POLYTECH LYON

Université Claude Bernard Lyon 1

Informatique 3A MFIappro — Automne 2025

Corrigé du contrôle Continu 1 du 21 janvier 2026

Correction de l'exercice 1.
Voir correction du QCM n° 1 en date du 21 janvier 2026, disponible sur Internet.

Correction de l'exercice 2.

(1) (a) Montrons tout d'abord l'existence du couple (m, n). Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On peut procéder de quatre façons :

(i) Considérons l'ensemble

$$\mathcal{A}_p = \left\{ r \in \mathbb{N}, \quad \frac{p}{2^r} \in \mathbb{N} \right\}, \tag{1}$$

qui est une partie non vide de $\mathbb{N}$ (elle contient 0). Montrons qu'elle est majorée. Pour cela, il suffit de montrer que

$$\exists r_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall r \geq r_0, \quad \frac{p}{2^r} \notin \mathbb{N}. \tag{2}$$

Puisque $\lim_{r \to +\infty} 2^r = +\infty$, il existe un entier r_0 tel que $2^{r_0} \geq 2p$ et donc $0 < p/2^{r_0} \leq 1/2$ ce qui implique

$$\exists r_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall r \geq r_0, \quad 0 < \frac{p}{2^r} \leq \frac{1}{2},$$

et donc *a fortiori* (2). Puisque toute partie non vide de $\mathbb{N}$ majorée admet un plus grand élément, $\mathcal{A}_p$ admet donc un plus grand élément, noté m. Ainsi, m appartient à $\mathcal{A}_p$ mais $m+1$ n'appartient pas à $\mathcal{A}_p$ (sinon on aurait un élément de $\mathcal{A}_p$ strictement plus grand que m, ce qui contredit son aspect plus grand élément). On a donc

$$\frac{p}{2^m} \in \mathbb{N}, \tag{3a}$$

$$\frac{p}{2^{m+1}} \notin \mathbb{N}. \tag{3b}$$

On a donc divisé p le plus possible de fois par deux jusqu'à obtenir un nombre impair. Posons donc, d'après (3a), $q = \frac{p}{2^m}$. L'entier q est impair. Sinon il est pair et il existe q' tel que $q = 2q'$ et donc

$$\frac{p}{2^{m+1}} = \frac{1}{2}\frac{p}{2^m} = \frac{q}{2} = q',$$

ce qui contredit (3b). Ainsi il existe un entier n tel que $\frac{p}{2^m} = 2n + 1$, et donc

$$p = 2^m(2n + 1). \tag{4}$$

(ii) On peut utiliser la décomposition de l'entier p en base 2 :

$$p = \sum_{k=0}^{q} a_k 2^k, \tag{5}$$

où q est entier, a_q est égal à 1, les a_i, pour $0 \leq k \leq q-1$ appartiennent à $\{0, 1\}$. Si aucun des a_k est nul, on a d'après (5)

$$\begin{aligned} p &= a_0 + \sum_{k=1}^{q} a_k 2^k, \\ &= 1 + 2n, \end{aligned}$$

où $n = 2\sum_{k=1}^{q} a_k 2^{k-1} \in \mathbb{N}$ Ainsi l'égalité (4) est donc vérifiée avec n et $m = 0$. Sinon, considérons le plus grand entier r, inférieur ou égal à q tel que

$$\forall k \in \{0, ..., r\}, \quad a_k = 0.$$

On a donc $r \leq q - 1$ (car $a_q = 1$) et $a_{r+1} = 1$ et donc d'après (5) :

$$\begin{aligned} p &= \sum_{k=0}^{r} a_k 2^k + \sum_{k=r+1}^{q} a_k 2^k, \\ &= 2^{r+1} \sum_{k=r+1}^{q} a_k 2^{k-r-1}, \\ &= 2^{r+1} \left(a_{r+1} + \sum_{k=r+2}^{q} a_k 2^{k-r-1} \right), \\ &= 2^{r+1} \left(1 + \sum_{k=r+2}^{q} a_k 2^{k-r-1} \right), \end{aligned}$$

et l'égalité (4) est donc vérifiée avec $m = r + 1$ et $n = \sum_{k=r+2}^{q} a_k 2^{k-r-1}$.

(iii) Si $p = 1$, l'égalité (4) est évidente en posant $m = n = 0$. On peut donc supposer $p \geq 2$ et utiliser sa décomposition en produits de facteurs premiers. On sait que tout entier p s'écrit

$$p = \prod_{i=1}^{q} p_i^{\alpha_i}, \tag{6}$$

où p_i est le i-ième nombre premier et α_i est un entier naturel. Puisque $p \geq 2$, $p_1 = 2$ et donc (6) implique

$$p = 2^{\alpha_1} M,$$

où

$$M = \prod_{i=2}^{q} p_i^{\alpha_i}.$$

Puisque pour $i \geq 2$, α_i est supérieur ou égal à 3 et est premier, M est impair et donc, on obtient (4) en posant $m = \alpha_1$ et $M = 2n + 1$.

(iv) On peut aussi faire une récurrence forte. On démontre

$$\mathcal{P}(p) : \quad \text{"}\exists (m, n) \in \mathbb{N}^2, \quad p = 2^m(2n + 1)\text{"}.$$

par récurrence forte sur $p \in \mathbb{N}^*$.

Pour $p = 1$, c'est immédiat : $1 = 2^0(2 \times 0 + 1)$.

Supposons maintenant $\mathcal{P}(p)$ vraie pour tout $k \in \{1, ..., p\}$ où $p \in \mathbb{N}^*$. Démontrons $\mathcal{P}(p + 1)$.

Si p est pair, $p + 1$ est impair et il existe n tel que $p + 1 = 2n + 1 = 2^0(2n + 1)$; on choisit donc $m = 0$. Sinon, $p + 1$ est pair et $p + 1 = 2q$ où $q \leq p$, puisque c'est équivalent à $(p + 1)/2 \leq p$ et donc à $p \geq 1$. D'après l'hypothèse de récurrence forte $\mathcal{P}(q)$ est vraie et donc il existe (m', n') tel que $q = 2^{m'}(2n' + 1)$. On a donc

$$p + 1 = 2q = 2 \times 2^{m'}(2n' + 1) = 2^{m'+1}(2n' + 1) = 2^m(2n + 1),$$

où on a posé $n' = n$ et $m = m' + 1$. Ainsi $\mathcal{P}(p + 1)$ est vraie.

(b) Montrons l'unicité du couple (m, n) vérifiant (4). Supposons qu'il existe deux couples distincts (m, n) et (m', n') tels que

$$2^m(2n+1) = 2^{m'}(2n'+1). \tag{7}$$

Si $m = m'$, alors il est immédiat que $n = n'$. Suposons donc $m \neq m'$ et sans perte de généralité que $m > m'$. Ainsi (7) implique

$$2^{m-m'}(2n'+1) = 2n'+1. \tag{8}$$

Puisque $m - m' \geq 1$, il existe $q \in$ rel que $2^{m-m'} = 2q$ et donc

$$2q(2n'+1) = 2n'+1. \tag{9}$$

Or $2q(2n'+1)$ est pair tandis que $2n'+1$ est impair, ce qui est absurde.

(2) D'après le point 1a page 1, ϕ est surjective. D'après le point 1b, ϕ est injective.

Correction de l'exercice 3.
On renvoie à [Bou06, page E III.30] et [AF87, Chapitre II, p.60].
A est une partie de E donc appartient à $\mathcal{P}(E)$. Supposons par l'absurde que $A \in \mathrm{Im}(f)$. Il existe donc $a \in E$ tel que $f(a) = A$. Si $a \in A = f(a)$, par définition de A, alors $a \notin f(a)$, ce qui est absurde. Au contraire, si $a \notin A = f(a)$, alors $a \in A$, ce qui est encore absurde.
Cela est vrai toute application f, qui ne peut donc être surjective, ce qui nous permet de conclure.

Correction de l'exercice 4.

(1) (a) On sait que la fonction exponentielle définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) En outre, il est immédiat que

$$\mathbb{R} \text{ est équipotent à }]0,1[. \tag{10}$$

où "être équipotent" signifie en bijection avec. À cet effet, on introduit la bijection classique de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$ donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{2}{\pi}\left(\arctan(x) + \frac{\pi}{2}\right), \tag{11}$$

puisque la fonction arctan est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$.

(2) (a) Il suffit de modifier le raisonnement de la question 1a, en remarquant que les applications $x \mapsto e^x + a$ et $x \mapsto -e^x + a$ constituent des bijections de $\mathbb{R}$ sur $]a, +\infty$ et sur $]-\infty, a[$

(b) Il suffit de modifier le raisonnement de la question 1b, en remarquant que la fonction donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (b-a)\left(\arctan(x) + \frac{\pi}{2}\right) + a, \tag{12}$$

est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]a, b[$.

(3) Exhibons une bijection explicite entre $G =]0,1[$ et $E = [0,1[$. En effet, si F est défini par

$$F = \left\{\frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}\right\}, \tag{13}$$

les ensembles F et $G \setminus F$ constituent une partition [1] de G. on considère l'application ϕ définie de F, dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in F \quad \phi(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = 1/2, \\ \frac{1}{n-1}, & \text{si } x \in F \text{ avec } x = 1/n. \end{cases}$$

1. Puisque $G = F \cup (G \setminus F)$ et $F \cap (G \setminus F) = \varnothing$.

Ainsi, les éléments $1/2$, $1/3$, $1/4$, ... de F ont pour image par ϕ, 0, $1/2$, $1/3$, $1/4$, ... et le lecteur vérifiera que ϕ est une bijection de F sur $\{0\} \cup F$. On définit l'application ψ de $G \setminus F$ sur $G \setminus F$ égale à l'identité, qui est clairement une bijection. Enfin, on définit l'application f de G dans $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in G, \quad f(x) = \begin{cases} \phi(x), & \text{si } x \in F, \\ \psi(x), & \text{si } x \in G \setminus F. \end{cases}$$

Ainsi, par construction f est une bijection de $]0,1[$ sur $[0,1[$.

Remarque 1. La bijection est nécessairement discontinue. En effet, il n'existe aucune bijection continue de $]0,1[$ sur $[0,1[$. Si c'était le cas, elle serait nécessairement strictement monotone [2]. Supposons, sans perte de généralité, que cette application, notée f, est strictement croissante. Alors, pour tout $x \in]0,1]$, $f(x) \geq 0$. Or d'après le théorème de la limite monotone, f admet une limite en 0^+, notée l qui ne peut donc qu'être positive. Ainsi par stricte croissance, pour tout $x > 0$, $f(x) > l \geq 0$. Et donc 0 n'est pas atteinte par f ce qui contredit que f est une bijection sur $[0,1]$.

(4) Tous les intervalles non réduits à un singletons de $\mathbb{R}$ sont les intervalles du type

(a) $\mathbb{R}$,

(b) $]a, +\infty,]-\infty, a[$ où $a \in \mathbb{R}$,

(c) $]a, b[$, où $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a < b$,

(d) $[a, +\infty,]-\infty, a]$ où $a \in \mathbb{R}$,

(e) $[a, b]$, $[a, b[$ et $]a, b]$, où $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a < b$.

Le cas 4a est immédiat ($\mathbb{R}$ est en bijection avec lui-même !), les cas 4b et 4c ont été traités dans les questions 1 et 2. Il ne reste plus qu'à traiter les cas 4d et 4e. Comme pour la question 3, on montre que $]a, b[$ est équipotent à $[a, b[$, ce qui permet de montrer que $\mathbb{R}$, équipotent à $]a, b[$, est équipotent à $[a, b[$. On montre ensuite, de même, que $[a, b[$ ou $]a, b]$ est équipotent à $[a, b]$. On montre enfin, comme pour la question 3, que $]a, +\infty$ (resp. $]-\infty, a[$) est équipotent à $[a, +\infty$ (resp. $]-\infty, a]$).

Références

[AF87] J.-M. Arnaudiès et H. Fraysse. *Cours de mathématiques. 1 : Algèbre*. Dunod Université : Ouvrages de Base. [Dunod University : Basic Works]. Ouvrage disponible à la bibliothèque de Mathématiques de Lyon 1 (cote : 510.7 DUN, niveau 4). Paris : Dunod, 1987, pages xx+691.

[Bou06] N. Bourbaki. *ÉLEMENTS DE MATHÉMATIQUES, Théorie des ensembles*. Ouvrage disponible à la bibliothèque de Mathématiques de Lyon 1 (cote : 511.32 BOU, niveau 4). Springer Libri, sept. 2006. 347 pages.

2. En effet, une application continue et injective sur un intervalle est nécessairement strictement monotone. Voir `https://chatgpt.com/share/696b9041-6ee0-8011-998e-6a5cd5ceb727`.