Informatique 3A MFI — Automne 2018

Corrigé de l'examen du 5 Octobre 2018

Correction de l'exercice 1.
On trouve en utilisant par exemple la fonction suivante
`http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MFI/fichiers_matlab/developpement_limite.m`,

$$f(x) = 1/6\,x^3 + x + o\left(x^4\right),$$

Correction de l'exercice 2.
En intégrant $2x$ et en dérivant $\arctan(x)$, on obtient :

$$I = 1/2\,\pi - 1.$$

Correction de l'exercice 3.
On obtient

$$y(t) = 1 - 1/2\,x + 1/2\,x^2.$$

Correction de l'exercice 4.
On obtient les résultats suivants

(1) Le système admet une solution unique donnée par

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(2) Il y a au moins une équation superflue et le système admet un ensemble infini de solution.

(3) Il y a au moins une équation incompatible et le système n'admet aucune solution.

Correction de l'exercice 5.
On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases} \tag{1}$$

(1) f est définie d'après (1) pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc $D_f = \mathbb{R}$.

(2) (a) Puisque pour tout X, $|\sin(X)| \leq 1$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$|f(x)| = \left|x^2\right| \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq x^2.$$

Cette dernière inégalité étant aussi valable pour $x = 0$, on a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leq x^2. \tag{2}$$

(b) Puisque $f(0) = 0$, on a donc, selon (2), on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x) - f(0)| \leq x^2. \tag{3}$$

Puisque x^2 tend vers zéro quand x tend vers zéro, le théorème des gendarmes implique que $|f(x) - f(0)|$ tend vers zéro quand x tend vers zéro. et donc que f est continue en zéro.

(3) (a) En divisant f par $x \neq 0$ et en utilisant $f(0) = 0$, on déduit comme précédemment que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \left| \frac{f(x) - f(0)}{x} - 0 \right| \leq |x|. \tag{4}$$

(b) De plus, on écrit que $|x|$ tend vers zéro quand x tend vers zéro et le théorème des gendarmes implique que $|(f(x) - f(0))/(x - 0)|$ tend vers zéro quand x tend vers zéro. Ainsi, f est dérivable en zéro avec $f'(0) = 0$.

(4) (a) f est évidemment dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right). \tag{5}$$

(b) Comme précédemment, on montre que $x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ quand x tend vers zéro quand x tend vers zéro. En revanche, le terme $g(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a aucune limite quand x tend vers zéro. En effet, considérons les deux suites (x_n) et (y_n) définies par

$$\forall \in \mathbb{N}^*, \quad x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}, \quad y_n = \frac{1}{2n\pi}. \tag{6}$$

Il est clair que

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = \lim_{n \to +\infty} y_n = 0. \tag{7}$$

Par ailleurs, on a

$$\cos\left(\frac{1}{x_n}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 0, \quad \cos\left(\frac{1}{y_n}\right) = \cos(2n\pi) = 1,$$

et donc

$$\lim_{n \to +\infty} g(x_n) = \lim_{n \to +\infty} g(y_n) = 1. \tag{8}$$

(7) et (8) nous montrent que g n'a pas de limite en zéro. Il en est donc de même pour f'.

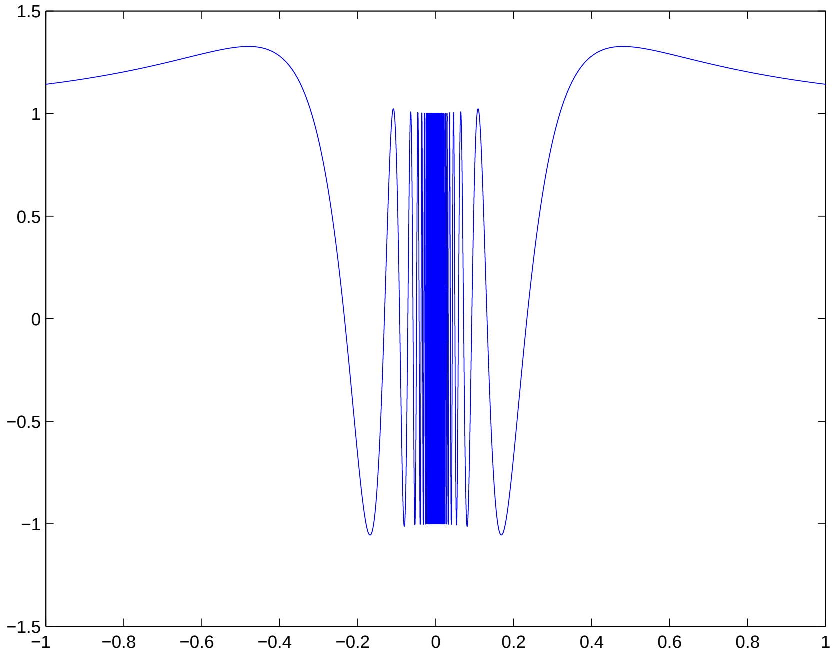


FIGURE 1. La dérivée de la fonction f.

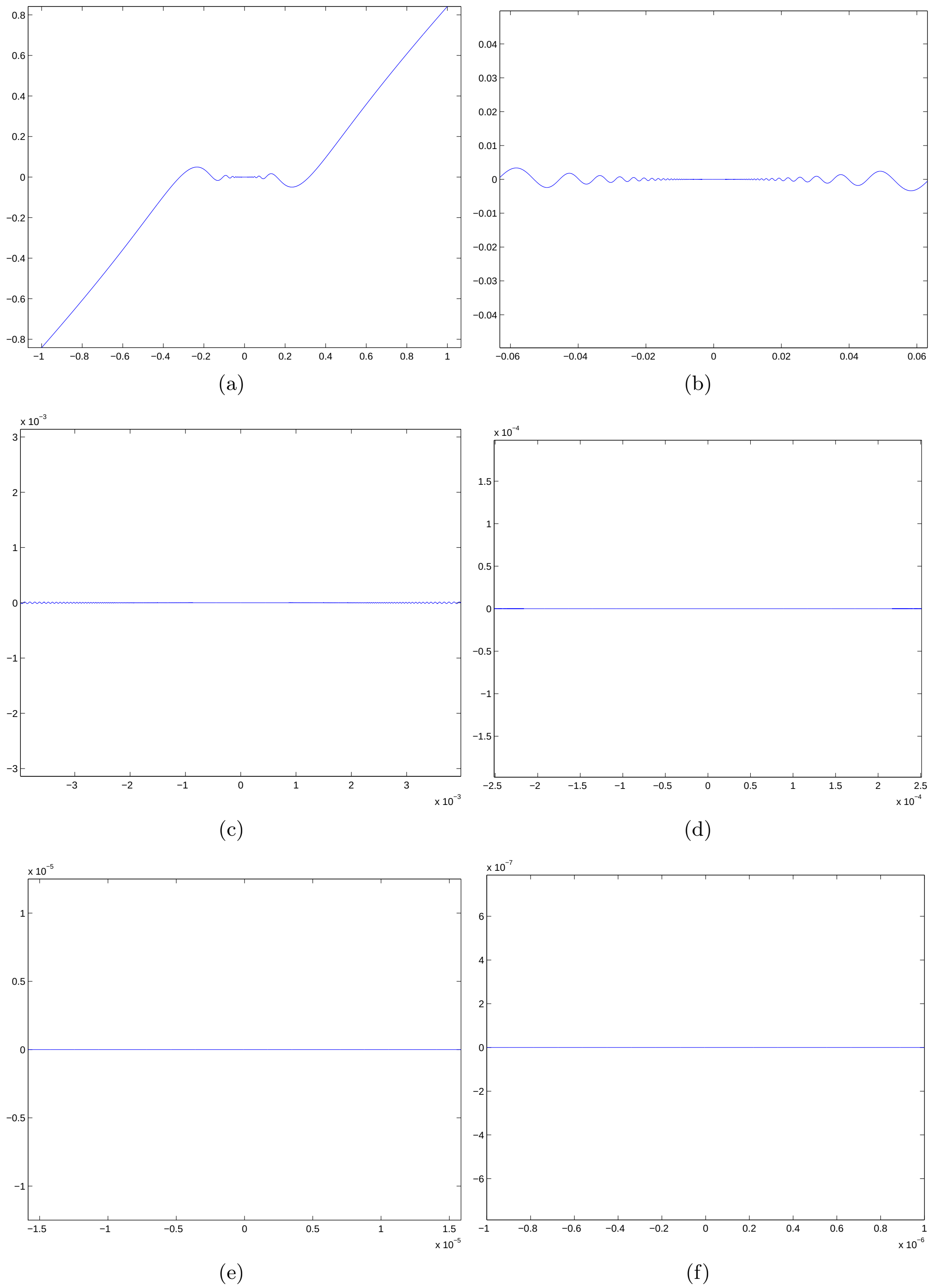
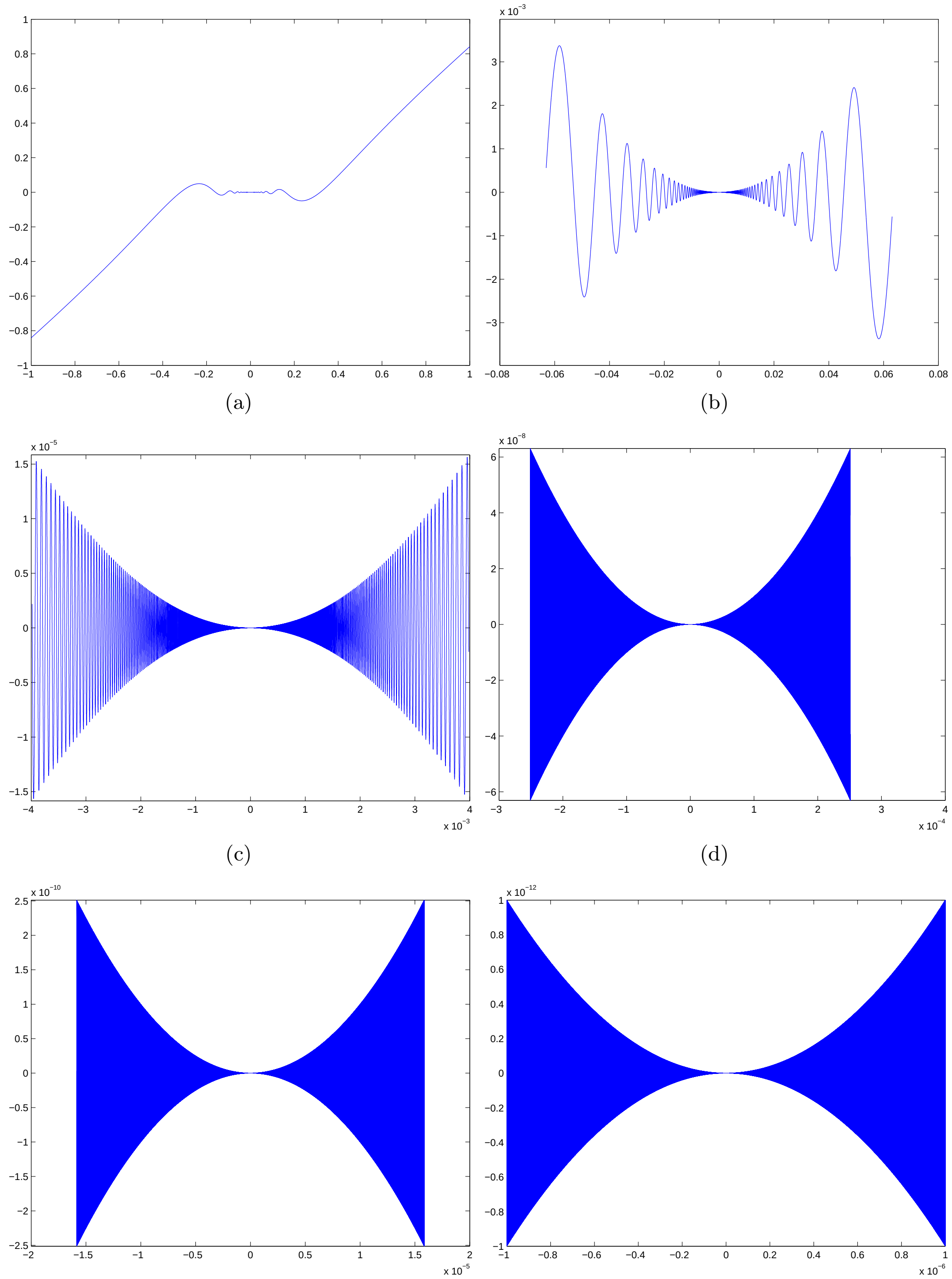


FIGURE 2. Différents zooms de f avec un coefficient de dilatation identique en x et en y.

Voir la figure 1.



(a) (b) (c) (d) (e) (f)

FIGURE 3. Différents zooms de f avec un coefficient de dilatation différents en x et en y.

Remarque 1. Comme le montre les figures 2, un zoom de plus en plus près du graphe de f fait bien apparaître un graphe qui finit par se confondre avec la tangente en l'origine. Cela n'est pas le cas de la figure 3.