Informatique 3A MFI — Automne 2023

Corrigé de l'examen du 27 Septembre 2023

Correction de l'exercice 1.

(1) (a) L'annexe A du cours nous donne par exemple

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right).$$

(b) L'annexe A du cours nous donne par exemple

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right).$$

(2) On obtient, après calculs (c'est à dire substitution de x par le dl du sin dans celui de arctan et suppression des termes de degrés strictement supérieurs à 3) :

$$x - 1/2\, x^3 + o\left(x^3\right).$$

Correction de l'exercice 2.

(1) Une intégration par parties (comme dans la correction de l'exercice de TD 3.2, question 3a) fournit

$$I = 1 + t\ln(t) - t.$$

(2) On en déduit qu'une primitive de $\ln(x)$ est $x\ln(x) - x$.

Correction de l'exercice 3.

On obtient les résultats suivants :

(1) Le système admet une solution unique donnée par

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(2) Il y a au moins une équation redondante (et aucun couple d'équations contradictoires et aucune équation impossible) et le système admet un ensemble infini de solutions.

Correction de l'exercice 4.

(1) On obtient successivement : la solution générale de l'équation homogène associée (sans second membre) :

$$y_{\mathrm{g}}(t) = ce^{-3\,t};$$

(c est une constante quelconque), une solution particulière {Plus précisément, on cherche un polynôme de degré 3 du type $at^3 + bt^2 + ct + 1$ et si on réinjecte ce polynôme dans l'équation différentielle, on obtient un système de 4 équations en a, b, c et d que l'on résoud.} :

$$y_{\mathrm{p}}(t) = 1/9 + 2/3\,t + 1/3\,t^3;$$

la solution générale de l'équation différentielle donnée par $y = y_{\mathrm{g}} + y_{\mathrm{p}}$, soit ici :

$$y(t) = ce^{-3\,t} + 1/9 + 2/3\,t + 1/3\,t^3;$$

et enfin, en utilisant la condition initiale, on détermine la valeur de c, ce qui donne

$$y(t) = \frac{8}{9}\, e^{-3\,t} e^{3} + 1/9 + 2/3\, t + 1/3\, t^{3}.$$

(2) On obtient successivement : la solution générale de l'équation homogène associée (sans second membre) :

$$y_{\mathrm{g}}(t) = ce^{2\,t}\,;$$

(c est une constante quelconque), la solution générale de l'équation différentielle obtenue par la méthode de la variation de la constante {Plus précisément, cette double intégration par partie fournira une équation contenant la valeur de la primitive recherchée.} :

$$y(t) = ce^{2\,t} + 1/4\, \cos(2\,t) + 1/4\, \sin(2\,t)\ ;$$

et enfin, en utilisant la condition initiale, on détermine la valeur de c, ce qui donne

$$y(t) = -1/4\, \left(-4 + \cos(2) + \sin(2)\right) e^{-2} e^{2\,t} + 1/4\, \cos(2\,t) + 1/4\, \sin(2\,t)\,.$$