Informatique 3A MFI Automne 2018

Corrigé de l'examen à mi-parcours du 21 septembre 2018

Correction de l'exercice 1.
On trouve respectivement en utilisant par exemple la fonction suivante
`http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MFI/fichiers_matlab/developpement_limite.m`,

(1)
$$f(x) = -1/4\,x^4 + 1/3\,x^3 - 1/2\,x^2 + x + o\left(x^4\right),$$

(2)
$$g(x) = -1/2\,x^2 + o\left(x^2\right).$$

Correction de l'exercice 2.

(1) La fonction f est définie sur son domaine $D_f = [1, +\infty[$ et de classe C^∞ sur $]-1, +\infty[$ et on a après calcul :

$$f'(x) = -\frac{3x\left(x-1-\sqrt{6}\right)\left(x-1+\sqrt{6}\right)}{2(x^2+1)^3}.$$

On peut le vérifier sous matlab par acquis de conscience :

$$f'(x) = -3/2\,\frac{x\left(x^2-5-2\,x\right)}{\sqrt{x+1}\,(x^2+1)^{5/2}},$$
$$\left(x-1-\sqrt{(6)}\right)\left(x-1+\sqrt{(6)}\right) = x^2-5-2\,x,$$

On en déduit que f est strictement décroissante sur $]-1, 0]$ et sur $[1+\sqrt{6}, +\infty[$ et que f est strictement croissante sur $[0, 1+\sqrt{6}]$. On a

$$f(-1) = 0,$$
$$f(0) = -2,$$
$$f(\sqrt{6}+1) = \frac{\sqrt{\sqrt{6}+2}\,\left(-1+\sqrt{6}\right)}{\left(\left(\sqrt{6}+1\right)^2+1\right)^{3/2}} \approx 0.06600,$$
$$f(\infty) = 0.$$

(2) Ainsi, f n'admet qu'une seule racine sur $[-1, 0]$, égale à -1 et une seule autre racine, notée α dans $]0, 1+\sqrt{6}[\approx]0, 3.44949[$.

Voir aussi le graphique de la fonction f sur la figure 1. La racine α est approchée grâce à la fonction `fzeros` de matlab : on trouve

$$\alpha \approx 2.000000000000.$$

Ainsi, on a $\alpha = 2$ puisque $f(2) = 0$.

(3) Cela était en fait immédiat puisque f est nulle ssi $\sqrt{x+1}(x-2)$ soit donc $x = -1$ ou $x = 2$!

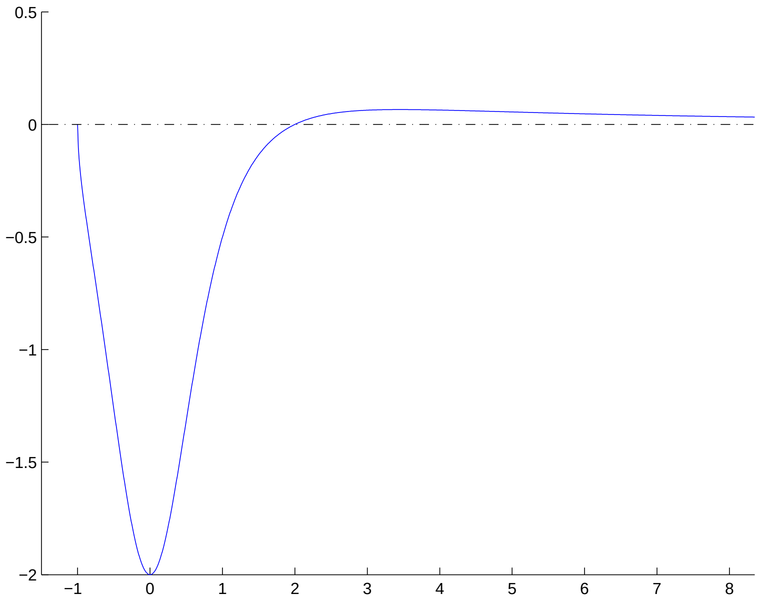

FIGURE 1. Le graphe de la fonction f.

Correction de l'exercice 3.

On obtient : $I = 3$. En effet, on a $1 + 2x = t^2$, donc $2dx = 2tdt$ et donc $dx = tdt$ et, pour $x = 1$, $t = \sqrt{3}$ et pour $x = 4$, $t = \sqrt{9} = 3$ et donc

$$I = \int_{\sqrt{3}}^{3} \frac{tdt}{\sqrt{t^2}} \frac{t^2 - 1}{2} = \frac{1}{2} \int_{\sqrt{3}}^{3} t^2 - 1dt = 3.$$