POLYTECH LYON

Informatique 3A MFI Automne 2014

Corrigé de l'examen à mi-parcours du 12 septembre 2014

Correction de l'exercice 1.
On trouve en utilisant par exemple la fonction suivante
`http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MFI/fichiers_matlab/developpement_limite.m`,

$$f(x) = x^2/2 + x + 1 + o\left(x^2\right).$$

Correction de l'exercice 2.

(1) La dérivée p' de p vaut

$$p'(x) = -3\,x^2 + 8\,x - 4, \tag{1}$$

dont les racines sont $2/3$ et 2. On en déduit que p est strictement croissante sur $[1, 2]$ et p est strictement décroissante sur $[2, 3]$.

(2)

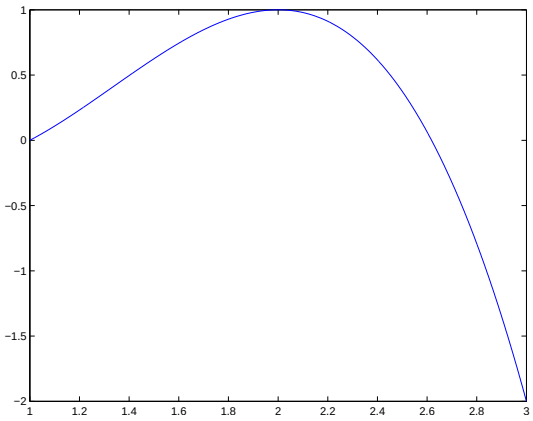


FIGURE 1. Le tracé de la fonction p.

Voir la figure 1.

(3) Les extrémas de p sont les valeurs par p des valeurs appartenant à l'ensemble $\{1, 2, 3\}$. Leurs images par p sont $\{0, 1, -2\}$. Ainsi, les extrémas de p sont -2, pour le minimum et 1, pour le maximum.

(4) On vérifie que 0 et 2 sont le minimum et le maximum de $|p|$.

Remarque 1.

- Cette majoration d'une fonction sera très souvent faite en MNB, pour majorer des erreurs d'interpolation, d'intégration ....
- Si on utilise la fonction `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MNB/fichiers_matlab/maxabsfun.m`, disponible sur le web, on obtient directement le résultat suivant : le maximum de $|p|$ est égal à 2. Voir la figure 2.

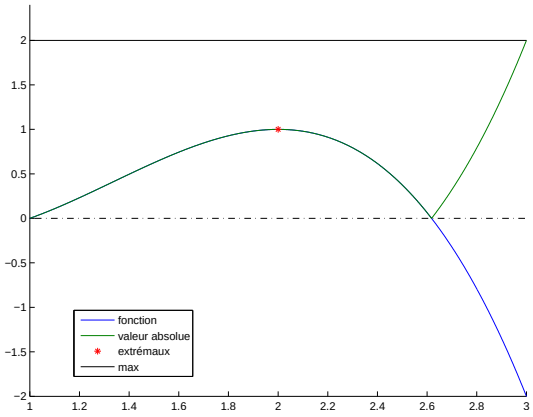


FIGURE 2. Le résultat de la fonction `maxabsfun.m`.

- En fait, cet exercice a été posé « à l'envers » ! On se donne x_0, x_1 et x_2 trois réels (que j'ai posés respectivement égaux à 1, 2 et 3) et y_0, y_1 et y_2 trois réels (que j'ai posés respectivement égaux à 0, 1 et -2). On cherche une fonction polynomiale p telle que

$$\begin{aligned} p(x_0) &= y_0, \\ p(x_1) &= y_1, \\ p'(x_1) &= y_1, \\ p(x_2) &= y_2. \end{aligned}$$

  La théorie de l'interpolation, vue en MNB (!) nous dit que ce polynome existe et est unique et permet de le constuire. Voir aussi [BM03].

Correction de l'exercice 3.
On étudie dans cet exercice la fonction f donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases} \tag{2}$$

(1) La fonction $x \mapsto 1/x$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ et sinus et continu sur $\mathbb{R}$. La fonction f est donc continue sur $\mathbb{R}^*$ comme composées d'application continues.

(2) (a) On vérifie que les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers zéro. Or, par définition,

$$\begin{aligned} f(u_n) &= \sin(\pi/2 + 2n\pi) = \sin(\pi/2) = 1, \\ f(v_n) &= \sin(-\pi/2 + 2n\pi) = \sin(-\pi/2) = -1 \end{aligned}$$

Ainsi, les deux suites $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tendent respectivement vers 1 et -1 et d'après le cours, f n'est pas continue en zéro.

(b) En fait, pour tout $\alpha \in [-1,]$, on peut exhiber une suite $w_n > 0$ telle que $f(w_n) = \alpha$ avec w_n tendant vers zéro. Ainsi, f n'admet pas de limite à droite en zéro. De même, f n'admet pas de limite à gauche en zéro.

(3)

Par exemple, on peut écrire

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\cos(1/x).$$

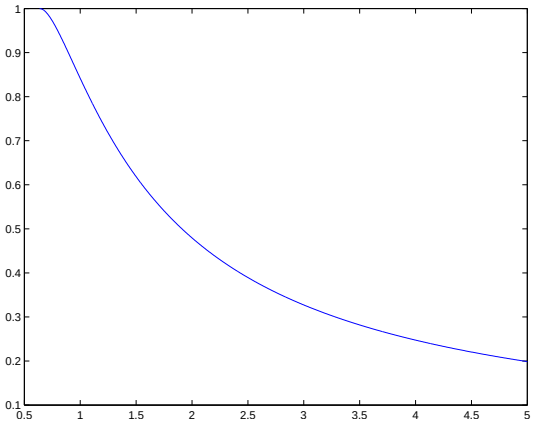


FIGURE 3. La fonction f sur $[2/\pi, +\infty[$.

Si x appartient à $[2/\pi, +\infty[$, $1/x$ appartient à $]0, \pi/2]$ et $\cos(1/x)$ est strictement positif (sauf en une valeur où il est nul). Puisque $1/x^2$ est strictement positif, d'après le cours, f est décroissante sur l'intervalle $[2/\pi, +\infty[$. Voir la figure 3.

(4)

Pour tout $a > 0$, il existe un intervalle défini par

$$I_n = \left[\frac{1}{\pi/2 + 2n\pi}, \frac{1}{-\pi/2 + 2n\pi}\right]$$

inclus dans $]0, a[$. En effet, il suffit de choisir n vérifiant

$$n \geq \frac{1}{2\pi(1/4 + \pi/2)}.$$

Comme dans la question 3, on montre que f est strictement croissante sur I_n. De même, il existe un intervalle défini par

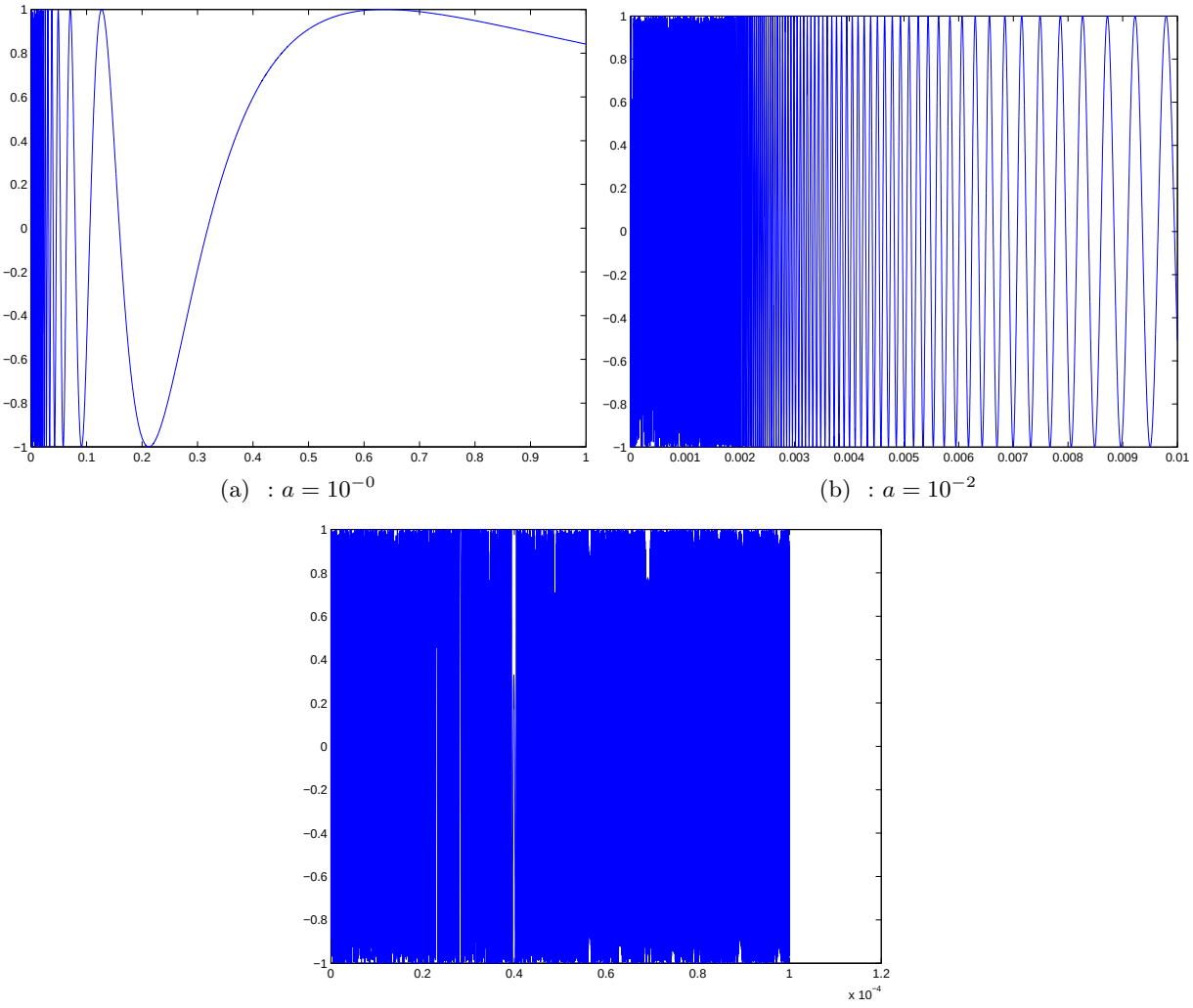
$$J_n = \left[\frac{1}{3\pi/2 + 2n\pi}, \frac{1}{\pi/2 + 2n\pi}\right]$$

inclus dans $]0, a[$. Dans ce cas, f est strictement décroissante sur J_n. Donc, f n'est pas monotone sur $]0, a[$. Quelque soit la façon dont on « grossisse » le graphe de f autour de l'origine, il y aura toujours des intervalles ou f est croissante et des intervalles où f est décroissante.

Voir la figure 4.

Références

[BM03] J. BASTIEN et J.-N. MARTIN. *Introduction à l'analyse numérique. Applications sous Matlab.* Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 519.4 BAS, 4 ième étage). Paris : Dunod, 2003. 392 pages.



(a) : $a = 10^{-0}$

(b) : $a = 10^{-2}$

(c) : $a = 10^{-4}$

FIGURE 4. Tracé de la fonction f sur $]0, a]$.