Informatique 3A MFI & MFIappro — Automne 2024

Corrigé de l'examen du 02 octobre 2024

Correction de l'exercice 1.

(1) L'annexe A du cours nous donne par exemple

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right).$$

(2) On obtient, après calculs (c'est à dire substitution de x par le dl du sin dans celui de sin et suppression des termes de degrés strictement supérieurs à 4) :

$$\sin(\sin(x)) = x - 1/3\, x^3 + o\left(x^4\right).$$

Correction de l'exercice 2.
On obtient

$$I = 1/4.$$

Le calcul est très proche de l'exemple 3.7 du cours et est présenté dans l'exemple F.5 de l'annexe F du cours.

Correction de l'exercice 3.
Cet exercice avait été déjà donné lors d'un QCM !
Le travail d'une force $\vec{F}$ sur un trajet $\overrightarrow{AB}$ est égal à

$$W_{\overrightarrow{AB}}\left(\vec{F}\right) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB} \tag{1}$$

formule qu'il n'est valable que si la force $\vec{F}$ est constante le long de $\overrightarrow{AB}$. Si elle n'est pas constante, il faut déterminer une somme des travaux infinitésimaux dW. Le travail infinitésimal est défini comme le travail $\vec{F}$ sur le trajet infinitésimal $\overrightarrow{dl}$ le long duquel $\vec{F}$ est "approximativement constant", de sorte que (1) devient

$$dW\left(\vec{F}\right) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{dl}, \tag{2}$$

et naturellement :

$$\overrightarrow{AB} = \int_A^B \overrightarrow{dl}. \tag{3}$$

On n'a plus qu'à écrire

$$W_{\overrightarrow{AB}}\left(\vec{F}\right) = \int_A^B \vec{F} \cdot \overrightarrow{dl}. \tag{4}$$

Dans le cas du ressort, F est dans l'axe du ressort et colinéaire à $\overrightarrow{dl}$ de sorte que

$$W_{\overrightarrow{AB}}\left(\vec{F}\right) = \int_A^B F dl.$$

On passe d'une position au repos (ou la longueur du ressort, par rapport à sa longueur à vide) est nulle à une position où la longueur est l_0. On a donc

$$W\left(\vec{F}\right) = \int_0^{l_0} F(l) dl.$$

et puisque $F(l) = Kl$, on a donc

$$W\left(\vec{F}\right) = \int_0^{l_0} Kl dl.$$

soit encore

$$W\left(\vec{F}\right) = K\left[\frac{l^2}{2}\right]_0^{l_0},$$

et donc

$$W\left(\vec{F}\right) = \frac{1}{2}Kl_0^2, \tag{5}$$

qui correspond à l'énergie de déformation élastique du ressort de longueur l_0 (emmagisinée par le ressort et fournie par celui qui a tiré !).

Correction de l'exercice 4.
On obtient les résultats suivants :

(1) Le système admet une solution unique donnée par

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(2) Il y a au moins une équation redondante (et aucun couple d'équations contradictoires et aucune équation impossible) et le système admet un ensemble infini de solutions.

Correction de l'exercice 5.
On cherchera une solution particulière sous la forme $\widehat{y}(t) = Ke^{\gamma t}$ où K est un réel. On a

$$\widehat{y}'(t) = K\gamma e^{\gamma t},$$

et si on réinjecte $\widehat{y}$ et $\widehat{y}'$ dans l'équation différentielle de l'énoncé, on obtient

$$aK\gamma e^{\gamma t} + bKe^{\gamma t} = e^{\gamma t}$$

et donc

$$e^{\gamma t}(aK\gamma + bK - 1) = 0.$$

Comme $e^{\gamma t}$ est non nul, on a donc

$$aK\gamma + bK - 1 = 0$$

soit

$$K(a\gamma + b) = 1 \tag{6}$$

Puisque $a \neq 0$, nous avons deux cas possibles.

(1) Si

$$\gamma \neq -\frac{b}{a}. \tag{7}$$

alors, la seule solution de (6) est donnée par

$$K = \frac{1}{a\gamma + b}. \tag{8}$$

Ainsi, on a

$$\widehat{y}(t) = \frac{1}{a\gamma + b}e^{\gamma t}. \tag{9}$$

À cette solution particulière, il faut ajouter la générale de l'équation différentielle homogène associée, qui est

$$y_g(t) = ce^{-b/at} \tag{10}$$

où c est une constante. La solution est donc donnée par

$$y(t) = ce^{-\frac{b}{a}t} + \frac{1}{a\gamma + b}e^{\gamma t}, \tag{11}$$

c étant déterminée par la condition initiale.

(2) Si
$$\gamma = -\frac{b}{a}. \tag{12}$$
alors, (6) n'a pas de solution et la recherche de la solution particulière ne marche pas ici.

Proposons deux méthodes :

(a) On peut utiliser la méthode de la variation de la constante. On utilise (10) en supposant que c est une fonction. On a donc
$$y(t) = c(t)e^{-\frac{b}{a}t}, \tag{13}$$
et
$$y'(t) = c'(t)e^{-\frac{b}{a}t} - \frac{b}{a}c(t)e^{-\frac{b}{a}t}$$
et si on réinjecte dans l'équation différentielle, on a donc
$$e^{\gamma t} = e^{-\frac{b}{a}t} = ac'(t)e^{-\frac{b}{a}t} - a\frac{b}{a}c(t)e^{-\frac{b}{a}t} + bc(t)e^{-\frac{b}{a}t}$$
et donc
$$ac'(t)e^{-\frac{b}{a}t} = e^{-\frac{b}{a}t}$$
d'où
$$c'(t) = \frac{1}{a},$$
et
$$c(t) = \frac{t}{a} + c,$$
où c est une (vraie) constante. Ainsi, d'après (13), on a
$$y(t) = \left(\frac{t}{a} + c\right) e^{-\frac{b}{a}t}, \tag{14}$$
c étant déterminée par la condition initiale.

(b) On peut aussi rechercher une solution particulière $\widehat{y}(t) = (\alpha t + \beta)\, e^{\gamma t}$ où α et β sont deux réels. On a
$$\widehat{y}'(t) = (\gamma(\alpha t + \beta) + \alpha)\, e^{\gamma t},$$
et si on réinjecte $\widehat{y}$ et $\widehat{y}'$ dans l'équation différentielle de l'énoncé, on obtient
$$(a\gamma\alpha t + a\gamma\beta + a\alpha + b\alpha t + b\beta)\, e^{\gamma t} = e^{\gamma t}$$
et donc,
$$(\alpha t(a\gamma + b) + \beta(a\gamma + b) + a\alpha)\, e^{\gamma t} = e^{\gamma t}$$
et puisque $a\gamma + b = 0$ (d'après (12)), on a
$$(a\alpha)\, e^{\gamma t} = e^{\alpha t}$$
et donc
$$a\alpha = 1,$$
soit encore,
$$\alpha = \frac{1}{a}.$$
Ainsi, en choisissant β (non déterminé) nul, on a
$$\widehat{y}(t) = \frac{t}{a}e^{\gamma t} = \frac{t}{a}e^{-b/at},$$
et en y ajoutant la solution générale de l'EHA donnée par (10), on a
$$\widehat{y}(t) = \frac{t}{a}e^{-b/at} + ce^{-b/at},$$
et on retrouve donc (14).