

Contrôle Continu 1 du 21 janvier 2026

Durée : 1,5 heure(s)

Documents autorisés (hors QCM) : OUI ☒ NON ☐

Autorisés : *Polycopiés de l'UE, notes manuscrites.*

Interdits : *Écrans (sauf tablette et ordinateurs en mode avion), Livres et Internet*

Calculatrice autorisée (hors QCM) : OUI ☒ NON ☐

Tout type

Exercice 1.

Durée : 15 minutes.

Voir sujet de QCM n° 1 distribué.

Aucun document, aucun écran autorisé pendant le temps de ce QCM.

Exercice 2.

(1) Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il existe un couple d'entiers unique (m, n) tel que

$$p = 2^m(2n + 1). \quad (1)$$

On pourra imaginer que l'on divise l'entier p , "le plus possible par 2", tant que c'est possible, puis, quand cela ne l'est plus, que le nombre obtenu par quotient successif est impair. On pourra aussi s'appuyer sur la décomposition de p en base 2.

(2) On définit $\phi : \mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}^*$ par $\phi(m, n) = p$ où p est défini par (1). Montrer que ϕ est une bijection.

Exercice 3.

L'objet de cet exercice est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 1 (Théorème de Cantor). *Pour tout ensemble E , il n'existe aucune surjection de E sur $\mathcal{P}(E)$.*

Pour cela, on considèrera une application f quelconque E dans $\mathcal{P}(E)$ et la partie A définie par

$$A = \{x \in E, \quad x \notin f(x)\},$$

et on montrera que $A \notin \text{Im}(f)$.

Exercice 4.

L'objectif de cet exercice est de démontrer le lemme suivant :

Lemme 2. L'ensemble $\mathbb{R}$ est en bijection avec tout intervalle de $\mathbb{R}$, non réduit à singleton.

Traiter donc les questions suivantes :

- (1) Démontrer que $\mathbb{R}$ est en bijection avec $\mathbb{R}_+^*$ et $]0, 1[$.
- (2) Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Démontrer que $\mathbb{R}$ est en bijection avec les intervalles $]a, +\infty,]-\infty, a[$ et $]a, b[$.
- (3) Démontrer que $]0, 1]$ est en bijection avec $[0, 1]$.
- (4) Conclure.

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html>