

Contrôle Continu 2 du 30 janvier 2026

Durée : 1,5 heure(s)

Documents autorisés (hors QCM) : OUI ☒ NON ☐

Autorisés : *Polycopiés de l'UE, notes manuscrites.*

Interdits : *Écrans (sauf tablette et ordinateurs en mode avion), Livres et Internet*

Calculatrice autorisée (hors QCM) : OUI ☒ NON ☐

Tout type

Exercice 1.

Durée : 25 minutes.

Voir sujet de QCM n° 2 distribué.

Aucun document, aucun écran autorisé pendant le temps de ce QCM.

Exercice 2.

Cet exercice a été traité en TD à l'automne 2025, enrichi des questions 1b, 1c, 1f, 2 et 3 qu'on traitera avec soin (plus que celles déjà traitées et pour lesquelles, on pourra se contenter de rappeler les résultats essentiels, sans preuve).

On emprunte une somme que l'on rembourse mois par mois à mensualité et à tau constant.

On appelle S la somme empruntée et $\tau > 0$ le taux d'emprunt (hors assurance) annuel, supposé constant et m la mensualité, supposée constante.

Au bout du n -ième mois ($n \in \mathbb{N}$), on appelle k_n le capital restant dû. Initialement, pour $n = 0$, on doit le capital k_0 .

À partir du premier mois, on rembourse, chaque mois, la mensualité, qui se décompose en un intérêt et un amortissement, qui représente le remboursement du capital (hors intérêt). On note donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$, i_n l'intérêt relatif au capital k_n et a_n , l'amortissement remboursé au n -ième mois. L'emprunt cessera lorsque le capital k_n devient négatif ou nul.

(1) (a) Exhiber des relations entre a_n , k_n et i_n et montrer que l'on a la relation

$$k_{n+1} = k_n \left(1 + \frac{\tau}{12}\right) - m. \quad (1)$$

(b) En déduire l'expressions de k_n , a_n et i_n .

(c) Réciproquement, montrer qu'avec ces expressions, on retrouve les relations montrées dans la question 1a.

- (d) Déterminer le plus grand entier n_0 tel que $k_{n_0} > 0$.
- (e) Déterminer le coût de l'emprunt, correspondant à la somme des intérêts.
- (f) Déterminer la mensualité et le coût du crédit si on choisit d'emprunter la somme

$$S = 100\,000 \text{ €},$$

avec un taux annuel égal à

$$\tau = 3,5\%,$$

sur une durée (en années) donnée par

$$N_0 = 20.$$

- (2) (a) Reprendre l'ensemble de la question 1 dans le cas où

$$\tau = 0. \tag{2}$$

- (b) Dans quel cas peut-on imaginer que l'on a (2) ?

- (3) (a) Reprendre l'ensemble de la question 1 dans le cas où

$$\tau < 0. \tag{3}$$

- (b) Dans quel cas peut-on imaginer que l'on a (3) ?

- (c) Déterminer la mensualité et le coût du crédit si on choisit d'emprunter la somme

$$S = 100\,000 \text{ €},$$

avec un taux annuel égal à

$$\tau = -0,75\%,$$

sur une durée (en années) donnée par

$$N_0 = 20.$$

Exercice 3.

Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = n^{\ln n} e^{-\sqrt{n}}.$$

On pourra montrer que

$$n^{\ln n} e^{-\sqrt{n}} \leq n^{-2}.$$

Exercice 4.

Soit

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3}. \tag{4}$$

- (1) Montrer que c'est une série alternée.

- (2) Donner une valeur approchée de S avec une erreur inférieure à 10^{-3} .

(3) On pose pour tout $p \in]0, +\infty[$

$$\tilde{\zeta}(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p},$$

et pour tout $p \in]1, +\infty[$

$$\zeta(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}.$$

- (a) Démontrer que $\tilde{\zeta}(p)$ et $\zeta(p)$ sont bien définies.
- (b) Déterminer S en fonction de $\zeta(3)$.
- (c) Pourrait-on faire le même calcul pour déterminer

$$\mathcal{S} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} ? \tag{5}$$

- (d) On donne

$$S = 0,901\,542\,677\,37.$$

Vérifier le calcul de la question 2.

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html>