Informatique 3A MFI Automne 2021

Corrigé de l'examen du 13 Décembre 2021

Correction de l'exercice 1.

(1) Si on considère un prix initial de x (en euro par exemple), après une première augmentation de $10\,\%$, le prix sera de
$$x' = (1 + 10/100)\,x = 1.100\,x.$$
Après une seconde augmentation de $15\,\%$, le prix sera de
$$x'' = (1 + 15/100)\,x' = (1 + 10/100)(1 + 15/100)\,x,$$
soit de
$$x'' = 1.265\,x,$$
ce qui est différent du prix résultant d'une augmentation de $25\,\%$ qui donnerait
$$y = (1 + 25/100)\,x = 1.250\,x.$$
L'affirmation est donc fausse.

(2) Cette approximation est "à peu près vraie" si les augmentations sont faibles [1]. Par exemple, imaginons une augmentation de $1\,\%$ suivie d'une augmentation de $2\,\%$, ce qui donnerait un prix final de
$$x'' = (1 + 1/100)(1 + 2/100)\,x = 1.0302000\,x,$$
proche d'une augmentation de $3\,\%$ qui donnerait
$$y = (1 + 3/100)\,x = 1.0300000\,x.$$
De façon plus générale, après une première augmentation de $n_1\%$, le prix sera de
$$x' = (1 + n_1/100)\,x.$$
Après une seconde augmentation de $n_2\,\%$, le prix sera de
$$x'' = \left(1 + \frac{n_1}{100}\right)\left(1 + \frac{n_2}{100}\right) x = \left(1 + \frac{n_1 + n_2}{100} + \frac{n_1 n_2}{10000}\right) x.$$
Une augmentation de $n_1 + n_2\%$ donnera un prix égal à
$$y = \left(1 + \frac{n_1 + n_2}{100}\right) x,$$
et on a
$$\frac{x''}{y} = \frac{1 + \dfrac{n_1 + n_2}{100} + \dfrac{n_1 n_2}{10000}}{1 + \dfrac{n_1 + n_2}{100}},$$
qui tend vers un si n_1 et n_2 tendent vers zéro. On peut aussi écrire, si n_1 et n_2 sont "petits" devant un que le terme quadratique $\frac{n_1 n_2}{10000}$ est négligeable devant le terme linéaire $\frac{n_1+n_2}{100}$ et donc que
$$x'' = \left(1 + \frac{n_1 + n_2}{100} + \frac{n_1 n_2}{10000}\right) x \approx \left(1 + \frac{n_1 + n_2}{100}\right) x = y.$$

1. ce qui n'est plus le cas pour le gaz !

Correction de l'exercice 2.
On écrit, grâce aux formules de l'annexe A du cours, le développement limité de cos en zéro à l'ordre 4 :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - o\left(x^4\right).$$

et donc

$$\cos x = 1 + u,$$

où

$$u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - o\left(x^4\right),$$

qui tend vers zéro quand x tend vers zéro. On écrit, ensuite grâce aux formules de l'annexe A du cours, le développement limité de $\ln(1+u)$ en zéro à l'ordre 4 :

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + o\left(u^4\right)$$

Remplaçons u par son expression en fonction de x :

$$\ln(1+u) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - o\left(x^4\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - o\left(x^4\right)\right)^2 + \frac{1}{3}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - o\left(x^4\right)\right)^3 - \frac{1}{4}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - o\left(x^4\right)\right)^4.$$

On calcule le terme quadratique $-\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - o\left(x^4\right)\right)^2$ en ne conservant que l'unique terme d'ordre inférieur à 4 :

$$-\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - o\left(x^4\right)\right)^2 = -\frac{x^4}{8}$$

Les autres termes (de puissance 3 et 4) ne contiennent que des termes d'ordre supérieurs à 5 et donc

$$\ln(\cos(x)) = \ln(1+u) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + o\left(u^4\right),$$

et donc

$$\ln(\cos(x)) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o\left(u^4\right),$$

qui ne contient bien que des termes pairs puisque la fonction étudiée est paire.
Vérifions cela avec matlab. On obtient bien en tapant

```
syms x;
pretty(taylor(log(cos(x)),5));
```

$$\ln(\cos(x)) = -1/2\, x^2 - 1/12\, x^4 + o\left(x^3\right).$$

Correction de l'exercice 3.

(1) La dérivée de f

$$\forall x > 0, \quad f(x) = \ln(x) - x,$$

est donnée par

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x},$$

strictement positive sur $]0,1[$ et strictement positive sur $]1,+\infty[$. f est donc strictement croissante sur $]0,1[$ et strictement décroissante sur $]1,+\infty[$. On a $f(0+) = -\infty$, $f(1) = -1$ et $f(+\infty) = -\infty$.

Le graphique de f est représenté sur la figure 1 page ci-contre.

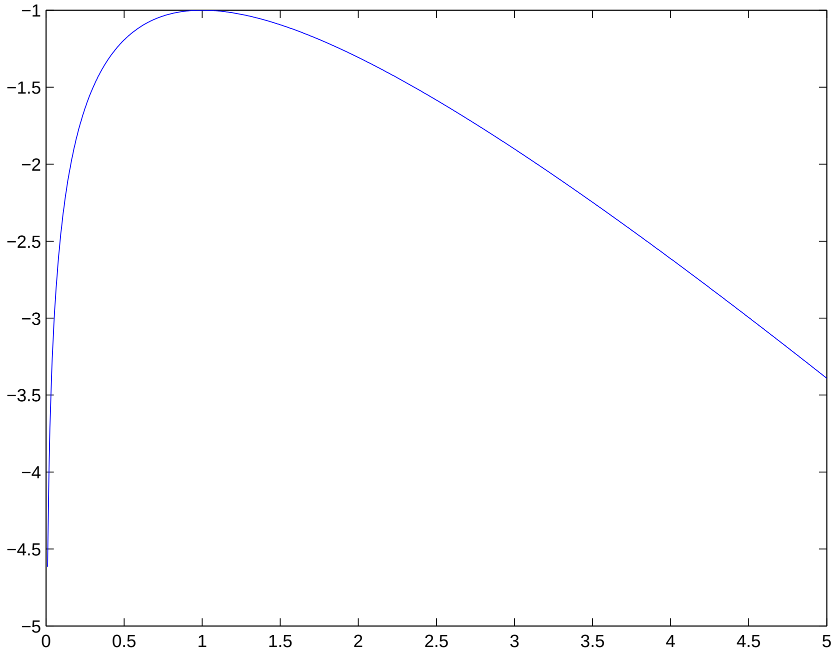


FIGURE 1. Le graphe de f.

(2) (a) On a, pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = e^x - 1,$$

et donc f' est strictement négative sur $\mathbb{R}_-^*$ et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$ valent $+\infty$ et $+\infty$. Enfin, $f(0) = 0$. Tout cela permet de dresser le tableau de variation de f.

Voir le graphique 2.

(b) (i)

Voir le graphique 3.

(ii) On a $\exp'(0) = 1$ et d'après l'équation (1.11) du cours, la tangente a pour équation $y = x + 1$.

(iii) Le minimum de f sur $\mathbb{R}$ est nul et donc f est positive sur $\mathbb{R}$, ce qui signifie, que pour tout x, $e^x \geq x + 1$ et donc que la courbe representatrice de l'exponentielle est au-dessus de la tangente.

Correction de l'exercice 4.

(1) D'après le cours, la solution de l'équation différentielle (1) de l'énoncé est donnée par

$$y(t) = Ce^{kt}. \tag{1}$$

où la constante C est déterminée par la condition initiale (1b) de l'énoncé qui donne

$$y_0 = Ce^{kt_0},$$

ce qui donne donc grâce à (1) :

$$y(t) = y_0 \frac{e^{kt}}{e^{kt_0}},$$

et donc

$$\forall y \geq 0, \quad y(t) = y_0 e^{k(t-t_0)}. \tag{2}$$

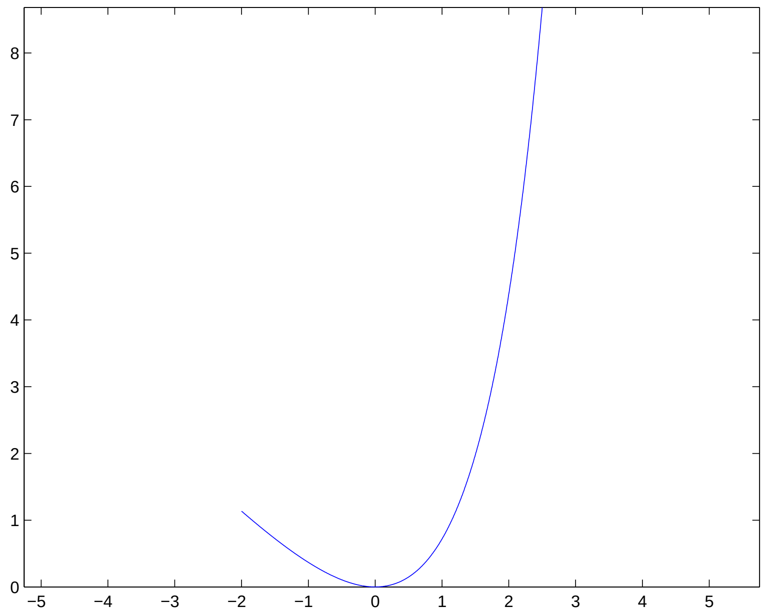


FIGURE 2. La courbe de f.

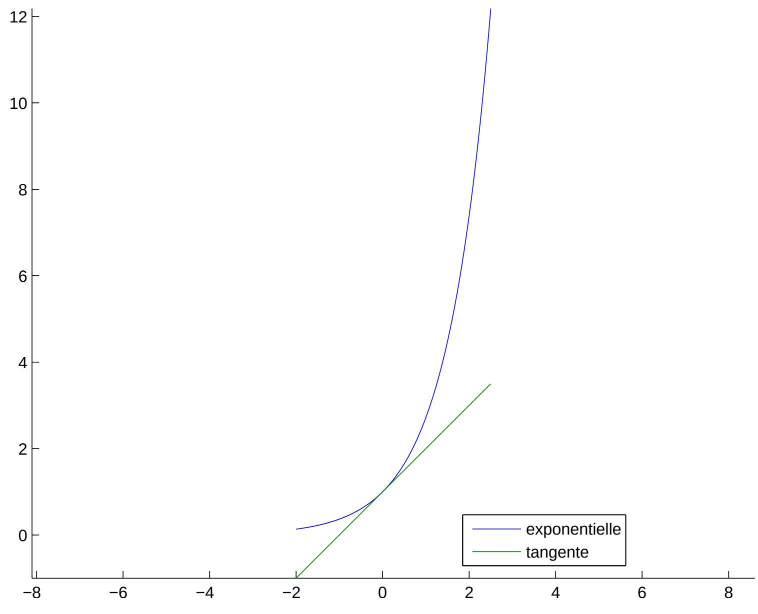


FIGURE 3. La courbe de l'exponentielle et sa tangente au point $x = 0$.

(2) Il suffit de raisonner par équivalence successive. Si y est donnée par l'équation (2), alors, puisque $y_0 > 0$, $y(t)$ est strictement positif pour tout t et on a les équivalences successives suivantes :

$$\begin{aligned}
\forall t \geq t_0, \quad y(t+\tau) = \alpha y(t) &\Longleftrightarrow \forall t \geq t_0, \quad \frac{y(t+\tau)}{y(t)} = \alpha, \\
&\Longleftrightarrow \forall t \geq t_0, \quad \frac{y_0 e^{k(t+\tau-t_0)}}{y_0 e^{k(t-t_0)}} = \alpha, \\
&\Longleftrightarrow \forall t \geq t_0, \quad e^{k\tau} = \alpha, \\
&\Longleftrightarrow e^{k\tau} = \alpha,
\end{aligned}$$

ce qui est bien équivalent à (puisque α est strictement positif) à

$$k\tau = \ln \alpha. \tag{3}$$

Remarque 1. Souvent, on choisit la valeur de $\alpha = 1/2$: on parle alors de "demi-vie". Dans ce cas, on a, d'après (3), la demi-vie correspond au temps que met la quantité y pour être divisée par deux et vaut :

$$\tau = -\frac{\ln 2}{k}, \tag{4}$$

et dans ce cas k est strictement négatif. Dans le cas où $\alpha = 2$, on parlera de "double-vie" ! Dans ce cas, d'après (3), la double-vie correspond au temps que met la quantité y pour être multipliée par deux et vaut :

$$\tau = \frac{\ln 2}{k}, \tag{5}$$

et dans ce cas k est strictement positif.

Voir question 4c.

(3) Il suffit d'écrire, que pour $x > 0$, on a successivement

$$\begin{aligned}
y = \ln_a(x) &\Longleftrightarrow y = \frac{\ln x}{\ln a}, \\
&\Longleftrightarrow y \ln a = \ln x, \\
&\Longleftrightarrow e^{y \ln a} = x, \\
&\Longleftrightarrow x = a^y.
\end{aligned}$$

(4) (a)

Prenons le logarithme de l'égalité (2) (ce qui est légitime car y_0 et y sont strictement positives), ce qui fournit, pour tout t :

$$\begin{aligned}
\ln(y(t)) &= \ln\left(y_0 e^{k(t-t_0)}\right), \\
&= \ln\left(e^{k(t-t_0)}\right) + \ln(y_0),
\end{aligned}$$

et donc

$$\forall t \geq t_0, \quad \ln(y(t)) = kt - kt_0 + \ln(y_0), \tag{6}$$

et donc en divisant par $\ln(10)$:

$$\forall t \geq t_0, \quad \ln_{10}(y(t)) = \frac{kt - kt_0}{\ln(10)} + \ln_{10}(y_0). \tag{7}$$

Ainsi, il vient en évaluant en t_i

$$\forall i \in \{1, ..., N\}, \quad \ln_{10}(y(t_i)) = At_i + B, \tag{8}$$

avec

$$A = \frac{k}{\ln(10)}, \tag{9a}$$

$$B = \frac{-kt_0 + \ln(y_0)}{\ln(10)}. \tag{9b}$$

(9c)

Ainsi, d'après l'équation (4) de l'énoncé, il vient

$$\forall i \in \{1, ..., N\}, \quad Z_i = At_i + B. \tag{10}$$

(b)

Il suffit alors de tracer le nuage de points de coordonnées $(t_i, Z_i)_{1\leq i\leq N}$, d'en mesurer la pente A et d'en déduire la valeur de k, puis de τ, grâce à (3) et (9a) qui donnent

$$\tau = \frac{\ln \alpha}{k} = \ln \alpha \times \frac{1}{A \ln(10)}$$

et donc

$$\tau = \frac{\ln_{10} \alpha}{A}. \tag{11}$$

(c)

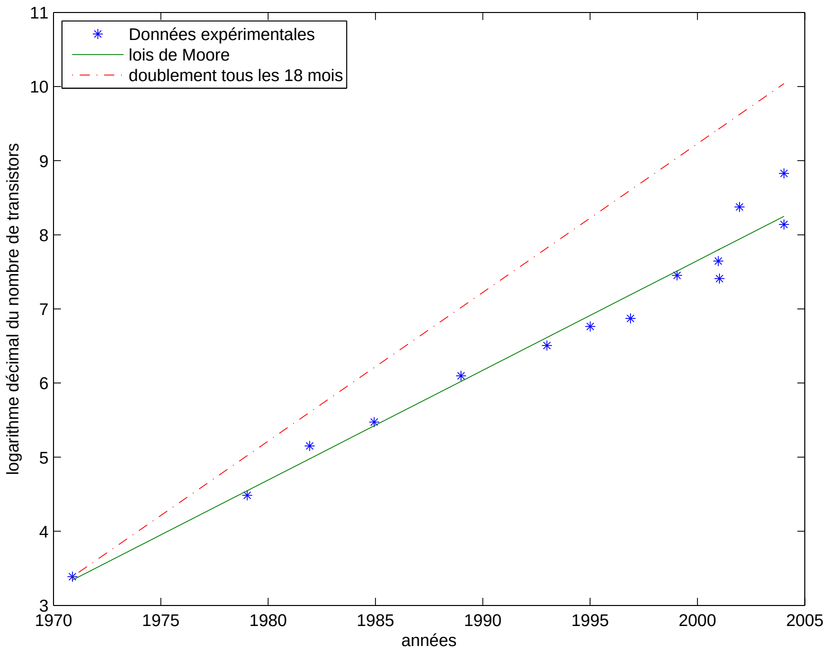


FIGURE 4. Le tracé du nuage de points $(t_i, Z_i)_{1\leq i\leq N}$.

Voir sur le site habituel la fonction `trace_graphique.m` et les fichiers de données `data1.mat` et `data2.mat` (tous donnés dans le fichiers `examcorMFI_IIA21.zip`). Si on fait un tracé des données du tableau 9a de l'énoncé, on obtient la figure 4. On constate sur ce graphique que la pente (déterminée ici avec matlab, ce qu'on peut aussi obtenir avec une caculatrice ou par mesure graphique) vaut

$$A = 0.1481,$$

avec une corrélation égale à

$$r = 0.9856, \tag{12}$$

proche de 1. Cela donne d'après la formule (11) une valeur de τ égale à

$$\tau = 2.0327, \tag{13}$$

ce qui fournit, en année, le temps de doublement de la grandeur étudiée. Cela correspond donc environ à

$$\text{un doublement du nombre de transistors environ tous les deux ans.} \tag{14}$$

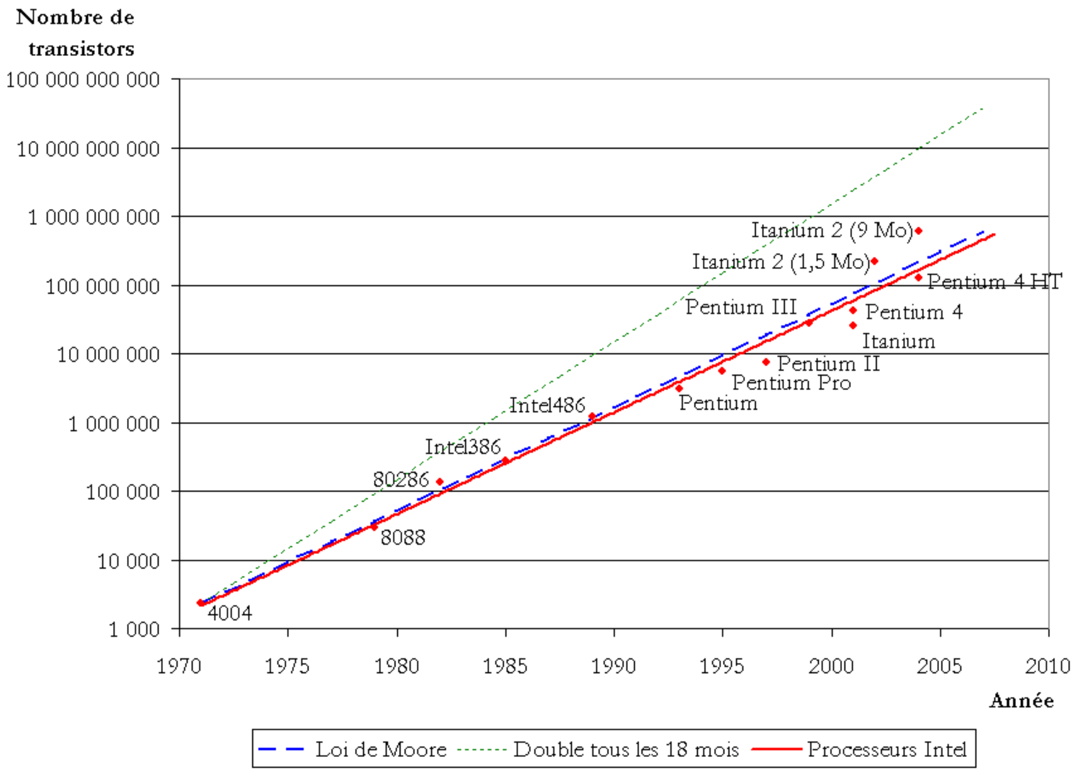


FIGURE 5. Le graphique originel issu de `http://fr.wikipedia.org/wiki/Loi_de_Moore`.

Le graphique originel issu de `http://fr.wikipedia.org/wiki/Loi_de_Moore` est donné sur la figure 5.

On peut aussi tracer un graphique proche de celui de la figure 4 en traçant les données $(t_i, y(t_i))_{1\leq i\leq N}$ avec un graphique semi-logarithmique en ordonnées comme le montre la figure 6.

Sur la figure 7, on a donné les trois graphiques correspondant à un jeu de données plus riche. Pour ces données, on obtient une pente égale à

$$A = 0.1523,$$

avec une corrélation égale à

$$r = 0.9787, \tag{15}$$

proche de 1. Cela donne d'après la formule (11) une valeur de τ égale à

$$\tau = 1.9760, \tag{16}$$

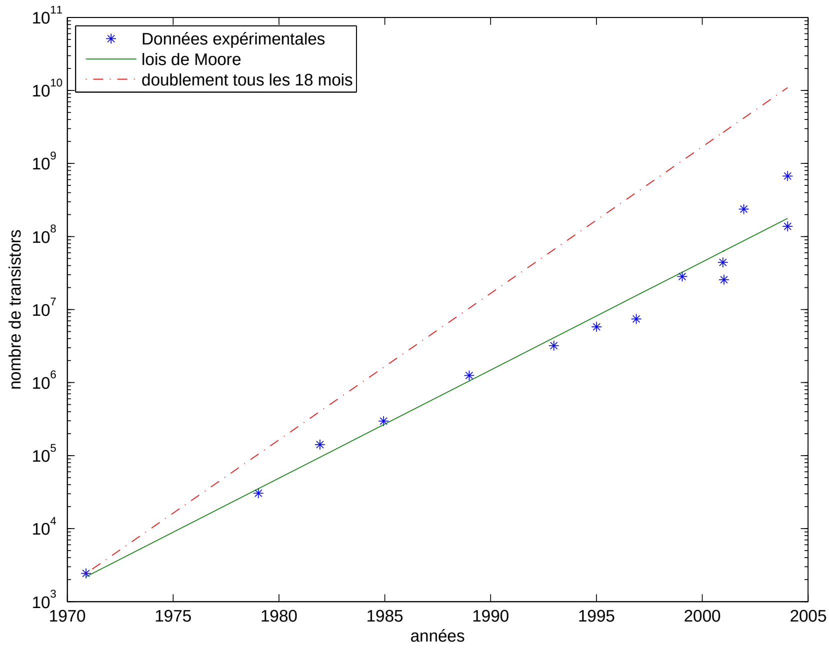


FIGURE 6. Le tracé du nuage de points semi-logarithmique en ordonnées $(t_i, y(t_i))_{1\leq i\leq N}$.

ce qui fournit, en année, le temps de doublement de la grandeur étudiée. Cela correspond donc environ de nouveau de nouveau à (14).

Remarque 2. Cette observation de cette loi, dite de Moore, n'est qu'empirique. Nous n'avons pas montré que le nombre de transistors au cours du temps, $y(t)$ obséisait à l'équation différentielle (1) de l'enoncé ou à (2) (équivalent). La loi (2), encore équivalent à (6) ou à (7), implique (8), dont on a mesuré expérimentalement la justesse, grâce aux valeurs des corrélations données par (12) et (15), dont les valeurs proches de un confirme l'alignement des points et donc (7). On a aussi mesuré expérimentalement la valeur de τ, approchée par (14).

(d)

Si on veut une droite correspondant à un doublement tous les 18 mois, on considère τ' donné en années par

$$\tau' = \frac{18}{12}. \tag{17}$$

Dans ce cas, pour $\alpha = 2$, l'équation (3) fournit la valeur de k' donnée par

$$k' = \frac{\ln \alpha}{\tau},$$

soit numériquement

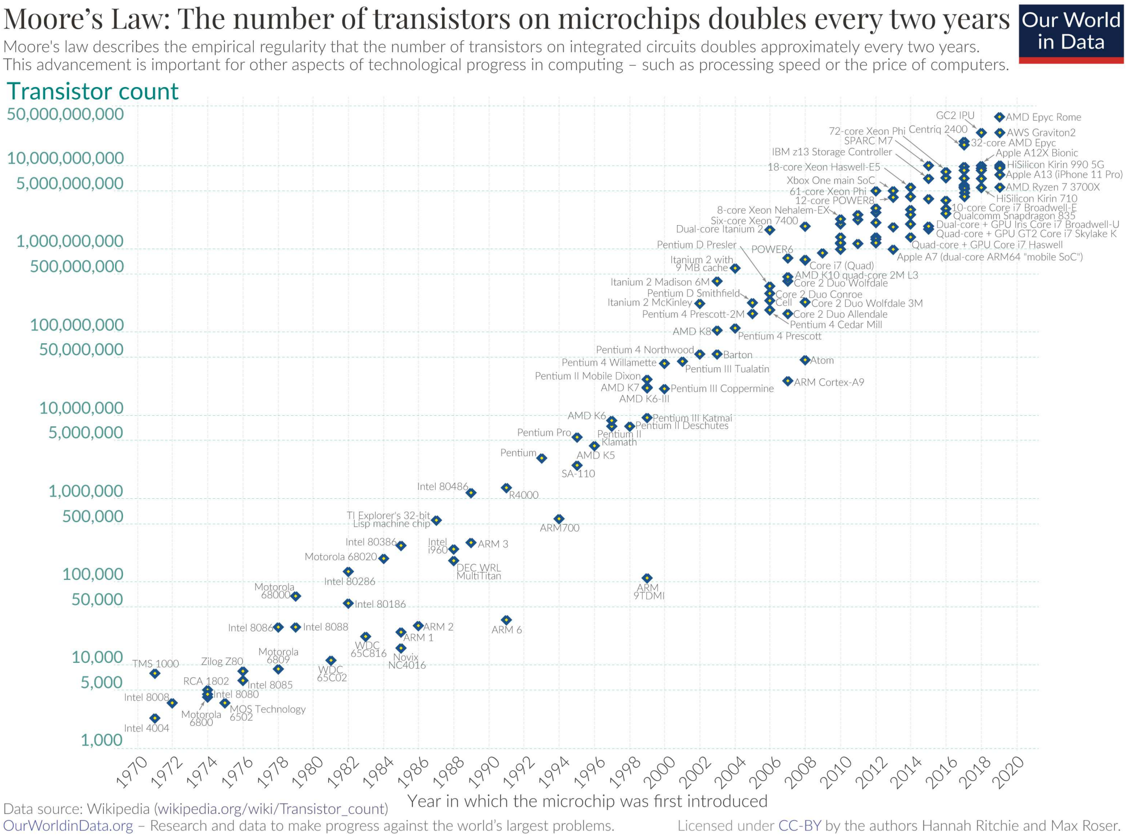
$$k' = 0.4621. \tag{18}$$

Pour cette valeur de k', l'équation (7) donne donc l'équation

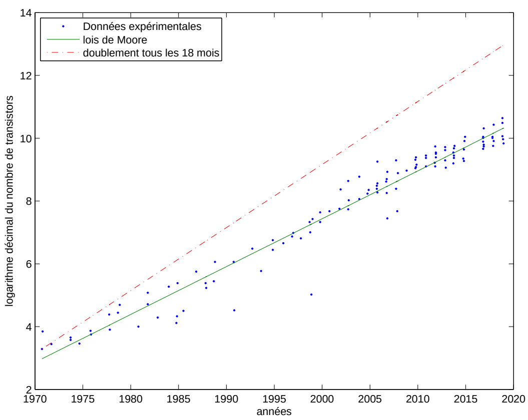
$$\forall t \geq t_0, \quad \ln_{10}(y(t)) = \frac{kt - kt_0}{\ln(10)} + \ln_{10}(y_0),$$

ce qui donne donc en évaluant à tous les instant t_i, grâce à (9) et (10) :

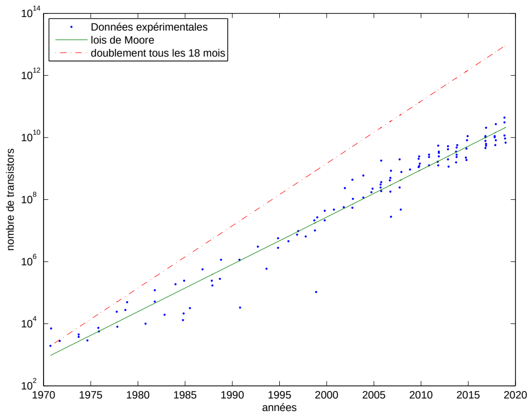
$$\forall i \in \{1, ..., N\}, \quad Z_i = A't_i + B',$$



(a) Graphique initial



(b) Le tracé du nuage de points $(t_i, Z_i)_{1\leq i\leq N}$.



(c) Le tracé du nuage de points semi-logarithmique en ordonnées $(t_i, y(t_i))_{1\leq i\leq N}$.

Figure 7. Les trois graphiques correspondant à un jeu de données plus riche.

avec

$$A' = \frac{k'}{\ln(10)}, \tag{19a}$$

$$B' = \frac{-kt_0 + \ln(y_0)}{\ln(10)}. \tag{19b}$$

(19c)

Si on choisit $t_0 = t_1$ et $Z_0 = Z_1$ (donnés grâce au tableau 1 de l'énoncé), ce qui assurera qu'elle passera par le point de coordonnées (t_1, Z_1) on aura donc l'équation de droite :

$$\forall i \in \{1, ..., N\}, \quad Z = A'(t - t_1) + Z_1. \tag{20}$$

Cette droite pouvait être tracée sur votre graphiquement, puisqu'elle passe par le point de coordonnées (t_1, Z_1) et de pente donnée par (18) et (19a). Cette droite a été représentée sur les graphiques précédents, sur lesquels, on constate qu'elle passe bien au dessus du nuage de points. Pourtant cette "lois de Moore" affirme qu'"Entre 1965 et 2017, le nombre de transistors par puce de silicium a doublé à peu près tous les 18 mois à coût constant, comme l'avait prédit Gordon E. Moore, l'un des trois fondateurs d'Intel", ce qui est couramment et donc faussement déclaré. La vraie lois de Moore correspond à un doublement environ tous les deux ans, comme on vient de le constater à deux reprises. Plus de détails sur cette loid de Moore, qui n'est qu'empirique sur `http://fr.wikipedia.org/wiki/Loi_de_Moore` et la fin de cette loi, due à un changement de technologie : `http://www.usinenouvelle.com/article/la-loi-de-moore-est-morte-vive-la-loi-de-huang.N1010424` et `http://www.zdnet.fr/actualites/la-loi-de-moore-est-morte-encore-une-fois-et-pour-de-bon-39879081.htm`.

(5) (a) Nous avons vu dans la question 2 que l'équation différentielle de l'énoncé (1) (qui est équivalent à (2)) implique

$$\forall t \geq t_0, \quad y(t + \tau) = \alpha y(t), \tag{21}$$

elle-même équivalente, dans ce cas, à (3). La question se pose de savoir si (21) implique l'équation différentielle de l'énoncé (1) (ou (2)), ce qui n'est pas le cas, comme nous allons le voir plus bas.

Pour toute la suite, on considère la fonction z définie par

$$\forall t \geq t_0, \quad z(t) = \ln(y(t)). \tag{22}$$

Remarquons maintenant que l'équation différentielle de l'énoncé (1) (ou (2)) est équivalent (voir question 3) à (6) soit encore

$$\forall t \geq t_0, \quad z(t) = kt + \beta, \tag{23}$$

avec

$$\beta = \ln(y_0) - kt_0. \tag{24}$$

Si (1) (ou (2)) a lieu, on a alors d'après (23)

$$\forall t \geq t_0, \quad g(t + \tau) = k(t + \tau) + \beta,$$

soit, en faisant l'hypothèse que (3) a lieu :

$$\forall t \geq t_0, \quad g(t + \tau) = k(t + \tau) + \beta = kt + \beta + k\tau,$$

et donc

$$\forall t \geq t_0, \quad g(t + \tau) = g(t) + \ln \alpha. \tag{25}$$

On a donc vu que l'équation différentielle de l'énoncé (1) (ou (2)) implique (25) (équivalent à (21)) et (3). Se pose maintenant la question de savoir si (25) (équivalent à (21)) et (3) impliquent (1) (ou (2)).

Nous allons montrer que cette équivalence a lieu, à condition de considérer une condition suffisante supplémentaire. Cela nous montrera donc l'absence d'équivalence et nous fournira cette condition supplémentaire.

(b) Supposons que g soit connue et quelconque sur l'intervalle $[t_0, t_0 + \tau[$ et que (25) aie lieu. Dans ce cas, on définit g sur $[t_0 + \tau, t_0 + 2\tau[$ en posant, grâce à (25) :

$$\forall t \in [t_0, t_0 + \tau[, \quad g(t + \tau) = g(t) + \ln \alpha.$$

On définit alors g sur $[t_0+2\tau, t_0+3\tau[$ en posant

$$\forall t \in [t_0+\tau, t_0+2\tau[, \quad g(t+\tau) = g(t) + \ln\alpha.$$

Ensuite, on définit g sur $[t_0, +\infty[$, en définissant g par récurrence n sur $[t_0+n\tau, t_0+(n+1)\tau[$ en supposant g soit connue et quelconque sur l'intervalle $[t_0, t_0+\tau[$ et en posant pour n donné, grâce à (25) :

$$\forall t \in [t_0+n\tau, t_0+(n+1)\tau[, \quad g(t+\tau) = g(t) + \ln\alpha. \tag{26}$$

Dans ce cas, (25) a bien lieu. Pour que l'équation différentielle de l'énoncé (1) (ou (2)) ait lieu, aussi équivalent à (23), il suffit donc, d'après ce qui précède que (23) aie lieu sur $[t_0, t_0+\tau[$ soit encore

$$\forall t \in [t_0, t_0+\tau[, \quad z(t) = kt + \beta. \tag{27}$$

On revient à y en posant alors

$$\forall t \geq t_0, \quad y(t) = e^{z(t)}, \tag{28}$$

et l'équation différentielle de l'énoncé (1) (ou (2)) ont lieu si on considère k défini par (4) puis y_0 défini par (24).

Cette condition n'est pas très naturelle. Proposons-en une autre.

On a montré que si (1) (ou (2)) et (3) avaient lieu, on en déduisait (25), équivalent à (21). Calculons de même $g(t+\tau/2)$: comme précédemment, on écrit, en faisant l'hypothèse que (3) a lieu :

$$g(t+\tau/2) = kt/2 + \beta + k\tau,$$

et donc

$$\forall t \geq t_0, \quad g(t+\tau/2) = g(t) + (\ln\alpha)/2.$$

On vérifie de même que

$$\forall t \geq t_0, \quad g(t+\tau/2^2) = g(t) + (\ln\alpha)/2^2;$$

et une récurrence immédiate sur n nous montre que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \geq t_0, \quad g(t+\tau/2^n) = g(t) + (\ln\alpha)/2^n. \tag{29}$$

En reprenant l'exponentielle cette expression, on constate qu'elle est équivalente à

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \geq t_0, \quad y(t+\tau/2^n) = \sqrt[2^n]{\alpha}\, y(t).$$

ce qui implique

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in [t_0, t_0+\tau[, \quad y(t+\tau/2^n) = \sqrt[2^n]{\alpha}\, y(t). \tag{30}$$

Cette condition est bien une condition nécessaire à l'équation différentielle de l'énoncé (1) (ou (2)). Réciproquement, supposons qu'elle aie lieu avec (25). Dans ce cas, on a en particulier

$$g(t_0+\tau) = g(t_0) + \ln\alpha.$$

On a aussi

$$g(t_0+\tau/2) = g(t_0) + (\ln\alpha)/2,$$

puis

$$g(t_0+\tau/4) = g(t_0) + (\ln\alpha)/4,$$

et

$$g(t_0+3\tau/4) = g(t_0+\tau/2+\tau/4) = g(t_0+\tau/2) + (\ln\alpha)/2^2, = g(t_0) + (\ln\alpha)/2 + (\ln\alpha)/4$$

et donc

$$g(t_0+3\tau/4) = g(t_0) + (3/4)(\ln\alpha).$$

On démontre ensuite par récurrence sur n que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall k \in \{0, ..., 2^n - 1\}, \quad g(t_0 + (k/2^n)\tau) = g(t_0) + (k/2^n) \ln \alpha. \tag{31}$$

Si on suppose g (donc y) continue sur $[t_0, t_0+\tau[$, l'ensemble des points $\{k/2^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \leq 2^n - 1\}$ étant dense dans $[0,1[$, on déduit de (31) que

$$\forall x \in [0,1[, \quad g(t_0 + x\tau) = g(t_0) + x \ln \alpha,$$

ce qui est équivalent à

$$\forall t \in [0,\tau[, \quad g(t_0 + t) = g(t_0) + t \ln \alpha / \tau.$$

Si on fait l'hypothèse (3), c'est donc équivalent à

$$\forall t \in [0,\tau[, \quad g(t_0 + t) = g(t_0) + kt, \tag{32}$$

et on retrouve bien, grâce à (24), l'équation (27). Bref, une condition suffisante pour que l'équation différentielle de l'énoncé (1) (ou (2)) aie lieu, il suffit d'avoir (25), d'imposer y continue sur $[t_0, t_0+\tau[$, d'imposer (30), puis on considère k défini par (4) puis y_0 défini par (24).

Correction de l'exercice 5.
Cet exercice était presque une question de cours.
En cours de rédation
Rappelons ici les éléments de cours nécessaires, ici du polycopié de cours.

Suites arithmétiques, géométriques et arithmético-géométrique

Suites arithmétiques

En cours de rédaction
Voir `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MFI/complementscannes/suite_arithmetique.pdf`
Le calcul de la somme des termes d'une suite arithmétique est fondé sur ce qui suit :
Montrons le résultat suivant

Lemme 3. *Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la somme*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k, \tag{33}$$

de n premiers entiers est égale à

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{34}$$

Remarque 4. Notons que l'on aussi

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^{n} k. \tag{35}$$

Nous en proposons plusieurs preuves.

Démonstration du lemme 3.

(1)

Donnons une première preuve, "graphique".

Sur la figure 8, issue du site `http://www.mathkang.org`[2], on constate que le rectangle, de cotés n et $n+1$, contient deux fois la somme S_n. Il vient donc

$$2S_n = n(n+1).$$

2. voir `http://www.mathkang.org/concours/pdf/Affiche_Sommes_entiers.pdf`

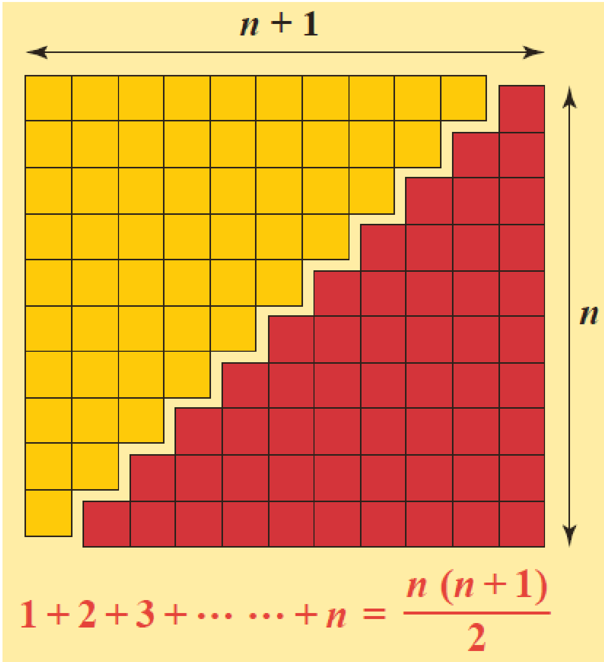


FIGURE 8. Somme des n premiers entiers.

et donc (34) est "montrée".

Montrons maintenant cela rigoureusement.

(2)

On peut, démontrer cette formule par récurrence sur n, mais cela ne permet pas de retrouver la formule. Démontrons-là tout de même. Pour $n = 1$, (34) est immédiate car $S_1 = 1$ et $\frac{1(1+1)}{2} = 1$. Supposons (34) vraie pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrons-là pour $n+1$. On a successivement

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} k, \\ &= \sum_{k=1}^{n} k + n + 1, \end{aligned}$$

et d'après l'hypothèse de récurrence ((34) à l'ordre n)

$$\begin{aligned} &= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1, \\ &= \frac{1}{2}\left(n(n+1) + 2(n+1)\right), \\ &= \frac{n+1}{2}\left(n+2)\right), \end{aligned}$$

ce qui est bien (34) à l'ordre $n+1$.

(3)

On peut écrire aussi, ce qu'a fait le petit Gauss à cinq ans (et qui est un fait fondé implicitement sur la méthode du point 1) :

$$\begin{aligned} S_n &= 1+2+\ldots+(n-1)+n, \\ S_n &= n+(n-1)+\ldots+2+1, \end{aligned}$$

et en sommant terme à terme :

$$\begin{aligned} 2S_n &= (1+n)+(2+n-1)+\ldots+(n-1+2)+(n+1), \\ &= \underbrace{(n+1)+(n+1)+\ldots+(n+1)+(n+1)}_{n \text{ termes égaux à } n+1}, \\ &= n(n+1), \end{aligned}$$

et on retrouve (34).

(4)

Pour être un tout petit plus rigoureux, on peut aussi écrire (ce qui n'est qu'une formalisation de la méthode du point 3) :

$$2S_n = \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} k,$$

dans la seconde somme, on pose $k' = n-k+1$:

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k'=n}^{1} n-k'+1, \\ &= \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} n-k+1, \\ &= \sum_{k=1}^{n} (k+n-k+1), \\ &= \sum_{k=1}^{n} (n+1), \\ &= (n+1)\sum_{k=1}^{n} 1, \\ &= (n+1)n. \end{aligned}$$

(5)

Donnons, pour finir, deux autres méthodes qui ont l'avantage de pouvoir se généraliser au calcul de

$$S_n^p = \sum_{k=1}^{n} k^p, \tag{36}$$

pour tout entier p.

(a) Présentons tout d'abord le principe général du calcul de S_n^p.

(i) On cherche P un polynôme de degré $Q+1$ tel que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(k+1)-P(k) = k^Q. \tag{37}$$

On montre que cela mène à un système linéaire triangulaire donnant les tous les coefficients de P sauf le coefficient constant que l'on peut prendre nul. Sommant (37) pour $k=0$ à $k=n$, il vient par somme télescopique

$$P(n+1)-P(0)=\sum_{k=0}^{n} k^Q=\sum_{k=1}^{n} k^Q,$$

ce qui permet d'expliciter, après factorisation, la somme souhaitée.

(ii) On écrit par somme téléscopique

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^{Q+1}-k^{Q+1}=(n+1)^{Q+1}-1.$$

On développe le terme de gauche[3] :

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=0}^{Q+1} C_{Q+1}^{l} k^l-k^{Q+1}=(n+1)^{Q+1}-1,$$

et donc

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=0}^{Q} C_{Q+1}^{l} k^l+k^{Q+1}-k^{Q+1}=(n+1)^{Q+1}-1,$$

et donc

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=0}^{Q} C_{Q+1}^{l} k^l=(n+1)^{Q+1}-1,$$

ce qui est finalement équivalent à

$$\sum_{l=0}^{Q} C_{Q+1}^{l}\sum_{k=1}^{n} k^l=(n+1)^{Q+1}-1.$$

On a donc

$$C_{Q+1}^{Q}\sum_{k=1}^{n} k^Q=-\sum_{l=0}^{Q-1} C_{Q+1}^{l}\sum_{k=1}^{n} k^l+(n+1)^{Q+1}-1. \tag{38}$$

On utilise (38) pour $Q=1$, ce qui permet de calculer $\sum_{k=1}^{n} k$, puis (38) pour $Q=2$, ce qui permet de calculer $\sum_{k=1}^{n} k^2$, en fonction de $\sum_{k=1}^{n} k$ et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on calcule $\sum_{k=1}^{n} k^Q$, en fonction de $\sum_{k=1}^{n} k^{Q-1}$, $\sum_{k=1}^{n} k^{Q-2}$, ..., $\sum_{k=1}^{n} k$.

Remarque 5. La somme peut s'expliciter totalement, d'après par exemple avec la Formule de Faulhaber. Voir `https://fr.wikipedia.org/wiki/Formule_de_Faulhaber`. Mieux ; cette somme s'explicite totalement grâce aux polynômes de Bernoulli. Voir par exemple [Bas21, Annexe "Quelques calculs explicites de Séries"].

(b) Détaillons maintenant cela dans le cas où $Q=1$.

(i) On cherche P un polynôme de degré 2 tel que

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad P(k+1)-P(k)=k. \tag{39}$$

Si on pose

$$P(x)=ax^2+bx+c,$$

3. Attention, je note "à l'ancienne" C_{Q+1}^{l} au lieu de $\binom{Q+1}{l}$

alors, pour tout entier k :

$$\begin{aligned} P(k+1)-P(k) &= a(k+1)^2+b(k+1)+c-ak^2-bk-c, \\ &= ak^2+2ak+a+bk+b+c-ak^2-bk-c, \\ &= 2ak+a+b, \end{aligned}$$

et donc (39) est équivalente à

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad 2ak+a+b=k$$

soit

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad k(2a-1)+a+b=0.$$

Le polynôme en k : $k(2a-1)+a+b$ a une infinité de racine et il est nul ce qui est donc équivalent au système linéaire triangulaire suivant

$$\begin{cases} 2a-1=0, \\ a+b=0 \end{cases}$$

ce qui donne $a=1/2$ puis $b=-a=-1/2$. c n'étant pas déterminé, on le choisit nul et on a donc

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(k)=\frac{k}{2}\left(k-1\right). \tag{40}$$

Sommant (39) pour $k=0$ à $k=n$, il vient par somme télescopique

$$P(n+1)-P(0)=\sum_{k=0}^{n} k^Q=\sum_{k=1}^{n} k,$$

et donc, d'après (40) :

$$\frac{n+1}{2}\left(n+1-1\right)=\sum_{k=1}^{n} k,$$

ce qui est bien (34)

(ii) On écrit par somme téléscopique

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^2-k^2=(n+1)^2-1.$$

On développe le terme de gauche :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2+2k+1-k^2=(n+1)^2-1,$$

et donc

$$\sum_{k=1}^{n} 2k+1=(n+1)^2-1,$$

et donc

$$2\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)+\left(\sum_{k=1}^{n} 1\right)=(n+1)^2-1,$$

et donc

$$2S_n+n=(n+1)^2-1,$$

ce qui est finalement équivalent à

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2}\left((n+1)^2 - 1 - n\right), \\ &= \frac{n+1}{2}\left(n+1-1\right), \\ &= \frac{n+1}{2}\left(n\right), \end{aligned}$$

ce qui est bien de nouveau (34)

□

Suites géométriques

En cours de rédaction
Voir `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MFI/complementscannes/suite_geometrique.pdf`
Le calcul de la somme des termes d'une suite géometrique ce qui suit :
Montrons le résultat suivant

Lemme 6. *Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et pour tout réel x, la somme (où on a posé par convention ici $0^0 = 1$)*

$$S_n = 1 + x + x^2 + ... + x^n = \sum_{k=0}^{n} k, \tag{41}$$

est égale à

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}, & si\ x \neq 1, \\ n+1, & si\ x = 1. \end{cases} \tag{42}$$

Nous en proposons plusieurs preuves.

Démonstration.

(1)
- Si $x = 1$, il est immédiat que $S_n = n + 1$ ($n + 1$ termes égaux à 1).
- Sinon, on a

$$\begin{aligned} S_n = {} & 1 + x + x^2 + ... + x^n, \\ xS_n = {} & x + x^2 + ... + x^n + x^{n+1}, \end{aligned}$$

et par différence, tous les termes x, x^2, ... à x^n disparaissant :

$$xS_n - S_n = x^{n+1} - 1,$$

dont on déduit (42).

(2) Une autre façon de faire, presque équivalente en fait, dans le cas où $x \neq 1$, consiste à utiliser la formule

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \forall p \in \mathbb{N}^*,$$

$$a^p - b^p = (a-b)\left(a^{p-1} + a^{p-2}b + a^{p-3}b^2 + ... + a^2b^{p-3} + ab^{p-2} + b^{p-1}\right) = (a-b)\left(\sum_{k=0}^{p-1} a^{p-1-k}b^k\right). \tag{43}$$

Elle se montre en développant le terme de droite, qui se simplifie de nouveau, par somme téléscopique :

$$\begin{aligned}
(a-b)\left(\sum_{k=0}^{p-1} a^{p-1-k}b^k\right) &= a\left(\sum_{k=0}^{p-1} a^{p-1-k}b^k\right) - b\left(\sum_{k=0}^{p-1} a^{p-1-k}b^k\right),\\
&= \sum_{k=0}^{p-1} a^{p-k}b^k - \sum_{k=0}^{p-1} a^{p-1-k}b^{k+1},\\
&= a^p + \sum_{k=1}^{p-1} a^{p-k}b^k - b^p - \sum_{k=0}^{p-2} a^{p-1-k}b^{k+1},\\
&= a^p - b^p + \sum_{k=1}^{p-1} a^{p-k}b^k - \sum_{k=0}^{p-2} a^{p-1-k}b^{k+1},
\end{aligned}$$

on pose $k' = k+1$ dans la seconde somme :

$$= a^p - b^p + \sum_{k=1}^{p-1} a^{p-k}b^k - \sum_{k'=1}^{p-1} a^{p-k'}b^{k'},$$

dans la seconde somme, on peut remplacer l'indice muet k' par k :

$$\begin{aligned}
&= a^p - b^p + \sum_{k=1}^{p-1} a^{p-k}b^k - \sum_{k=1}^{p-1} a^{p-k}b^k,\\
&= a^p - b^p.
\end{aligned}$$

On applique enfin (43) à $p = n+1$, $a = 1$ et $b = x \neq 1$, ce qui donne

$$1 - x^{n+1} = (1-x)\left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right),$$

et ce qui permet de conclure.

(3) Enfin, dans le cas où $x \neq 1$, on peut aussi raisonner par récurrence, ce qui exige de connaître la formule à l'avance. Pour $n = 0$, on a $(x^{n+1}-1)/(x-1) = 1$ et $\sum_{k=0}^{0} x^k = 1$ et (42) est vraie. Supposons maintenant (42) vraie pour un entier n. Montrons-là pour $n+1$. On a successivement

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} x^k,\\
&= \sum_{k=0}^{n} x^k + x^{n+1},
\end{aligned}$$

et d'après la formule de récurrence ((42) pour n) :

$$\begin{aligned}
&= \frac{x^{n+1}-1}{x-1} + x^{n+1},\\
&= \frac{1}{x-1}\left(x^{n+1} - 1 + (x-1)x^{n+1}\right),\\
&= \frac{1}{x-1}\left(x^{n+1} - 1 + x^{n+2} - x^{n+1}\right),\\
&= \frac{x^{n+2}-1}{x-1},
\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.

□

Suites arithmético-géométriques

On donne :

Définition 7. La suite arithmético-géométrique est définie par

$$u_{n+1} = au_n + b. \tag{44}$$

On a alors

Lemme 8. *L'expression du terme général de la suite arithmético-géométrique u_n est donnée par : si $a = 1$:*

$$u_n = u_0 + nb, \tag{45}$$

et si $a \neq 1$

$$u_n = a^n \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a}. \tag{46}$$

Démonstration. Si $a = 1$, le résultat est immédiat, car c'est une suite aritmétique, déjà connue. Sinon, on cherche à déterminer un nombre x tel que

$$x = ax + b, \tag{47}$$

et on a alors

$$x = \frac{b}{1-a}. \tag{48}$$

En faisant la différence entre (47) et (44), on a

$$u_{n+1} - x = a(u_n - x),$$

et donc la suite $u_n - x$ est une suite géométrique de raison a vérifiant

$$u_n - x = a^n(u_0 - x)$$

donnée donc par

$$u_n = a^n(u_0 - x) + x. \tag{49}$$

soit encore le résultat annoncé. □

Donnons le lemme suivant :

Lemme 9. *L'expression de la somme des $n+1$ termes de la suite arithmético-géométrique u_n est donnée par : (pour $a \neq 1$) :*

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right)\frac{a^{n+1}-1}{a-1} + (n+1)\frac{b}{1-a}. \tag{50}$$

Démonstration. On peut, en effet, supposer $a \neq 1$, sinon la somme est déjà connue. D'après (8.18), on a

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = (u_0 - x)\sum_{k=0}^{n} a^k + (n+1)x = (u_0 - x)\frac{a^{n+1}-1}{a-1} + (n+1)x.$$

et donc d'après (48), on a (50)

□

Fin en cours de rédaction
Voir `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MFI/complementscannes/suite_arithmetico_geometrique.pdf`

Séries associées aux suites arithmétiques, géométriques et arithmético-géométrique

Séries associées aux Suites arithmétiques

En cours de rédaction
Voir `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MFI/complementscannes/serie_suite_arithmetique.pdf`

Séries associées aux Suites géométriques

En cours de rédaction
Voir `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MFI/complementscannes/serie_suite_geometrique.pdf`

Séries associées aux Suites arithmético-géométriques

En cours de rédaction
Voir `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MFI/complementscannes/serie_suite_arithmetico_geometrique.pdf`

Correction de l'exercice 6.

(1) Question issue de [BM03, exercice 1.1] auquel on renvoie.

On donne l'énoncé exact et son corrigé.

Énoncé

(a) Montrer qu'en base 10, on a [4]

$$1 = 0,999....$$

(b) En généralisant, montrer que, pour toute base β, si $b = \beta - 1$, on a

$$1 = \overline{0,bbb....}$$

Corrigé

(a) Par définition, on a, en base 10,

$$\begin{aligned}
0,999.... &= \sum_{i=-\infty}^{-1} 10^i 9,\\
&= 9\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{10^i},\\
&= \frac{9}{10}\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{10^i}.
\end{aligned}$$

On reconnaît une série géométrique de raison 1/10 de premier terme égal à 1. Ainsi

$$0,999.... = \frac{9}{10}\,\frac{1}{1-\frac{1}{10}} = 1$$

Une autre démonstration de cette propriété existe et n'utilise pas la notion de série géométrique. On pose

$$x = 0,999.... \tag{51}$$

Ainsi, on a

$$10x = 9,999.... \tag{52}$$

4. Cela peut constituer un paradoxe, puisqu'un même nombre admet deux écritures différentes. On verra (en correction) que cela n'est qu'un faux paradoxe.

En soustrayant membre à membre (51) et (52), il vient

$$9x = 9,999.... - 0,999.... = 9$$

puisque ces deux nombres ont la même partie fractionnaire. Ainsi

$$x = 0,999.... = 1.$$

L'écriture d'un nombre comportant une suite infinie de 9 (ou plus généralement de l'entier égal à la base moins un), à partir d'un certain rang est, en théorie, interdite [RDO88, section 1.3.2] ! Cela assure ainsi l'unicité de l'écriture en base et donc l'écriture de 1 sous la forme (51) n'est donc pas permise, en fait ! !

(b) La généralisation est identique.

(2) Question issue de [BM03, exercice 1.2] auquel on renvoie.

On donne l'énoncé exact et son corrigé.

Énoncé

(a) Quel nombre rationnel est égal à $0,123123123...$ (le développement est périodique de période 123) ?

(b) En généralisant, montrer que tout nombre dont l'écriture en base 10 est périodique à partir d'un certain rang, est égal à un nombre rationnel. On pourra, pour simplifier, supposer que x, le nombre étudié, appartient à l'intervalle $[0, 1[$. Avec les notations du chapitre 1 de [BM03]

$$x = \overline{0, pqqqq...}$$

où

- p est un entier positif écrit en base 10, avec r chiffres ;
- la période q est un entier strictement positif écrit en base 10, avec s chiffres.

Par exemple, pour $x = 0,43565123123123...$, on a

$$p = 43565, \quad q = 123, \quad r = 5, \quad s = 3.$$

Sous ces notations, on montrera que

$$x = \frac{\overline{pq} - \overline{p}}{10^r\,(10^s - 1)}. \tag{53}$$

Corrigé

(a) On peut raisonner comme pour la question 1 et utiliser les séries géométriques en utilisant la définition de $0,123123123...$ en base 10, mais il est plus rapide d'utiliser le second procédé : on pose

$$x = 0,123123123... \tag{54}$$

Ainsi, on a

$$1000x = 123,123123123... \tag{55}$$

En soustrayant membre à membre (54) et (55), il vient

$$999x = 123$$

et après simplification

$$0,123123123... = \frac{41}{333}.$$

(b) Comme précédemment, on pose

$$x = \overline{0,pqqq...}$$

Puisque p possède r chiffres, on écrit

$$10^r x = \overline{p,qqq...} \tag{56}$$

Puisque q possède s chiffres, on écrit

$$10^s 10^r x = \overline{pq,qqq...} \tag{57}$$

En soustrayant membre à membre (56) et (57), il vient

$$10^r\left(10^s - 1\right)x = \overline{pq} - \overline{p}.$$

Or s est strictement positif donc $10^r\left(10^s - 1\right) \neq 0$ et (53) s'ensuit. L'égalité (53) nous montre que x est rationnel et nous fournit son écriture sous forme de fraction (à simplifier le cas échéant).

Par exemple, pour $x = 0,123123123...$, on a

$$p = 0 \quad q = 123 \quad r = 0 \quad s = 3$$

et on obtient

$$x = \frac{\overline{q}}{10^3 - 1} = \frac{123}{999} = \frac{41}{333}.$$

Pour $x = 0,43565123123123...$, on obtient

$$x = \frac{\overline{pq} - \overline{p}}{10^r\left(10^s - 1\right)} = \frac{43565123 - 43565}{10^5\left(10^3 - 1\right)} = \frac{43521558}{99900000},$$

ce qui se simplifie en

$$x = \frac{7253593}{16650000}.$$

On pourra vérifier cette formule avec matlab.

Il est possible d'écrire certains nombres de deux manières distinctes en base β. Nous parlons d'un faux paradoxe à propos de cette double écriture en base β. En effet, on fait une convention pour assurer l'unicité de l'écriture en base β, en écartant un développement qui contiendrait une suite infinie de chiffres égaux à $\beta - 1$ (voir par exemple [RDO88]). De plus, le nombre 0.999... n'appartient pas à l'intervalle $[0,1[$ puisqu'il est égal à 1 ; sa partie fractionnaire est donc nulle. Malgré ce paradoxe, la seconde méthode, qui n'utilise pas la notion de suite géométrique, nous permet de mettre le nombre $1 = 0.999...$ sous la forme d'une fraction.

Références

[Bas21] J. Bastien. *Outils Mathématiques pour l'Ingénieur 3.* Notes de cours de l'UV OMI3 (Département Mécanique) de Polytech Lyon, disponible sur le web : `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`. 2021. 309 pages.

[BM03] J. Bastien et J.-N. Martin. *Introduction à l'analyse numérique. Applications sous Matlab.* Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 519.4 BAS, 4 ième étage). Voir `https://www.dunod.com/sciences-techniques/introduction-analyse-numerique-applications-sous-matlab`. Paris : Dunod, 2003. 392 pages.

[RDO88] E. Ramis, C. Deschamps et J. Odoux. *Cours de mathématiques spéciales. 3. Topologie et éléments d'analyse.* 2e édition. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 510.7 RAM, 4 ième étage). Paris : Masson, 1988, pages VIII+362.