POLYTECH LYON

Informatique 3A MFI — Automne 2015

Corrigé de l'examen du 25 Septembre 2015

Correction de l'exercice 1.

(1) On obtient

$$f'(x) = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} + 1 + (\tan(x))^2.$$

(2) (a) On obtient

$$G(x) = \int g(x)dx = 1/3\,x^3 \ln(x) - 1/9\,x^3.$$

(b) Ainsi,

$$I = \int_1^2 g(x)dx = G(2) - G(1) = \frac{8\,\ln(2)}{3} - \frac{7}{9}.$$

Correction de l'exercice 2.
Le système admet une solution unique donnée par

$$x = \begin{pmatrix} 3/10 \\ 1/10 \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 3.

– On cherche une solution particulière sous la forme $y_p = A\cos(t) + B\sin(t)$. On obtient

$$-A\sin(t) + B\cos(t) + 3A\cos(t) + 3B\sin(t) = \cos(t)$$

et donc en identifiant les coefficients, on obtient le système linéaire

$$\begin{cases} 3A + B = 1, \\ -A + 3B = 0 \end{cases}$$

que l'on avait déjà résolu (!) dans l'exercice 2. On a donc $A = 3/10$ et $B = 1/10$ et donc

$$y_p = \frac{3}{10}\cos(t) + \frac{1}{10}\sin(t)$$

– La solution générale de l'équaitions sans second membee (ou EHA) est

$$y = Ce^{-3t},$$

où C est un réel.

– Ainsi, on a

$$y = Ce^{-3t} + \frac{3}{10}\cos(t) + \frac{1}{10}\sin(t).$$

Cette solution pouvait aussi être obtenue par variation de la constante.

– La condition initiale fournit

$$2 = y(0) = C + \frac{3}{10}$$

et donc $C = 17/10$.

Bref, on a

$$y(t) = 3/10\,\cos(t) + 1/10\,\sin(t) + \frac{17}{10}e^{-3\,t}.$$

Pour résoudre cela symboliquement avec matlab, on peut taper

```
y=simplify(dsolve('Dy+3*y=cos(t)','y(0)=2','t'))
```

voire même pour les adeptes de LaTeX :

```
y=latex(simplify(dsolve('Dy+3*y=cos(t)','y(0)=2','t')))
```

Correction de l'exercice 4.

(1) (a) On a

$$I_0 = \int_0^1 e^{-x} dx = 1 - e^{-1},$$

soit

$$I_0 = 1 - e^{-1}, \tag{1}$$

(b) Par intégration par partie, il vient, pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} I_n &= n \int_0^1 x^{n-1} e^{-x} dx - \left[x^n e^{-x}\right]_0^1, \\ &= nI_{n-1} - e^{-1} \end{aligned}$$

soit

$$\forall n \geq 1, \quad I_n = nI_{n-1} - e^{-1}. \tag{2}$$

(2) De (1) et (2) appliqué à $n = 1$, on déduit

$$I_1 = I_0 - e^{-1} = 1 - 2e^{-1}.$$

De même, en appliquant successivement (2) à $n = 2$ et $n = 3$, on obtient

$$\begin{aligned} I_2 &= 2I_1 - e^{-1} = 2\left(1 - 2e^{-1}\right) - e^{-1} = 2 - 5e^{-1}, \\ I_2 &= 3I_2 - e^{-1} = 3\left(2 - 5e^{-1}\right) - e^{-1} = 6 - 16e^{-1}, \end{aligned}$$

et donc

$$I_3 = 6 - 16e^{-1}. \tag{3}$$

(3) (a) On écrivant la relation de récurrence de n à 1, on obtient

$$\begin{aligned} I_n &= nI_{n-1} - e^{-1}, \\ I_{n-1} &= (n-1)I_{n-2} - e^{-1}, \\ I_{n-2} &= (n-2)I_{n-3} - e^{-1}, \\ \vdots &= \vdots, \\ I_1 &= I_0 - e^{-1}. \end{aligned}$$

On multitplie respectivement ces égalités par 1, n, $n(n-1)$, ... $n(n-1)(n-2)...2 = n!$ et on obtient donc

$$\begin{aligned} I_n &= nI_{n-1} - e^{-1}, \\ nI_{n-1} &= n(n-1)I_{n-2} - ne^{-1}, \\ n(n-1)I_{n-2} &= n(n-1)(n-2)I_{n-3} - n(n-1)e^{-1}, \\ \vdots &= \vdots, \\ n!I_1 &= n!I_0 - n!e^{-1}. \end{aligned}$$

En sommant toutes ces égalités, tous les termes après le signe «=» disparaissent sauf le premier et le dernier :

$$I_n = n! I_0 - e^{-1}\big(1 + n + n(n-1) + n(n-1)(n-2) + ... + n(n-1)(n-2) \times ... \times 4 \times 3 + n!\big).$$

Compte tenu de (1), il vient

$$I_n = n! \left(1 - e^{-1}\right) - e^{-1}\big(1 + n + n(n-1) + n(n-1)(n-2) + ... + n(n-1)(n-2) \times ... \times 4 \times 3 + n!\big).$$

soit encore

$$I_n = n! \left(1 - e^{-1}\right) - e^{-1}\big(1 + n + n(n-1) + n(n-1)(n-2) + ... + n(n-1)(n-2) \times ... \times 4 \times 3! + n!\big). \tag{4}$$

On peut aussi noter cela sous la forme

$$I_n = n! \left(1 - e^{-1}\right) - e^{-1}\left(1 + \sum_{k=2}^{n} n(n-1)(n-2)...(k+1)k\right)$$

ou encore

$$I_n = n! \left(1 - e^{-1}\right) - e^{-1}\left(1 + \sum_{k=2}^{n} \prod_{l=k}^{n} l\right),$$

ou enfin (!)

$$I_n = n! \left(1 - e^{-1}\right) - e^{-1} \sum_{k=2}^{n+1} \prod_{l=k}^{n} l.$$

(b) Pour $n = 3$, (4) donne :

$$I_3 = 3! \left(1 - e^{-1}\right) - e^{-1}\big(1 + 3 + 3 \times 2\big) = 6 \left(1 - e^{-1}\right) - 10e^{-1} = 6 - 16e^{-1},$$

ce qui est bien la valeur donnée par (3).

Correction de l'exercice 5.

On obtient les résultats suivants

(1) Le système admet une solution unique donnée par

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(2) Il y a au moins une équation superflue et le système admet un ensemble infini de solution.

(3) Il y a au moins une équation incompatible et le système n'admet aucune solution.