Informatique 3A MFI | Automne 2022

# Corrigé de l'examen du 19 Octobre 2022

**Correction de l'exercice 1.**
Cet exercice correspond à l'exercice de TD 1.14. On renvoie à sa correction, reproduite ci-dessous :
La correction est très proche de la correction de l'exercice 1.13 page 3 du corrigé de TD, à laquelle on se référera.
Posons, pour tout cet exercice,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}(x) = \frac{2}{1-x^2} - \frac{3\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{1-x^3} \tag{1}$$

Le domaine de définition de $\mathcal{F}$ est égal à $D_{\mathcal{F}} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

(1) Notons tout d'abord que l'on a affaire à une forme indéterminée. Nous avons toujours les équations (1.4) du corrigé de TD et (1.5) du corrigé de TD. De plus, quand $x$ tend vers 1, $\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ tend vers 1 et ne modifie pas le signe de $\frac{3\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{1-x^3}$. Ainsi, si $x$ tend vers 1, $2/(1-x^2)$ est du signe de $1-x$ et tend donc vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) si $x$ tend vers 1 par valeurs négatives (resp. positive). Il est de même de $\frac{3\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{1-x^3}$. On a donc une forme indéterminée puisque la limite vaut $\infty - \infty$ (resp. $-\infty + \infty$) si $x$ tend vers 1 par valeurs négatives (resp. positives).

Utilisons les développements limités comme dans la question 1 page 3 du corrigé de TD de l'exercice 1.13 du corrigé de TD. On considère $h$ défini par (1.6) du corrigé de TD.

Comme dans l'exercice 1.13 du corrigé de TD, on détermine le développement limité de $\frac{2}{1-x^2}$. Voir équation (1.9) du corrigé de TD.

Pour le second facteur, on utilise l'expression donnée par (1.11) du corrigé de TD. Il reste à obtenir le développement de $\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ en $h$. On écrit

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) &= \sin\left(\frac{\pi(h+1)}{2}\right), \\ &= \sin\left(\frac{\pi h}{2} + \frac{\pi}{2}\right),\end{aligned}$$

et d'après les formules usuelles (voir annexe H page 153 du cours), on a donc

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) &= \sin\left(\frac{\pi h}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi h}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right), \\ &= \cos\left(\frac{\pi h}{2}\right)\end{aligned}$$

On utilise les développements limités usuels de l'annexe A du cours et on a donc

$$\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 1 + o\left(\frac{\pi h}{2}\right) = 1 + o(h),$$

et d'après l'équation (1.11) du corrigé de TD, on a donc

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\},\quad \frac{3\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{1-x^3} &= -\frac{1}{h}\left(1-h+o(h)\right)\left(1+o(h)\right),\\ &= -\frac{1}{h}\left(1+o(h)-h-ho(h)+o(h)+o(h)o(h)\right),\\ &= -\frac{1}{h}\left(1-h+o(h)\right)\end{aligned}$$

et on retrouve donc un résultat identique à (1.11) du corrigé de TD

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\},\quad \frac{3\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{1-x^3} = -\frac{1}{h}\left(1-h+o(h)\right) \tag{2}$$

On finit exactement comme dans la question 1 page suivante du corrigé de TD de l'exercice 1.13 du corrigé de TD et on obtient de nouveau (1.12) du corrigé de TD.

(2) Sans ces développements limités, on peut aussi s'en sortir, mais non dans tous les cas.

(a) Ici, le calcul du point 2a page 5 du corrigé de TD n'est plus valable car l'expression n'est plus polynômiale et ne se factorise plus.

(b) Pour la même raison, la première version de l'utilisation de la règle de l'Hospital du point 2b page 5 du corrigé de TD n'est plus valable ici.

(c) En revanche, la seconde version de l'utilisation de la règle de l'Hospital du point 2c page 6 du corrigé de TD est valable ici. Comme dans ce calcule, on détermine $\mathcal{F}(x)$ :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\},\quad \mathcal{F}(x) &= -\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{3\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{x^3-1}\right),\\ &= -\frac{1}{(x^2-1)(x^3-1)}\left(2(x^3-1)-3\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)(x^2-1)\right),\\ &= -\frac{1}{(x^2-1)(x^3-1)}\left(2x^3-2-3\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)x^2+3\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right),\end{aligned}$$

et donc, avec les notations précédentes

$$\begin{aligned}f(x) &= -2x^3+3\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)x^2-3\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)+2,\\ g(x) &= x^5-x^3-x^2+1,\end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}f(1) &= 0,\\ g(1) &= 0.\end{aligned}$$

Puis,

$$\begin{aligned}f'(x) &= -6x^2+\frac{3\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)x^2+6\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)x-\frac{3\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right),\\ g'(x) &= 5x^4-3x^2-2x,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}f'(1) &= 0,\\ g'(1) &= 0.\end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned}
&f''(x) = -12x - \frac{3\pi^2}{4}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)x^2 + 6\pi\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)x + 6\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \frac{3\pi^2}{4}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right),\\
&g''(x) = 20x^3 - 6x - 2.
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
f''(1) &= -6,\\
g''(1) &= 12,
\end{aligned}$$

et on conclut comme dans la question 2c page 6 du corrigé de TD de l'exercice 1.13 du corrigé de TD

**Correction de l'exercice 2.**
On obtient, après calculs :

$$-1/6\,x^2 + o\left(x^3\right).$$

**Correction de l'exercice 3.**
On obtient

$$I = -5 + 3\,\pi.$$

**Correction de l'exercice 4.**
On obtient les résultats suivants :

(1) Le système admet une solution unique donnée par

$$x = \begin{pmatrix} 1\\ 2\\ 3 \end{pmatrix}.$$

(2) Il y a au moins une équation redondante (et aucun couple d'équations contradictoires et aucune équation impossible) et le système admet un ensemble infini de solutions.

**Correction de l'exercice 5.**
Cet exercice correspond à l'exercice de TD 6.14.

(1) On obtient successivement : la solution générale de l'équation homogène associée (sans second membre) :

$$y_{\mathrm{g}}(t) = ce^{-3\,t}\,;$$

($c$ est une constante quelconque), une solution particulière {Plus précisément, on cherche un polynôme de degré 3 du type $at^3 + bt^2 + ct + d$ et si on réinjecte ce polynôme dans l'équation différentielle, on obtient un système de quatre équations en $a$, $b$, $c$ et $d$ que l'on résoud.} :

$$y_{\mathrm{p}}(t) = 2/9 + 1/3\,t + 1/3\,t^3\,;$$

la solution générale de l'équation différentielle donnée par $y = y_{\mathrm{g}} + y_{\mathrm{p}}$, soit ici :

$$y(t) = ce^{-3\,t} + 2/9 + 1/3\,t + 1/3\,t^3\,;$$

et enfin, en utilisant la condition initiale, on détermine la valeur de $c$, ce qui donne

$$y(t) = -\frac{23}{9}\,e^6e^{-3\,t} + 2/9 + 1/3\,t + 1/3\,t^3.$$

(2) (a) Il est très facile d'inventer une équation différentielle [1] partant de sa solution. On suppose donc connus $t_0$, $y_0 \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ et $\widehat{y}$ une fonction vérifiant

$$y'(t) + ay(t) = f(t), \tag{3a}$$

$$y(t_0) = y_0. \tag{3b}$$

La fonction $f$ est tout simplement donnée par (3a), lue à "l'envers", puisque vérifiée par $\widehat{y}$ :

$$f(t) = \widehat{y}'(t) + a\widehat{y}(t). \tag{4}$$

(b) Si $f$ est connue, on résoud donc l'équation différentielle (3). On détermine d'abord $y_g$, la solution générale de l'équation homogène associée à (3a) donnée donc par

$$y_g(t) = Ce^{-at}. \tag{5}$$

Ensuite, il faut déterminer la solution de (3). Naturellement, même si elle est possible, la méthode de la variation de la constante est à proscrire, puisque l'on connaît une solution particulière de (3), justement donnée par $\widehat{y}$, connue ! On sait donc que $y$ la solution de (3) est donnée par

$$y(t) = Ce^{-at} + \widehat{y}(t). \tag{6}$$

On utilise enfin la condition initiale (3b)

$$y_0 = y(t_0) = Ce^{-at_0} + \widehat{y}(t_0),$$

et puisque $\widehat{y}$ vérifie aussi (3b), on a donc

$$y_0 = Ce^{-at_0} + \widehat{y}(t_0) = Ce^{-at_0} + y_0,$$

et donc

$$0 = Ce^{-at_0},$$

d'où

$$C = 0,$$

et d'après (6),

$$y(t) = \widehat{y}(t), \tag{7}$$

ce qui est tout à fait normal !

(c) Concluons par trois exemples.

**Exemple 1.** Si on se donne

$$\begin{aligned} a &= 2, \\ t_0 &= 1, \\ \widehat{y}(t) &= 1 + t + t^3, \end{aligned}$$

on en déduit

$$y_0 = 3,$$

et, d'après (4),

$$f(t) = 3\,t^2 + 3 + 2\,t^3 + 2\,t,$$

et la résolution de l'équation différentielle (3) qui s'écrit donc ici

$$\begin{aligned} y'(t) + 2y(t) &= 3\,t^2 + 3 + 2\,t^3 + 2\,t, \\ y(1) &= 3, \end{aligned}$$

1. linéaire d'ordre un à coefficients constants pour être précis.

redonne bien $y$ !

**Exemple 2.** Si on se donne

$$\begin{aligned}
&a=-3,\\
&t_0=2,\\
&\widehat{y}(t)=2\,\cos(t)\,,
\end{aligned}$$

on en déduit

$$y_0=2\,\cos(2)\,,$$

et, d'après (4),

$$f(t)=-2\,\sin(t)-6\,\cos(t)\,,$$

et la résolution de l'équation différentielle (3) qui s'écrit donc ici

$$\begin{aligned}
&y'(t)-3y(t)=-2\,\sin(t)-6\,\cos(t)\,,\\
&y(2)=2\,\cos(2)\,,
\end{aligned}$$

redonne bien $y$ !

**Exemple 3.** Si on se donne

$$\begin{aligned}
&a=3,\\
&t_0=2,\\
&\widehat{y}(t)=-\frac{23}{9}\,e^{6}e^{-3\,t}+2/9+1/3\,t+1/3\,t^3,
\end{aligned}$$

on en déduit

$$y_0=1,$$

et, d'après (4),

$$f(t)=1+t^2+t+t^3,$$

et la résolution de l'équation différentielle (3) qui s'écrit donc ici

$$\begin{aligned}
&y'(t)+3y(t)=1+t^2+t+t^3,\\
&y(2)=1,
\end{aligned}$$

redonne bien $y$ !