Informatique 3A MFI — Automne 2022

Corrigé de l'examen du 02 Février 2023

Correction de l'exercice 1.
[Mon90, exercice 3.6.1 h)]

(1) On a

$$u_{n+1} = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+2},$$

et donc

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+2} + 2\sqrt{n+1}, \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left(1 - 2\sqrt{(n+1)(n+2)} + 2(n+1)\right), \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left(2n+3 - 2\sqrt{(n+1)(n+2)}\right) \end{aligned}$$

On a deux façons possibles (presques équivalentes) de conclure.

(a) Soit, on écrit que $u_{n+1} - u_n > 0$ est équivalent à

$$2n+3 - 2\sqrt{(n+1)(n+2)} > 0,$$

ce qui est successivement équivalent à (puisque tout est positif)

$$\begin{aligned} 2n+3 > 2\sqrt{(n+1)(n+2)} &\Longleftrightarrow (2n+3)^2 > \left(2\sqrt{(n+1)(n+2)}\right)^2, \\ &\Longleftrightarrow 4n^2 + 12n + 9 > 4(n+1)(n+2), \\ &\Longleftrightarrow 4n^2 + 12n + 9 > 4n^2 + 12n + 8, \\ &\Longleftrightarrow 1 > 0, \end{aligned}$$

ce qui est vrai.

(b) Soit, on utilise l'astuce classique

$$\forall A, B \in \mathbb{R}_+^*, \quad A - B = \frac{A^2 - B^2}{A + B}, \tag{1}$$

obtenu en écrivant

$$A - B = \frac{(A-B)(A+B)}{A+B}.$$

Notons que si $A = \sqrt{a}$ et $B = \sqrt{b}$ où $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, on obtient l'astuce dite de la "pseudo quantité conjuguée" :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*, \quad \sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}. \tag{2}$$

On a alors

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left(2n+3 - 2\sqrt{(n+1)(n+2)}\right),$$

et en utilisant (1) avec $A = 2n+3$ et $B = 2\sqrt{(n+1)(n+2)}$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{n+1}\left(2n+3+2\sqrt{(n+1)(n+2)}\right)}\left((2n+3)^2 - 4(n+1)(n+2)\right),\\
&= \frac{1}{\sqrt{n+1}\left(2n+1+2\sqrt{(n+1)(n+2)}\right)}\left(4n^2+12n+9-4n^2-12n-8\right),\\
&= \frac{1}{\sqrt{n+1}\left(2n+2+2\sqrt{(n+1)(n+2)}\right)} > 0,
\end{aligned}
$$

Ainsi, la suite u_n est croissante.

Remarque 1. Deux autres méthodes, tout à fait valables, ont été suggérées par deux d'entre vous.

(a) On peut écrire :

$$
\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+2} + 2\sqrt{n+1},\\
&= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\right),
\end{aligned}
$$

et en utilisant l'astuce (2)

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\frac{n+2-(n+1)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}},\\
&= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\frac{n+2-n-1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}},\\
&= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}},\\
&= \frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}-2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right)},\\
&= \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right)}
\end{aligned}
$$

cette dernière quantité est strictement positive, puisque c'est équivalent à

$$\sqrt{n+2} > \sqrt{n+1}$$

et donc à

$$n+2 > n+1,$$

ce qui est vrai.

(b) On peut aussi écrire (plus longuement !)

$$
\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+2} + 2\sqrt{n+1},\\
&= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{2}{n}} + 2\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}},
\end{aligned}
$$

et donc, en utilisant le dl[1] de $\sqrt{1+h}=1+h/2-h^2/8+o(h^2)$ en 0 :

$$\begin{aligned}
u_{n+1}-u_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\sqrt{n}\left(1+\frac{1}{2}\times\frac{2}{n}-\frac{1}{8}\times\frac{4}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)+\frac{2}{n}\left(1+\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),\\
&= \frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\sqrt{n}\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{4n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)+\frac{2}{n}\left(1+\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),\\
&= \frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\sqrt{n}-\frac{2}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}+2\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{4n^{\frac{3}{2}}}+\sqrt{n}o\left(\frac{1}{n^2}\right),\\
&= \frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{3}{4n^{\frac{3}{2}}}+o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right),\\
&= \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{2}}-1+\frac{3}{4n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right),
\end{aligned}$$

et en utilisant le dl $(1+h)^\alpha=1+\alpha h+o(h)$ avec $\alpha=-1/2$ en 0 :

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{2n}-1+\frac{3}{4n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right),\\
&= \frac{1}{\sqrt{n}}\left(-\frac{1}{2n}+\frac{3}{4n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right),\\
&= \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{4n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right),
\end{aligned}$$

et donc

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{n\sqrt{n}}\left(\frac{1}{4}+o\left(1\right)\right). \tag{3}$$

Puisque

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{4}+o\left(1\right)=\frac{1}{4}$$

Pour n assez grand $\frac{1}{4}+o\left(1\right)>0$ et, d'après (3), on a à partir d'un certain rang (ce qui suffit néanmoins)

$$u_{n+1}-u_n>0.$$

(2) On a de même

$$v_{n+1}=\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)+\frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\sqrt{n+1},$$

et donc

$$\begin{aligned}
v_{n+1}-v_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\sqrt{n+1}+2\sqrt{n},\\
&= \frac{1}{\sqrt{n+1}}\left(1-2(n+1)+2\sqrt{n(n+1)}\right),\\
&= -\frac{1}{\sqrt{n+1}}\left(2n+1-2\sqrt{n(n+1)}\right),
\end{aligned}$$

Comme précédement, on a deux possibilités :

1. Attention, il fallait plus loin que l'ordre 1 proposé par l'un d'entre vous

(a) Soit, on écrit

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n < 0 &\Longleftrightarrow 2n+1-2\sqrt{n(n+1)} > 0, \\ &\Longleftrightarrow 2n+1 > 2\sqrt{n(n+1)}, \\ &\Longleftrightarrow (2n+1)^2 > \left(2\sqrt{n(n+1)}\right)^2, \\ &\Longleftrightarrow 4n^2+4n+1 > 4n^2+4n, \\ &\Longleftrightarrow 1 > 0. \end{aligned}$$

(b) Soit, grâce à (2)

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= -\frac{1}{\sqrt{n+1}\left(2n+1+2\sqrt{n(n+2)}\right)}\left((2n+1)^2 - 4n(n+1)\right), \\ &= -\frac{1}{\sqrt{n+1}\left(2n+1+2\sqrt{n(n+2)}\right)}\left(4n^2+4n+1-4n^2-4n\right), \\ &= -\frac{1}{\sqrt{n+1}\left(2n+1+2\sqrt{n(n+2)}\right)} < 0. \end{aligned}$$

Ainsi, la suite v_n est décroissante.

Remarque 2. On peut procéder comme dans la remarque 1.

(a) Comme dans le cas 1a de cette remarque, on peut montrer que

$$v_{n+1} - v_n = \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}$$

et on conclut comme précédemment que cette quantité est négative.

(b) Comme dans le cas 1b de cette remarque, on peut montrer que

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}\left(-\frac{1}{4} + o(1)\right),$$

et on conclut comme précédemment que cette quantité est négative.

(3) Enfin, on a

$$\begin{aligned} u_n - v_n &= -2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n}, \\ &= 2\left(\sqrt{n} - \sqrt{n+1}\right), \end{aligned}$$

On a encore deux possibilités.

(a) Soit on écrit,

$$\begin{aligned} u_n - v_n &= 2\sqrt{n}\left(1 - \sqrt{\frac{n+1}{n}}\right), \\ &= 2\sqrt{n}\left(1 - \sqrt{1+\frac{1}{n}}\right), \end{aligned}$$

et on utilise le dl de $\sqrt{1+h} = 1 + h/2 + o(h)$ en 0 :

$$\begin{aligned}
&= 2\sqrt{n}\left(1 - 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right), \\
&= 2\sqrt{n}\left(-\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right), \\
&= -\frac{\sqrt{n}}{n} + o\left(\frac{\sqrt{n}}{n}\right), \\
&= -\frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),
\end{aligned}$$

qui tend vers 0.

(b) Soit, plus rapidement cette fois, on utilise de nouveau l'équation (1)

$$\begin{aligned}
u_n - v_n &= 2\left(\sqrt{n} - \sqrt{n+1}\right), \\
&= 2\frac{n-(n+1)}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}, \\
&= 2\frac{n-(n+1)}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}, \\
&= -\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}},
\end{aligned}$$

qui tend vers 0.

Compte tenu de ces trois points, les deux suites u_n et v_n sont adjacentes et d'après la proposition 8.19 elles convergent vers la même limite.

Correction de l'exercice 2.

Cet exercice correspond à l'exercice de TD 9.2. On renvoie à sa correction, reproduite ci-dessous :

(1) Nous avons deux façons de faire.

(a) La plus simple consiste à partir du terme de droite et de le réduire au même dénominateur pour retrouver le terme de gauche : On écrit successivement

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2-x+1} - \frac{1}{x^2+x+1}\right) &= \frac{1}{2}\frac{x^2+x+1-x^2+x-1}{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}, \\
&= \frac{x}{x^4+x^3+x^2-x^3-x^2-x+x^2+x+1}, \\
&= \frac{x}{x^4+x^2+1},
\end{aligned}$$

ce qui est le résultat voulu.

(b) La plus subtile est la suivante. Elle permet, connaissant le terme de gauche de trouver l'expression de droite. Il s'agit en fait d'une classique décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle. La forme d'une telle décomposition est par exemple donnée dans la section F.1 de l'annexe F du cours. On pourra aussi consulter par exemple [RDO93, section 7.3].

(i) Remarquons tout d'abord que le dénominateur est strictement positif donc la fraction est définie sur $\mathbb{R}$.

Factorisons tout d'abord le dénominateur.

On a

$$X^4 + X^2 + 1 = \left(X^2 - X + 1\right)\left(X^2 + X + 1\right)$$

En effet, on procède comme au début de la mise sous forme canonique d'un polynôme du second degré :

$$\begin{aligned} X^4+X^2+1 &= X^4+2X^2+1-X^2, \\ &= (X^2+1)^2-X^2, \\ &= \left(X^2+1-X\right)\left(X^2+1+X\right). \end{aligned}$$

On peut vérifier que les discriminants des deux polynômes sont tous les deux strictement négatifs (ce que la théorie des polynômes irréductibles pouvait prévoir !).

On aurait pu aussi décomposer le polynôme dans $\mathbb{C}$ calculant les quatre racines complexes et les regrouper ensuite deux par deux pour obtenir l'expression ci-dessus mais c'est beaucoup plus fastidieux.

On a donc finalement

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^4+x^2+1 = (x^2-x+1)(x^2+x+1). \tag{4}$$

(ii) La théorie de la décomposition en éléments simples nous apprend ensuite qu'il existe a, b, c et d quatre réels tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{x}{1+x^2+x^4} = \frac{ax+b}{x^2-x+1} + \frac{cx+d}{x^2+x+1}. \tag{5}$$

Là encore, deux façons de faire.

(A) Une première façon de faire, peu élégante et source d'erreur de calcul, consiste à réduire au même dénominateur le terme de droite de (5) d'obtenir un numérateur sous la forme d'un polynôme de degré 4, dont les coefficients dépendent de a, b, c et d. On identifie avec le numérateur du terme de gauche, on obtient un système linéaire de quatre équations à quatre inconnues, que l'on résoud pour obtenir :

$$a = 0, \tag{6a}$$

$$b = \frac{1}{2}, \tag{6b}$$

$$c = 0, \tag{6c}$$

$$d = -\frac{1}{2}, \tag{6d}$$

et donc finalement, d'après (5)

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{x}{1+x^2+x^4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2-x+1} - \frac{1}{x^2+x+1}\right). \tag{7}$$

(B) Plus subtilement, on utilise la méthode d'identification de la théorie de la décomposition en éléments simples.

— Multiplions de part et d'autre de l'égalité (5) par x

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{x^2}{1+x^2+x^4} = \frac{ax^2+bx}{x^2-x+1} + \frac{cx^2+dx}{x^2+x+1},$$

et faisons tendre x vers l'infini, ce qui donne

$$a+c=0. \tag{8}$$

— On a, en remplaçant x par $-x$ dans (5)

$$\frac{-x}{1+x^2+x^4} = \frac{-ax+b}{x^2+x+1} + \frac{-cx+d}{x^2-x+1},$$

et donc
$$\frac{x}{1+x^2+x^4} = \frac{cx-d}{x^2-x+1} + \frac{ax-b}{x^2+x+1},$$
et en identifiant avec (5) et en utilisant l'unicité de la décomposition en éléments simples :

$$c = a, \tag{9a}$$
$$b = -d. \tag{9b}$$

Les équations (8) et (9a) nous donnent (6a) et (6c).

— Évaluons par exemple (5) en $x = 1$ ce qui donne en prenant en compte (6a) et (6c) :
$$\frac{1}{3} = b + \frac{d}{3},$$
ce qui nous donne avec (9b)
$$\frac{1}{3} = b - \frac{b}{3},$$
et donc (6b). puis
$$\frac{d}{3} = \frac{1}{3} - b,$$
et donc (6d). Bref, on retrouve donc (6) et donc (7)

(2) Utilisons le résultat (7) pour exprimer autrement S_n :
$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{p=1}^{n} \frac{p}{1+p^2+p^4}, \\ &= \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^2-p+1} - \frac{1}{p^2+p+1}\right), \end{aligned}$$
et on remarque que $p^2 - p + 1 = (p-1)^2 + (p-1) + 1$:
$$= \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n}\left(\frac{1}{(p-1)^2+(p-1)+1} - \frac{1}{p^2+p+1}\right),$$
et on voit apparaître une somme téléscopique :
$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}\left(\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{(p-1)^2+(p-1)+1} - \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p^2+p+1}\right), \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \sum_{p=2}^{n}\frac{1}{(p-1)^2+(p-1)+1} - \sum_{p=1}^{n-1}\frac{1}{p^2+p+1} - \frac{1}{n^2+n+1}\right), \end{aligned}$$
on pose $p' = p - 1$ dans la première somme :
$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}\left(1 + \sum_{p'=1}^{n-1}\frac{1}{(p')^2+p'+1} - \sum_{p=1}^{n-1}\frac{1}{p^2+p+1} - \frac{1}{n^2+n+1}\right), \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n^2+n+1}\right). \end{aligned}$$

Bref,
$$\forall n \in \mathbb{N}*, \quad S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(n^2+n+1)}. \tag{10}$$

(3) On déduit de (10) en passant à $n \to +\infty$ la valeur de la somme S définie par

$$S = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{p}{1+p^2+p^4} = \frac{1}{2}.$$

(4) On aurait pu s'assurer, avant tout calcul, de la convergence de la série en remarquant que

$$\begin{aligned}\frac{p}{1+p^2+p^4} &= \frac{p}{p^4\left(\frac{1}{p^4}+\frac{1}{p^2}+1\right)},\\ &= \frac{1}{p^3}\frac{1}{\frac{1}{p^4}+\frac{1}{p^2}+1},\\ &= \frac{1}{p^3}\frac{1}{1+o(1)},\\ &\sim \frac{1}{p^3},\end{aligned}$$

correspondant à une série de Riemann convergente.

Correction de l'exercice 3.
Cet exercice correspond à l'exercice de TD 7.9 . On renvoie à sa correction, reproduite ci-dessous :
Exercice issu de [Mac17].
On pourra consulter les corrections des exercices 6.9, 6.10 et 11.7.
On pourra consulter :
`https://fr.wikipedia.org/wiki/Décroissance_exponentielle`
`https://fr.wikipedia.org/wiki/Période_radioactive`
`https://fr.wikipedia.org/wiki/Carbone_14`

(1) La résolution classique fournit :

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}. \tag{11}$$

La demi-vie, notée $t_{1/2}$, correspond à

$$N\left(t_{1/2}\right) = \frac{N_0}{2},$$

ce qui donne

$$N_0 e^{-\lambda t_{1/2}} = \frac{N_0}{2},$$

et donc

$$e^{-\lambda t_{1/2}} = \frac{1}{2},$$

soit

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}. \tag{12}$$

(2) Le nombre $n(t)$ de désintégrations par seconde (ici Δt vaut une seconde), mesurable expérimentalement, vérifie, à l'instant t :

$$n(t) = \frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{-\Delta t} \approx -N'(t),$$

et donc

$$n(t) = \lambda N(t).$$

soit encore

$$n(t) = \lambda N_0 e^{-\lambda t}. \tag{13}$$

On a de même

$$n(0) = \lambda N_0. \tag{14}$$

En divisant (14) par (13), on a donc

$$\frac{n(0)}{n(t)} = e^{\lambda t}, \tag{15}$$

qui est égal au nombre

$$\gamma = \frac{816}{560}, \tag{16}$$

connu. De (6.25), (16), (15),on déduit

$$e^{\frac{\ln 2}{t_{1/2}} t} = \gamma,$$

et donc

$$t = \frac{\ln(\gamma)}{\ln 2} t_{1/2}.$$

Numériquement, $t \approx 3\,025$ ans.

Correction de l'exercice 4.
Exercice issu de [Mon90, exercice 5.4.5].
On a successivement

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{1/x}, \\ &= e^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)}, \\ &= e^{\frac{1}{x}\left(\ln(a^x)+\ln\left(\frac{1+(b/a)^x}{2}\right)\right)}, \end{aligned}$$

et en notant $t = b/a \in \mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned} &= e^{\frac{1}{x}\left(\ln(a^x)+\ln\left(\frac{1+t^x}{2}\right)\right)}, \\ &= e^{\frac{1}{x}\ln(a^x)} e^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+t^x}{2}\right)}, \\ &= e^{\frac{1}{x}\ln\left(e^{x\ln a}\right)} e^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+t^x}{2}\right)}, \\ &= e^{\frac{1}{x}x\ln a} e^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+t^x}{2}\right)}, \end{aligned}$$

et d'où

$$f(x) = a e^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+t^x}{2}\right)}. \tag{17}$$

Montrons que f' est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.
On a donc

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+t^x}{2}\right)\right)' a e^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+t^x}{2}\right)}.$$

Or,

$$\left(\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+t^x}{2}\right)\right)' = -\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{1+t^x}{2}\right) + \frac{1}{x}\left(\ln\left(\frac{1+t^x}{2}\right)\right)',$$

et on a successivement

$$\begin{aligned}
\left(\ln\left(\frac{1+t^x}{2}\right)\right)' &= \frac{(1+t^x)'}{1+t^x},\\
&= \frac{(t^x)'}{1+t^x},\\
&= \frac{\left(e^{x\ln t}\right)'}{1+t^x},\\
&= \frac{\ln t e^{x\ln t}}{1+t^x},
\end{aligned}$$

et donc

$$\left(\ln\left(\frac{1+t^x}{2}\right)\right)' = \frac{(\ln t)t^x}{1+t^x}. \tag{18}$$

On a donc

$$\left(\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+t^x}{2}\right)\right)' = -\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{1+t^x}{2}\right) + \frac{1}{x}\frac{(\ln t)t^x}{1+t^x},$$

et donc f' est du signe de

$$h(x) = -\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{1+t^x}{2}\right) + \frac{1}{x}\frac{(\ln t)t^x}{1+t^x},$$

que l'on écrit sous la forme

$$h(x) = \frac{1}{x^2}\left(-\ln\left(\frac{1+t^x}{2}\right) + x\frac{(\ln t)t^x}{1+t^x}\right).$$

Ainsi,

$$\begin{gathered}
f' \text{ est du signe de } g, \text{ définie par}\\
g(x) = -\ln\left(\frac{1+t^x}{2}\right) + x\frac{(\ln t)t^x}{1+t^x}.
\end{gathered} \tag{19}$$

On a alors, d'après (18)

$$g'(x) = -\frac{(\ln t)t^x}{1+t^x} + \left(x\frac{(\ln t)t^x}{1+t^x}\right)'.$$

Or, on a

$$\begin{aligned}
\left(x\frac{(\ln t)t^x}{1+t^x}\right)' &= \frac{(\ln t)t^x}{1+t^x} + x\left(\frac{(\ln t)t^x}{1+t^x}\right)',\\
&= \frac{(\ln t)t^x}{1+t^x} + x\frac{(\ln t)^2t^x(1+t^x) - (\ln t)^2t^xt^x}{(1+t^x)^2},\\
&= \frac{(\ln t)t^x}{1+t^x} + x\frac{(\ln t)^2t^x}{(1+t^x)^2},
\end{aligned}$$

et donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g'(x) = x\frac{(\ln t)^2t^x}{(1+t^x)^2} > 0. \tag{20a}$$

On a aussi

$$g(0) = 0. \tag{20b}$$

De (20), on déduit le tableau de variation 1 page ci-contre de g, qui est donc strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.
De (19), on déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) > 0,$$

d'où la conclusion.

x	0		$+\infty$
g	0	$\nearrow$	
g'		$+$	

TABLE 1. Tableau de variation de la fonction g.

Références

[Mac17] D. MACHON. *TD de Mathématiques pour l'ingénieur (3A Matériaux, Polytech)*. 2017.

[Mon90] J.-M. MONIER. *Analyse, tome 1 (mathématiques supérieures)*. Dunod, 1990.

[RDO93] E. RAMIS, C. DESCHAMPS et J. ODOUX. *Cours de mathématiques spéciales. Vol. 1*. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 510.7 RAM, 4e étage). Masson, Paris, 1993, pages viii+440.