

**Examen à mi-parcours du 14 septembre
2015**

Durée : 1 heure(s)

Documents autorisés : OUI NON

Polycopiés de l'UE, notes manuscrites. Livres interdits

Calculatrice autorisée : OUI NON

Tout type

Exercice 1.

Former le développement limité en zéro de la fonction $f(x) = e^{\cos x}$ à l'ordre 2.

Exercice 2.

- (1) (a) Calculer les 3 premières dérivées de la fonction sinus en zéro et en déduire le développement limité cette fonction en zéro à l'ordre 3.
(b) Montrer que le développement limité cette fonction en zéro à l'ordre 4 est donné par

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

- (2) Étudier et tracer la fonction $x \mapsto x - \frac{x^3}{6}$ sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{4}]$. Sur le même graphe, on rajoutera le graphique de la fonction sinus. Commenter.
(3) On peut montrer que l'on a la formule de Taylor : pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$, il existe $\xi \in [0, \frac{\pi}{4}]$ tel que :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} f^{(5)}(\xi),$$

où f est la fonction sinus.

- (a) Montrer que, pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$, on a

$$\left| \sin(x) - \left(x - \frac{x^3}{6} \right) \right| \leq \left(\frac{\pi}{4} \right)^5 \frac{1}{5!}.$$

- (b) Que pouvez-vous en conclure ?

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html>