Informatique 3A MFI Automne 2014

Corrigé de l'examen du 01 Octobre 2014

Correction de l'exercice 1.
Exercice issu des TD
On cherche à calculer dans cet exercice, l'intégrale I définie par

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

On procède en plusieurs étapes :

(1) Remarquons que par parité

$$I = 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Si fait le changement de variable

$$x = \tan(t),$$

on a

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(\tan t) = \frac{1}{\cos^2 t}$$

et donc, il vient

$$dx = \frac{dt}{\cos^2 t}.$$

On a aussi

$$\tan^2 t + 1 = \frac{1}{\cos^2(t)}.$$

Enfin, $x = 0$ correspond à $t = 0$ et $x = 1$ correspond à $t = \pi/4$. Bref, il vient [1]

$$\begin{aligned} I &= 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}, \\ &= 2\int_0^{\pi/4} \frac{dt}{\cos^2 t\sqrt{\tan^2 t+1}}, \\ &= 2\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 t}\left|\cos(t)\right| dt. \end{aligned}$$

Sur $[0, \pi/4]$, la fonction cos est positive et donc

$$I = 2\int_0^{\pi/4} \frac{dt}{\cos t}.$$

(2) La méthode générale de la section D.2.2.1 du cours suggère de faire le changement de variable

$$u = \tan\left(\frac{t}{2}\right). \tag{1}$$

Mais, ici, les règle simplificatrices de Bioche de la section D.2.2.2 nous invite à faire le changement de variable

$$u = \sin t \tag{2}$$

1. Puisque $\sqrt{a^2} = |a|$, pour tout réel !

puisque

$$\cos(\pi - t) = -\cos(-t) = -\cos t$$

On a donc

$$du = -\cos t dt.$$

Pour $t = 0$, on a $u = 0$ et pour $t = \pi/4$, $u = \sqrt{2}/2$. Il vient donc

$$\begin{aligned} I &= 2\int_0^{\pi/4} \frac{dt}{\cos t}, \\ &= -2\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{du}{\cos t}\frac{1}{\cos t}, \\ &= -2\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{du}{\cos^2 t}, \\ &= 2\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{du}{1-\sin^2 t}, \end{aligned}$$

et donc

$$I = -2\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{du}{u^2-1}.$$

Remarque 1. Le lecteur averti remarquera que la fonction $u \mapsto u^2 - 1$ ne s'annulle pas sur $[0, \sqrt{2}/2]$ et donc que la fonction à intégrer est bien continue !

(3) On utilise maintenant la section D.1 du cours qui suggère de décomposer $1/(u^2-1)$ en éléments simples : on montre donc aisément

$$\frac{1}{u^2-1} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{u+1} - \frac{1}{u-1}\right).$$

Les primitives des fonctions $u \mapsto 1/(u-1)$ et $u \mapsto 1/(u+1)$ sont [2] $u \mapsto \ln|u-1|$ et $u \mapsto \ln|u+1|$ et donc

$$\begin{aligned} I &= -\int_0^{\sqrt{2}/2} \left(\frac{1}{u+1} - \frac{1}{u-1}\right) du, \\ &= -\left[\ln|u+1| - \ln|u+1|\right]_{u=0}^{u=\sqrt{2}/2}, \\ &= -\left[\ln\left|\frac{u+1}{1-u}\right|\right]_{u=0}^{u=\sqrt{2}/2}, \end{aligned}$$

et donc

$$I = \ln\left(\frac{\sqrt{2}/2+1}{-\sqrt{2}/2+1}\right).$$

2. sur des intervalles où $u-1$ et $u+1$ sont de signe constant, ce qui est le cas ici.

On peut simplifier l'argument du logaritme de façon classique :

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{2}/2+1}{-\sqrt{2}/2+1} &= \frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}},\\
&= \frac{(2+\sqrt{2})^2}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})},\\
&= \frac{6+4\sqrt{2}}{4-2},\\
&= 3+2\sqrt{2},\\
&= \left(\sqrt{2}+1\right)^2,
\end{aligned}$$

et donc

$$I = \ln\left(\left(\sqrt{2}+1\right)^2\right),$$

et finalement

$$I = 2\,\ln\left(\sqrt{2}+1\right).$$

Correction de l'exercice 2.

- On cherche une solution particulière sous la forme $y_p = \lambda e^{-t}$. On obtient

  $$e^{-t} = 2y' + 3y = \lambda e^{-t}(-2+3) = \lambda e^{-t},$$

  et donc $\lambda = 1$ et donc

  $$y_p = e^{-t}$$

- La solution générale de l'équaitions sans second membee (ou EHA) est

  $$y = Ce^{-\frac{3}{2}t},$$

  où C est un réel.
- Ainsi, on a

  $$y = Ce^{-\frac{3}{2}t} + e^{-t}.$$

  Cette solution pouvait aussi être obtenue par variation de la constante.
- La condition initiale fournit

  $$1 = y(0) = C + 1;$$

  et donc $C = 0$.

Bref, on a

$$y(t) = \mathrm{e}^{-t}.$$

Correction de l'exercice 3.

On obtient les résultats suivants

(1) Le système admet une solution unique donnée par

$$x = \begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1 \end{pmatrix}.$$

(2) Il y a au moins une équation superflue et le système admet un ensemble infini de solution.

(3) Il y a au moins une équation incompatible et le système n'admet aucune solution.