= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{2}{n}} + 2\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}},
\end{aligned}
$$

et donc, en utilisant le dl[1] de $\sqrt{1+h} = 1 + h/2 - h^2/8 + o(h^2)$ en 0 :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n}\left(1 + \frac{1}{2}\times\frac{2}{n} - \frac{1}{8}\times\frac{4}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + \frac{2}{n}\left(1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),\\
&= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n}\left(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + \frac{2}{n}\left(1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),\\
&= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} + 2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{4n^{\frac{3}{2}}} + \sqrt{n}o\left(\frac{1}{n^2}\right),\\
&= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{3}{4n^{\frac{3}{2}}} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right),\\
&= \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1 + \frac{3}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right),
\end{aligned}$$

et en utilisant le dl $(1+h)^\alpha = 1 + \alpha h + o(h)$ avec $\alpha = -1/2$ en 0 :

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1 - \frac{1}{2n} - 1 + \frac{3}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right),\\
&= \frac{1}{\sqrt{n}}\left(-\frac{1}{2n} + \frac{3}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right),\\
&= \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right),
\end{aligned}$$

et donc

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}\left(\frac{1}{4} + o(1)\right). \tag{3}$$

Puisque

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{4} + o(1) = \frac{1}{4}$$

Pour n assez grand $\frac{1}{4} + o(1) > 0$ et, d'après (3), on a à partir d'un certain rang (ce qui suffit néanmoins)

$$u_{n+1} - u_n > 0.$$

(2) On a de même

$$v_{n+1} = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1},$$

et donc

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n},\\
&= \frac{1}{\sqrt{n+1}}\left(1 - 2(n+1) + 2\sqrt{n(n+1)}\right),\\
&= -\frac{1}{\sqrt{n+1}}\left(2n + 1 - 2\sqrt{n(n+1)}\right),
\end{aligned}$$

Comme précédement, on a deux possibilités :

1. Attention, il fallait plus loin que l'ordre 1 proposé par l'un d'entre vous

(a) Soit, on écrit

$$\begin{aligned} v_{n+1}-v_n<0 &\iff 2n+1-2\sqrt{n(n+1)}>0,\\ &\iff 2n+1>2\sqrt{n(n+1)},\\ &\iff (2n+1)^2>\left(2\sqrt{n(n+1)}\right)^2,\\ &\iff 4n^2+4n+1>4n^2+4n,\\ &\iff 1>0. \end{aligned}$$

(b) Soit, grâce à (2)

$$\begin{aligned} v_{n+1}-v_n &= -\frac{1}{\sqrt{n+1}\left(2n+1+2\sqrt{n(n+2)}\right)}\left((2n+1)^2-4n(n+1)\right),\\ &= -\frac{1}{\sqrt{n+1}\left(2n+1+2\sqrt{n(n+2)}\right)}\left(4n^2+4n+1-4n^2-4n\right),\\ &= -\frac{1}{\sqrt{n+1}\left(2n+1+2\sqrt{n(n+2)}\right)}<0. \end{aligned}$$

Ainsi, la suite v_n est décroissante.

Remarque 2. On peut procéder comme dans la remarque 1.

(a) Comme dans le cas 1a de cette remarque, on peut montrer que

$$v_{n+1}-v_n=\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}$$

et on conclut comme précédemment que cette quantité est négative.

(b) Comme dans le cas 1b de cette remarque, on peut montrer que

$$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{n\sqrt{n}}\left(-\frac{1}{4}+o\left(1\right)\right),$$

et on conclut comme précédemment que cette quantité est négative.

(3) Enfin, on a

$$\begin{aligned} u_n-v_n &= -2\sqrt{n+1}+2\sqrt{n},\\ &= 2\left(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right), \end{aligned}$$

On a encore deux possibilités.

(a) Soit on écrit,

$$\begin{aligned} u_n-v_n &= 2\sqrt{n}\left(1-\sqrt{\frac{n+1}{n}}\right),\\ &= 2\sqrt{n}\left(1-\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right), \end{aligned}$$

et on utilise le dl de $\sqrt{1+h} = 1 + h/2 + o(h)$ en 0 :

$$\begin{aligned}
&= 2\sqrt{n}\left(1 - 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right),\\
&= 2\sqrt{n}\left(-\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right),\\
&= -\frac{\sqrt{n}}{n} + o\left(\frac{\sqrt{n}}{n}\right),\\
&= -\frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),
\end{aligned}$$

qui tend vers 0.

(b) Soit, plus rapidement cette fois, on utilise de nouveau l'équation (1)

$$\begin{aligned}
u_n - v_n &= 2\left(\sqrt{n} - \sqrt{n+1}\right),\\
&= 2\frac{n-(n+1)}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}},\\
&= 2\frac{n-(n+1)}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}},\\
&= -\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}},
\end{aligned}$$

qui tend vers 0.

Compte tenu de ces trois points, les deux suites u_n et v_n sont adjacentes et d'après la proposition 8.19 elles convergent vers la même limite.

Correction de l'exercice 2.
Exercice 1932 issu de `http://exo7.emath.fr/`, par gineste 2001/11/01

(1) Notons tout d'abord, que pour tout n, $2^{\sqrt{n}} + b^n > 0$ et donc u_n est définie pour tout n.

Nous allons tout d'abord étudier le dénominateur de u_n en factorisant l'un des termes, le "dominant", pour en déterminer un équivalent, par la suite. Pour cela, on étudie d'abord la limite de la suite $v_n = 2^{\sqrt{n}}/b^n$. On écrit donc

$$\frac{2^{\sqrt{n}}}{b^n} = \frac{e^{\sqrt{n}\ln 2}}{e^{n\ln b}},$$

et donc

$$v_n = e^{\sqrt{n}\ln 2 - n\ln b}$$

- Premier cas : $b = 1$.
  On a donc $\ln b = 0$ et
  $$v_n = e^{\sqrt{n}\ln 2}$$
  et donc
  $$\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty. \tag{4}$$
- Second cas : $b \neq 1$.
  On a donc $\ln b \neq 0$ et on factorise le terme "dominant" qui est $-n\ln b$. On écrit donc
  $$v_n = e^{-n\ln b\left(1 - \frac{\sqrt{n}\ln 2}{n\ln b}\right)},$$
  et on a donc
  $$v_n = e^{-n\ln b\left(1 - \frac{\ln 2}{\sqrt{n}\ln b}\right)} \tag{5}$$

Notons que

$$\lim_{n\to+\infty} 1-\frac{\ln 2}{\sqrt{n}\ln b}=1 \tag{6}$$

Là encore, on a deux possibilités.

- Premier cas : $b>1$. On a donc $\ln b>0$ et puisque $-n\ln b\to-\infty$, on a donc, d'après (5) et (6)

$$\lim_{n\to+\infty} v_n=0. \tag{7}$$

- Second cas : $b<1$. On a donc $\ln b<0$ et puisque $-n\ln b\to+\infty$, on a donc, d'après (5) et (6)

$$\lim_{n\to+\infty} v_n=+\infty. \tag{8}$$

Bref, si on récupitule, les cas donnés par (4), (7) et (8) on a

$$\lim_{n\to+\infty} v_n=\begin{cases}+\infty, & \text{si } b\leq 1,\\ 0, & \text{si } b>1.\end{cases} \tag{9}$$

(2) (a) De (9) et de la définition de v_n , on déduit donc que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2^{\sqrt{n}}}{b^n}=0, \text{si } b>1, \tag{10a}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{b^n}{2^{\sqrt{n}}}=0, \text{si } b\leq 1. \tag{10b}$$

$$\tag{10c}$$

Autrement dit, d'après (10a), dans le dénominateur de u_n, le terme "domimant" est b^n, si $b>1$ et d'après (10b), dans le dénominateur de u_n, le terme "domimant" est $2^{\sqrt{n}}$, si $b\leq 1$. Nous n'avons plus qu'à factoriser ce terme dominant. On écrit donc : si $b>1$

$$\begin{aligned}2^{\sqrt{n}}+b^n &= b^n\left(1+\frac{2^{\sqrt{n}}}{b^n}\right),\\ &= b^n(1+o(1)),\\ &\sim b^n.\end{aligned}$$

De même, si $b\leq 1$, on a

$$\begin{aligned}2^{\sqrt{n}}+b^n &= 2^{\sqrt{n}}\left(1+\frac{b^n}{2^{\sqrt{n}}}\right),\\ &= 2^{\sqrt{n}}(1+o(1)),\\ &\sim 2^{\sqrt{n}}.\end{aligned}$$

On synthétise ces deux résultat en écrivant finalement

$$2^{\sqrt{n}}+b^n\sim\begin{cases}b^n, & \text{si } b>1,\\ 2^{\sqrt{n}}, & \text{si } b\leq 1.\end{cases} \tag{11}$$

(b) On a

$$u_n=\frac{a^n2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n}}+b^n}.$$

et donc, grâce à (11)

$$u_n\sim\begin{cases}\frac{a^n2^{\sqrt{n}}}{b^n}, & \text{si } b>1,\\ \frac{a^n2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n}}}, & \text{si } b\leq 1.\end{cases}$$

soit encore

$$u_n \sim \begin{cases} \left(\frac{a}{b}\right)^n 2^{\sqrt{n}}, & \text{si } b > 1, \\ a^n, & \text{si } b \leq 1. \end{cases}$$

soit encore, en considérant $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ défini par

$$\rho = \frac{a}{b}, \tag{12}$$

on a

$$u_n \sim \begin{cases} \rho^n 2^{\sqrt{n}}, & \text{si } b > 1, \\ a^n, & \text{si } b \leq 1. \end{cases} \tag{13}$$

(c) On enfin conclure grâce à (13), en discutant, cette fois-ci sur a et b.

- Premier cas : $b \leq 1$.
  D'après (13), on a $u_n \sim a^n$ et on est ramené l'étude d'une série géométrique, dont on sait qu'elle converge ssi sa raison (positive) est strictement inférieure à 1. Autrement dit, la série de terme général u_n

$$\text{converge si } a < 1, \tag{14a}$$

$$\text{diverge si } a \geq 1. \tag{14b}$$

- Second cas : $b > 1$. D'après (13), on a

$$u_n \sim \rho^n 2^{\sqrt{n}} \tag{15}$$

  On a encore une discussion selon les valeurs de ρ.
  - Premier cas : $\rho \geq 1$, ce qui est équivalent, d'après (12), à $a \geq b$.
    Dans ce cas, il est évident que $u_n \to +\infty$ et que la série diverge (grossièrement).
  - Second cas : $\rho < 1$, ce qui est équivalent, d'après (12), à $a < b$. On est ramené à un calcul proche de celui de la question 1. On écrit

$$\begin{aligned} \rho^n 2^{\sqrt{n}} &= e^{n \ln \rho} e^{\sqrt{n} \ln 2}, \\ &= e^{n \ln \rho + \sqrt{n} \ln 2}, \end{aligned}$$

    on met en facteur le terme "dominant" $n \ln \rho$:

$$= e^{n \ln \rho \left(1 + \frac{\sqrt{n} \ln 2}{n \ln \rho}\right)},$$

    et donc

$$\rho^n 2^{\sqrt{n}} = e^{n \ln \rho \left(1 + \frac{\ln 2}{\sqrt{n} \ln \rho}\right)}. \tag{16}$$

    On en déduit par exemple que

$$\begin{aligned} n^2 \left(\rho^n 2^{\sqrt{n}}\right) &= e^{2 \ln n} e^{n \ln \rho \left(1 + \frac{\ln 2}{\sqrt{n} \ln \rho}\right)}, \\ &= e^{2 \ln n + n \ln \rho \left(1 + \frac{\ln 2}{\sqrt{n} \ln \rho}\right)}, \end{aligned}$$

    et donc

$$n^2 \left(\rho^n 2^{\sqrt{n}}\right) = e^{n \ln \rho \left(1 + \frac{2 \ln n}{n \ln \rho} + \frac{\ln 2}{\sqrt{n} \ln \rho}\right)}. \tag{17}$$

    Il est simple de vérifier que

$$1 + \frac{2 \ln n}{n \ln \rho} + \frac{\ln 2}{\sqrt{n} \ln \rho} \to 0$$

    et, puisque $\rho < 1$, d'après (17)

$$\lim_{n \to +\infty} n^2 \left(\rho^n 2^{\sqrt{n}}\right) = 0.$$

et donc

$$\rho^n 2^{\sqrt{n}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{18}$$

Puisque la série de terme général $1/n^2$ converge, (18) implique la convergence de la série de terme général $\rho^n 2^{\sqrt{n}}$, et donc celle de u_n, d'après (15).

(d) Résumons donc tous les résultats obtenus : la série de terme général u_n converge ssi ($b \leq 1$ et $a < 1$) ou ($b > 1$ et $a < b$) et elle diverge ssi ($b \leq 1$ et $a \geq 1$) ou ($b > 1$ et $a \geq b$).

Correction de l'exercice 3.

On renvoie aux propositions 8.25 et 8.26 ainsi qu'à celle de la section 12.5 du cours du cours et à leur preuves respectives.

Correction de l'exercice 4.

Voir `https://www.annales2maths.com/ts-exponentielle/`, exercice 5, points 3) et 5), dont les correction sont reproduites ci-dessous.

3. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule jamais.

$$f'(x) = \frac{(1+\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x(x+\mathrm{e}^x)}{(\mathrm{e}^x)^2} = \frac{\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x-x-\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^{2x}} = \frac{(1-x)\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}} = \frac{1-x}{\mathrm{e}^x}$$

La fonction exponentielle étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, le signe de $f'(x)$ ne dépend donc que de celui de $1-x$.
Par conséquent la fonction f est croissante sur $]-\infty;1]$ et décroissante sur $[1;+\infty[$.

5. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$.

$$f'(x) = \frac{-\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x-1)^2}.$$

La fonction exponentielle étant strictement positive sur $\mathbb{R}^*$, $f'(x) < 0$ sur $\mathbb{R}^*$.
La fonction f est donc décroissante sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$.

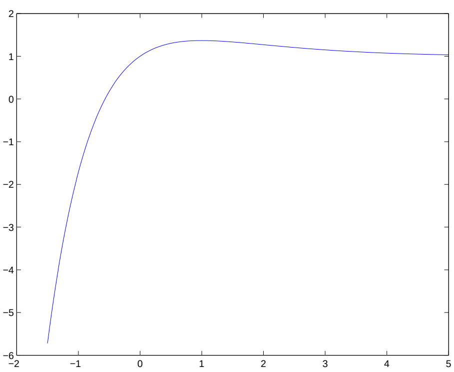

FIGURE 1. Le graphe de la fonction f (question 1).

Voir aussi le graphe de ces fonctions sur la figure 1 et 2.

Références

[Mon90] J.-M. Monier. *Analyse, tome 1 (mathématiques supérieures).* Dunod, 1990.

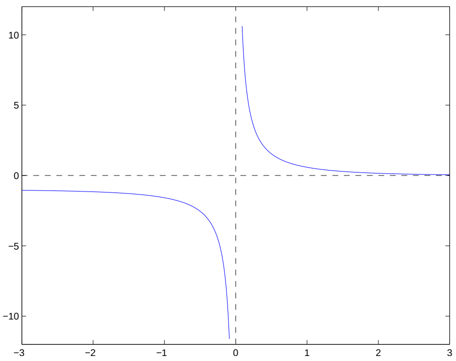

FIGURE 2. Le graphe de la fonction f (question 2).