Informatique 3A MFI

Automne 2023

Corrigé de l'examen du 30 novembre 2023

Correction de l'exercice 1.
On obtient :

(1)
$$\forall n \geq 0, \quad v_n = \frac{1}{2}n(n-1) \tag{1}$$

(2) puis
$$\forall n \geq 0, \quad y_n = \alpha + \frac{1}{2}n(n-1) \tag{2}$$

Voir correction manuscrite provisoire détaillée sur
`http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MFI/complementscannes/corresolequadifference01.pdf`

Correction de l'exercice 2.

(1) Exercice 1936 issu de `http://exo7.emath.fr/`, par Gineste et Lévi Operman 01/11/2001

Pour $n \geq 4$
$$\frac{n!}{n^n} = \frac{2}{n} \times \frac{3}{n} \times \underbrace{\frac{4}{n} \times \cdots \times \frac{n}{n}}_{\leq 1} \leq \frac{6}{n^2}.$$

Or $\sum \frac{6}{n^2}$ est convergente. Donc $\sum \frac{n!}{n^n}$ est aussi convergente par comparaison.

(2) Exercice 1936 issu de `http://exo7.emath.fr/`, par Gineste et Lévi Operman 01/11/2001

Montrons que $(\cosh \sqrt{\ln n})^{-2} \geq 4\left(\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-2}$ pour n assez grand. On a :

$$\begin{array}{rcll}
4 \ln n & \leq & \ln^2 n & \text{pour } n \text{ assez grand} \\
\ln n & \leq & \left(\frac{1}{2}\ln n\right)^2 & \\
\sqrt{\ln n} & \leq & \frac{1}{2}\ln n = \ln \sqrt{n} & \\
\operatorname{ch}(\sqrt{\ln n}) & \leq & \operatorname{ch}(\ln \sqrt{n}) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) & \text{car } x \mapsto \operatorname{ch} x \text{ est croissante} \\
\operatorname{ch}(\sqrt{\ln n})^{-2} & \geq & 4\left(\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-2} &
\end{array}$$

Or $\sqrt{n} \sim \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}$, et $\left(\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-2} \sim \frac{1}{n}$, donc $\sum \left(\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2$ est divergente. Par comparaison, la série de terme général $(\operatorname{ch}\sqrt{\ln n})^2$ est divergente.

Correction de l'exercice 3.
On renvoie à l'annexe Q du cours dont une partie du texte est rappelée ci-dessous :

Proposition 1. *Soit une fonction F, de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, dérivable en 1. Les deux assertions suivantes sont équivalentes*

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*, \quad F(ab) = F(a) + F(b), \tag{3a}$$

$$\exists K \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad F(t) = K\int_1^t \frac{du}{u}. \tag{3b}$$

Remarque 2.

(1) Le sens (3b) $\Longrightarrow$ (3a) est le sens utilisé dans [Jan22].
(2) On peut affaiblir l'hypothèse de dérivabilité de F en 1 et la remplacer par la continuité de F sur $\mathbb{R}_+^*$. Voir l'annexe R.
(3) (a) Si $K = 0$, $F = 0$, solution nulle de (3a).
    (b) Sinon on définit $b \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ tel que $K = 1/\ln b$ et on a

$$x \in \mathbb{R}_+^*, \quad F(t) = \frac{1}{\ln b} \int_1^t \frac{du}{u}. \tag{4}$$

    On retrouve donc la définition de $\log b$, qui est la seule solution non nulle de (3a).

Démonstration de la proposition 1.

(1) Sens (3a) $\Longrightarrow$ (3b)

Remarquons tout d'abord que si l'on applique (3a) à $a = b = 1$, on obtient :

$$F(1) = 2F(1) + F(1),$$

et donc

$$F(1) = 0. \tag{5}$$

Soient $t \in \mathbb{R}_+^*$ et $h \neq 0$, assez petit, tel que $h/t > 0$ et $t + h > 0$. On a successivement, grâce à (3a)

$$\begin{aligned}
\frac{F(t+h) - F(t)}{h} &= \frac{F\left(t\left(1 + \frac{h}{t}\right)\right) - F(t)}{h}, \\
&= \frac{F(t) + F\left(1 + \frac{h}{t}\right) - F(t)}{h}, \\
&= \frac{F\left(1 + \frac{h}{t}\right)}{h}, \\
&= \frac{1}{t} \frac{F\left(1 + \frac{h}{t}\right)}{\frac{h}{t}},
\end{aligned}$$

en utilisant (5) et en posant $u = h/t > 0$:

$$= \frac{1}{t} \frac{F(1+u) - F(1)}{u}.$$

D'après l'hypothèse sur F

$$\lim_{u \to 0} \frac{F(1+u) - F(1)}{u} = F'(1).$$

Ainsi, en posant $K = F'(1) \in \mathbb{R}$, on a donc

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(t+h) - F(t)}{h} = \frac{K}{t}.$$

Ainsi, F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad F'(t) = \frac{K}{t}. \tag{6}$$

De (5) et (6), on déduit (3b) (Voir par exemple [DB22, Annexe "La primitive est l'opération inverse de la dérivation (sous forme d'exercice)"]).

(2) Sens (3b) $\Longrightarrow$ (3a)

Réciproquement, considérons F définie par (3b).

Nous proposons deux preuves.

(a) Remarquons que tout d'abord que pour tout $b > 0$, on a successivment, en faisant le changement de variable $v = u/b$ (à b constant) dans l'intégrale, qui implique $u = bv$ et donc $du = bdv$:

$$\begin{aligned} F(b) &= K \int_1^b \frac{du}{u}, \\ &= K \int_{1/b}^1 \frac{bdv}{bv}, \\ &= -K \int_1^{1/b} \frac{dv}{v}, \\ &= -F\left(\frac{1}{b}\right) \end{aligned}$$

et donc

$$\forall b \in \mathbb{R}_+^*, \quad F\left(\frac{1}{b}\right) = -F(b). \tag{7}$$

De même, on écrit en faisant le changement de variable $v = u/b$ (à b constant)

$$\begin{aligned} F(ab) &= \int_1^{ab} \frac{du}{u}, \\ &= K \int_{1/b}^{a} \frac{bdv}{bv}, \\ &= K \int_{1/b}^{a} \frac{du}{u}, \\ &= K \left(\int_{1/b}^{1} \frac{du}{u} + \int_1^a \frac{du}{u} \right), \\ &= K \left(-\int_1^{1/b} \frac{du}{u} + \int_1^a \frac{du}{u} \right), \\ &= K \left(-F\left(\frac{1}{b}\right) + F(a) \right), \end{aligned}$$

et d'après (7) :

$$= F(a) + F(b).$$

(b) Plus rapidement, si (3b), est vrai, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et il existe K telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad F'(x) = \frac{K}{x}. \tag{8}$$

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Définissons la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = F(ax) - F(x). \tag{9}$$

D'après (8), on a

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) &= aF'(ax) - F'(x), \\ &= K\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\right), \\ &= 0, \end{aligned}$$

et donc, il existe une constante K_a (qui dépend de a *a priori*) telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = K_a. \tag{10}$$

Pour $x = 1$, on déduit donc de (9) que

$$K_a = f(1) = F(a) - F(1).$$

D'après (3b), $F(1) = 0$ et donc $K_a = F(a)$. Ainsi, d'après (9) et (10),

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad F(a) = F(ax) - F(x),$$

et donc, finalement

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad F(ax) = F(a) + F(x).$$

□

Correction de l'exercice 4.

Exercice 5102-5) issu de `http://exo7.emath.fr/`, par rouget 2010/06/30

On notera $\mathcal{C}$ le graphe de f.

Soit $x > 0$. x n'est pas nul donc $\frac{1}{x}$ existe puis $1 + \frac{1}{x} > 0$ et $f(x)$ existe.

Etude en 0. Pour $x > 0$, $x \ln(1 + \frac{1}{x}) = -x \ln x + x \ln(1 + x)$. Par suite, $x \ln(1 + \frac{1}{x})$ tend vers 0 quand x tend vers 0 par valeurs supérieures et donc $f(x) = \exp(x \ln(1 + \frac{1}{x}))$ tend vers 1. Posons encore $f(0) = 1$ et étudions la dérivabilité de f en 0. Pour $x > 0$,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{x}\left(\exp(x \ln(1 + \frac{1}{x})) - 1\right) = \frac{\exp\left(x \ln(1 + \frac{1}{x})\right) - 1}{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

Or, $x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ tend vers 0 quand x tend vers 0, et donc

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\exp(x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)) - 1}{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{y \to 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1.$$

D'autre part, $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures. Finalement,

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty.$$

Ainsi, f n'est pas dérivable en 0 mais $\mathcal{C}$ admet l'axe des ordonnées pour tangente en $(0, f(0)) = (0, 1)$.

Etude en $+\infty$. Pour $x > 0$, $x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$ et donc $\lim_{x \to +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{y \to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1$. Par suite,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = e.$$

Etude des variations de f. Pour $x > 0$, $f(x) > 0$ puis $\ln(f(x)) = x \ln(1 + \frac{1}{x})$. Par suite, pour $x > 0$,

$$f'(x) = f(x) \ln(f)'(x) = f(x)\left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{x(-\frac{1}{x^2})}{1 + \frac{1}{x}}\right) = f(x) g(x),$$

où $g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}$. Sur $]0, +\infty[$, f' est du signe de g. Pour déterminer le signe de g, étudions d'abord les variations de g sur $]0, +\infty[$. g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$,

$$g'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} + \frac{1}{(x + 1)^2} = -\frac{1}{x(x + 1)} + \frac{1}{(x + 1)^2} = \frac{-1}{x(x + 1)^2} < 0.$$

g est donc strictement décroissante sur $]0, +\infty[$, et puisque $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$, g est strictement positive sur $]0, +\infty[$. Il en est de même de f'. f est strictement croissante sur $]0, +\infty($.

On en déduit $\mathcal{C}$. Voir la figure 1 page ci-contre.

Correction de l'exercice 5.

Voir les corrections des exercices de TD 10.1 et 10.2.

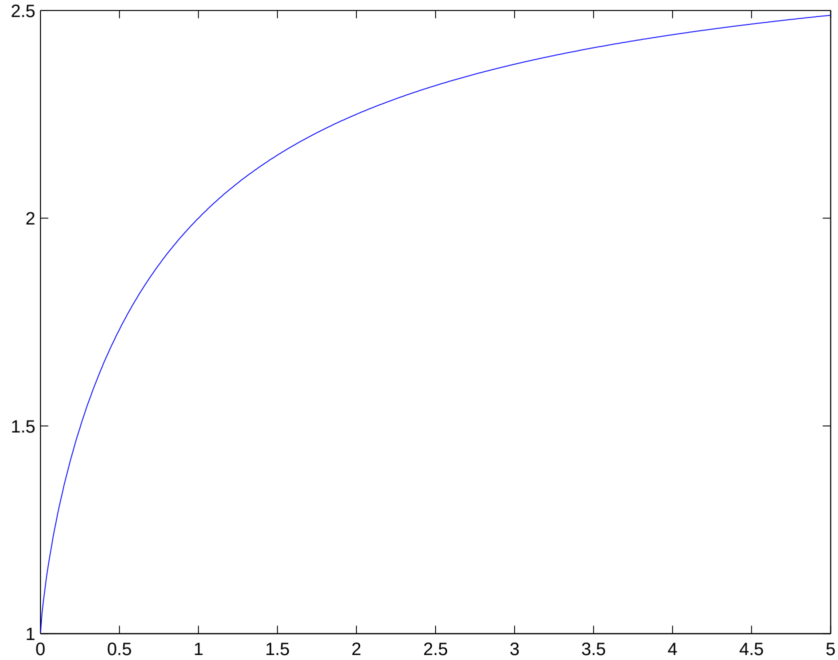

FIGURE 1. Le graphe $\mathcal{C}$.

Références

[DB22] N. DÉBIT et J. BASTIEN. *Méthodes numériques de base.* Notes de cours de l'UV MNB (Département Matériaux) de Polytech Lyon, disponible sur le web : `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`. 2022. 326 pages.

[Jan22] C. JAN. *Cours de Mathématiques Supérieures.* Lycée du Parc. 2022.