

**Corrigé du contrôle Continu 2 du 30
janvier 2026****Correction de l'exercice 1.**

Voir correction du QCM n° 2 en date du 30 janvier 2026, disponible sur Internet.

Correction de l'exercice 2.

On renvoie à l'annexe P page 244 du cours, rappelée ici :

Emprunt hors assurance

Théorie

On emprunte une somme que l'on rembourse mois par mois à mensualité et à tau constant.

On appelle S la somme empruntée et τ le taux d'emprunt (hors assurance) annuel, supposé constant et m la mensualité, supposée constante.

Au bout du n -ième mois ($n \in \mathbb{N}$), on appelle k_n le capital restant dû. Initialement, pour $n = 0$, on doit le capital k_0 .

À partir du premier mois, on rembourse, chaque mois, la mensualité, qui se décompose en un intérêt et un amortissement, qui représente le remboursement du capital (hors intérêt). On note donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$, i_n l'intérêt relatif au capital k_n et a_n , l'amortissement remboursé au n -ième mois. L'emprunt cessera lorsque le capital k_n devient négatif ou nul.

Traduisons tout cela. Initialement, on a emprunté la somme S :

$$k_0 = S. \quad (1)$$

On suppose que

$$\text{le capital décroît, mois par mois,} \quad (2a)$$

$$\text{Il finit par devenir négatif} \quad (2b)$$

Nous vérifierons l'hypothèse (2) *a posteriori*. Ainsi, on peut définir n_0 par

$$\text{on note } n_0 \text{ le plus grand entier tel que } k_{n_0} > 0. \quad (3)$$

On a donc

$$\forall n \in \{0, \dots, n_0\}, \quad k_n > 0, \quad (4)$$

$$\forall n \in \{0, \dots, n_0 - 1\}, \quad k_n > k_{n+1}, \quad (5)$$

$$k_{n_0+1} \leq 0. \quad (6)$$

Puisque la mensualité se décompose en un intérêt et un amortissement, on a

$$\forall n \in \{0, \dots, n_0\}, \quad m = i_n + a_n. \quad (7)$$

Par définition de l'amortissement, on a

$$\forall n \in \{0, \dots, n_0\}, \quad k_{n+1} = k_n - a_n. \quad (8)$$

En effet, on rembourse la somme a_n (sans le capital) au bout du n -ième mois, qui se soustrait du capital restant dû au n -ième mois pour donner le nouveau capital restant dû au $n+1$ -ième mois. Par définition du taux annuel τ , on a

$$\forall n \in \{0, \dots, n_0\}, \quad i_n = \frac{\tau k_n}{12}. \quad (9)$$

D'après (7), (8) et (9), on a successivement

$$\begin{aligned} \forall n \in \{0, \dots, n_0\}, \quad k_{n+1} &= k_n - a_n, \\ &= k_n - m + i_n, \\ &= k_n - m + \frac{\tau k_n}{12}. \end{aligned}$$

Il vient donc

$$\forall n \in \{0, \dots, n_0\}, \quad k_{n+1} = k_n \left(1 + \frac{\tau}{12}\right) - m. \quad (10)$$

Si on pose

$$\rho = 1 + \frac{\tau}{12}, \quad (11)$$

on constate que $(k_n)_{0 \leq n \leq n_0+1}$ est une suite arithmético-géométrique. On renvoie au lemme 11.46 page 95 du cours que l'on utilise avec $a = \rho \neq 1$, $b = -m$ et la condition initiale (1). On a

$$\begin{aligned} \frac{b}{1-a} &= \frac{m}{\frac{\tau}{12}} = \frac{12m}{\tau}, \\ u_0 - \frac{b}{1-a} &= S - \frac{12m}{\tau} \end{aligned}$$

On a donc

$$\forall n \in \{0, \dots, n_0+1\}, \quad k_n = \rho^n (k_0 - K) + K,$$

et donc

$$\forall n \in \{0, \dots, n_0+1\}, \quad k_n = \left(1 + \frac{\tau}{12}\right)^n \left(S - \frac{12m}{\tau}\right) + \frac{12m}{\tau}. \quad (12)$$

Il est important de noter que l'on a

$$\frac{S\tau}{12} < m. \quad (13)$$

Cela signifie que la mensualité remboursée est supérieure à la somme $S\tau/12$ qui correspond à l'intérêt mensuel lié à la somme S empruntée. On rembourse bien au moins ce qu'il faut. En effet, d'après (9), on a $i_0 = \frac{\tau k_0}{12} = \frac{\tau S}{12}$ et donc

$$m > i_0. \quad (14)$$

Montrons maintenant que la suite k_n est décroissante. On a d'après (12)

$$\begin{aligned} k_{n+1} - k_n &= \left(1 + \frac{\tau}{12}\right)^{n+1} \left(S - \frac{12m}{\tau}\right) - \left(1 + \frac{\tau}{12}\right)^n \left(S - \frac{12m}{\tau}\right), \\ &= \left(1 + \frac{\tau}{12}\right)^n \left(S - \frac{12m}{\tau}\right) \left(1 + \frac{\tau}{12} - 1\right), \\ &= \left(1 + \frac{\tau}{12}\right)^n \frac{\tau}{12} \left(S - \frac{12m}{\tau}\right), \end{aligned}$$

et donc

$$k_{n+1} - k_n = \left(1 + \frac{\tau}{12}\right)^n \left(\frac{S\tau}{12} - m\right) \quad (15)$$

qui est bien strictement négatif d'après (13). L'hypothèse (2a) est donc bien vérifiée. Compte tenu de (13), on a¹

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} k_n = -\infty. \quad (16)$$

Ainsi, (1), (13) et (16) impliquent bien (2b).

Une fois que k_n est connu grâce à (12), on détermine i_n grâce à (9), puis a_n grâce à (7). Puisque la suite k_n est décroissante, i_n l'est aussi. Ainsi $i_{n_0} \leq i_0$ et d'après (14), il vient

$$m > i_{n_0}. \quad (17)$$

Par ailleurs, d'après (3) et (9), on a $i_{n_0} > 0$ et d'après (1), on a $i_0 > 0$. Ainsi, par monotonie, en utilisant de plus (17), on a

$$\forall n \in \{0, \dots, n_0\}, \quad i_n \in [0, m], \quad (18)$$

ce qui implique que a_n défini par (7) est bien positif.

Supposons maintenant que a_n , i_n et k_n sont définis par (7), (9) et (12). Montrons que, réciproquement ont lieux les équations de départ (1), (7) (immédiat), (8) et (9) (immédiat). (1) provient de (12) avec $n = 0$. Il ne reste plus qu'à montrer (8). On a déjà vu que (12) implique (15). Or, d'après (9) et (7) et (12) on a successivement

$$\begin{aligned} a_n &= m - i_n, \\ &= m - \frac{\tau k_n}{12}, \\ &= m - \frac{\tau}{12} \left(1 + \frac{\tau}{12}\right)^n \left(S - \frac{12m}{\tau}\right) - m, \\ &= -\frac{\tau}{12} \left(1 + \frac{\tau}{12}\right)^n \left(S - \frac{12m}{\tau}\right), \\ &= -\left(1 + \frac{\tau}{12}\right)^n \left(\frac{S\tau}{12} - m\right), \end{aligned}$$

quantité égale à $-k_{n+1} + k_n$ selon (15).

Calculons donc maintenant n_0 en utilisant (4) et (6) : n_0 vérifie donc

$$k_{n_0} > 0 \text{ et } k_{n_0+1} \leq 0, \quad (19)$$

ce qui est équivalent à

$$\left(1 + \frac{\tau}{12}\right)^{n_0} \left(S - \frac{12m}{\tau}\right) + \frac{12m}{\tau} > 0, \quad (20)$$

$$\left(1 + \frac{\tau}{12}\right)^{n_0+1} \left(S - \frac{12m}{\tau}\right) + \frac{12m}{\tau} \leq 0. \quad (21)$$

Ce système d'inéquations est équivalent à

$$\begin{aligned} n_0 &< -\frac{\ln\left(1 - \frac{S\tau}{12m}\right)}{\ln\left(1 + \frac{\tau}{12}\right)}, \\ n_0 + 1 &\geq -\frac{\ln\left(1 - \frac{S\tau}{12m}\right)}{\ln\left(1 + \frac{\tau}{12}\right)}. \end{aligned}$$

Ces deux inéquations sont équivalentes à

$$-n_0 \leq 1 + \frac{\ln\left(1 - \frac{S\tau}{12m}\right)}{\ln\left(1 + \frac{\tau}{12}\right)} < 1 - n_0 ;$$

1. D'un point de vue mathématique, la suite k_n est définie pour $n \in \mathbb{N}$, mais en pratique, on s'arrêtera pour l'entier n_0 défini par (3).

on a donc

$$n_0 = -E \left(1 + \frac{\ln \left(1 - \frac{S\tau}{12m} \right)}{\ln \left(1 + \frac{\tau}{12} \right)} \right), \quad (22)$$

où l'on rappelle que E désigne la partie entière. On vérifie que

$$n_0 \geq 0. \quad (23)$$

Au bout de $n_0 + 1$ mois, le capital k_{n_0+1} est négatif ou nul. On ne s'intéressera donc qu'aux suites $(a_n)_{0 \leq n \leq n_0}$, $(i_n)_{0 \leq n \leq n_0}$ et $(k_n)_{0 \leq n \leq n_0+1}$, avec $k_{n_0+1} < 0$.

D'après (9) et (12), on a

$$\forall i \in \{0, \dots, n_0\}, \quad i_n = \frac{\tau k_n}{12} = \left(1 + \frac{\tau}{12} \right)^n \left(\frac{S\tau}{12} - m \right) + m. \quad (24)$$

D'après (7), on a donc

$$\forall i \in \{0, \dots, n_0\}, \quad a_n = \left(1 + \frac{\tau}{12} \right)^n \left(m - \frac{S\tau}{12} \right). \quad (25)$$

Le coût de l'emprunt est égal à la somme des intérêts. On peut calculer cette somme en utilisant l'équation (11.45) du cours et la relation (24). Mais plus simplement, le coût de l'emprunt est égal à ce qu'on a donné à la banque otée de ce qu'elle nous a donné; on a payé pendant les mois 0 à n_0 une mensualité m et donc

$$C = m(n_0 + 1) - S. \quad (26)$$

Récapitulons tous ces résultats : on se donne

- Une somme à emprunter $S > 0$;
- un taux annuel τ ;
- une mensualité m .

On suppose que

$$\boxed{\frac{S\tau}{12} < m},$$

ce qui traduit que l'intérêt de la somme S sur un mois est inférieur à la mensualité.

Sous cette hypothèse,

$$\boxed{\text{le crédit cesse au } n_0\text{-ième mois.}} \quad (27)$$

avec

$$\boxed{n_0 = -E \left(1 + \frac{\ln \left(1 - \frac{S\tau}{12m} \right)}{\ln \left(1 + \frac{\tau}{12} \right)} \right) \in \mathbb{N}.} \quad (28)$$

On a alors

$$\boxed{\forall n \in \{0, \dots, n_0 + 1\}, \quad k_n = \begin{cases} S & \text{si } n = 0, \\ \left(1 + \frac{\tau}{12} \right)^n \left(S - \frac{12m}{\tau} \right) + \frac{12m}{\tau} & \text{si } 1 \leq n \leq n_0, \\ 0 & \text{si } n = n_0 + 1. \end{cases}} \quad (29)$$

On a aussi l'amortissement

$$\boxed{\forall n \in \{0, \dots, n_0\}, \quad a_n = \left(1 + \frac{\tau}{12} \right)^n \left(m - \frac{S\tau}{12} \right).} \quad (30)$$

et l'intérêt

$$\boxed{\forall n \in \{0, \dots, n_0\}, \quad i_n = \left(1 + \frac{\tau}{12} \right)^n \left(\frac{S\tau}{12} - m \right) + m} \quad (31)$$

On a enfin le coût total du crédit :

$$\boxed{C = m(n_0 + 1) - S.} \quad (32)$$

Remarque 1.

Étudions ce qui se passe quand $\tau = 0$, situation qui peut arriver dans un prêt d'honneur ou familial, jamais bancaire !

- (1) Il est clair que le coût du crédit est nul, puisqu'il n'y a aucun intérêt !
- (2) Pour la mensualité et la durée, du crédit, on donne deux façons de procéder.
 - (a) On reprend les équations (1), (7), (8) et (9) qui donnent (1), (7), (8) et

$$\forall n \in \{0, \dots, n_0\}, \quad i_n = 0, \quad (33)$$

ce qui donne donc

$$\forall n \in \{0, \dots, n_0\}, \quad m = a_n, \quad (34)$$

et

$$\forall n \in \{0, \dots, n_0\}, \quad k_{n+1} = k_n - m. \quad (35)$$

La suite k_n est donc cette fois-ci arithmétique et (12) est remplacée par

$$\forall n \in \{0, \dots, n_0 + 1\}, \quad k_n = S - nm. \quad (36)$$

Elle est toujours décroissante. On laisse au lecteur le soin de vérifier que (19) fournit

$$\frac{S}{m} > n_0 \text{ et } \frac{S}{m} \leq n_0 + 1,$$

et donc

$$\frac{S}{m} > n_0 \text{ et } \frac{S}{m} \leq n_0 + 1, \quad (37)$$

et donc (22) est remplacée par

$$n_0 = -1 - E\left(-\frac{S}{m}\right). \quad (38)$$

On vérifie que (23) a lieu. En effet, on a nécessairement $-\frac{S}{m} < 0$ et donc

$$E\left(-\frac{S}{m}\right) \leq -1$$

et donc

$$-E\left(-\frac{S}{m}\right) \geq 1.$$

- (b) On peut aussi faire un passage à la limite $\tau \rightarrow 0$ dans les équations (12) et (22). On écrit le développement limité usuel quand u tend vers zéro : pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$

$$(1 + u)^\alpha = 1 + \alpha u + o(u),$$

et donc pour n fixé, on a, pour $\tau > 0$

$$\left(1 + \frac{\tau}{12}\right)^n = 1 + \frac{n\tau}{12} + o(\tau)$$

et d'après (12), on a successivement :

$$\begin{aligned} k_n &= \left(1 + \frac{n\tau}{12} + o(\tau)\right) \left(S - \frac{12m}{\tau}\right) + \frac{12m}{\tau}, \\ &= S - \frac{12m}{\tau} + \frac{Sn\tau}{12} - \frac{n\tau}{12} \frac{12m}{\tau} + \frac{12m}{\tau} + o(1), \\ &= S + \frac{Sn\tau}{12} - nm + o(1), \\ &= S - nm + o(1), \end{aligned}$$

et quand $\tau \rightarrow 0$, on retrouve (36). De même, si on passe à la limite dans (22), on écrit le développement limité usuel quand u tend vers zéro :

$$\ln(1+u) = u + o(u),$$

ce qui donne, pour $\tau > 0$:

$$\begin{aligned} n_0 &= -E \left(1 + \frac{\ln \left(1 - \frac{S\tau}{12m} \right)}{\ln \left(1 + \frac{\tau}{12} \right)} \right), \\ &= -E \left(1 + \frac{-\frac{S\tau}{12m} + o(\tau)}{\frac{\tau}{12} + o(\tau)} \right), \\ &= -E \left(1 + \frac{-\frac{S}{12m} + o(1)}{\frac{1}{12} + o(1)} \right), \end{aligned}$$

et quand $\tau \rightarrow 0$

$$n_0 = -E \left(1 - \frac{\frac{S}{12m}}{\frac{1}{12}} \right),$$

ce qui redonne bien (38).

Remarque 2. Étudions maintenant ce qui se passe quand

$$\tau < 0, \tag{39}$$

situation qui est déjà arrivée au Japon où l'on a connu

$$\tau = -0,1\%, \tag{40a}$$

ou en Suisse avec

$$\tau = -0,75\%. \tag{40b}$$

Voir par exemple <https://www.lafinancepourtous.com/decryptages/finance-perso/banque-et-credit/taux-d-interet/comment-expliquer-les-taux-dinteret-negatifs/>. Les formules algébriques indépendantes du signe de τ (1), (7) et (9) sont évidemment encore valables ainsi que leur conséquences, les équations (7), (9) et (12). Là encore, on a besoin des hypothèses (2) et de la définition (3). La décroissance de k_n défini par (12) aura lieu cette fois-ci si

$$1 + \frac{\tau}{12} > 0, \tag{41a}$$

et

$$S - \frac{12m}{\tau} > 0. \tag{41b}$$

Compte tenu de (39), (41b) est toujours vraie et (41a) est vraie ssi

$$\tau > -12, \tag{42}$$

hypothèse que l'on fera pour toute la suite. L'entier n_0 est encore défini par (22) et compte tenu de (42), on a encore (23). Rien ne change donc, excepté le fait que i_n donné par (24) est négatif et que la somme des intérêts (26) l'est aussi et cet intérêt rapporte donc de l'argent à l'emprunteur.

En pratique

En pratique, pour simplifier le calcul, les banques calculent une mensualité de telle sorte que le dernier capital restant dû, k_{n_0+1} , soit exactement nul.

Les variables d'entrée sont

- Une somme à emprunter $S > 0$;
- un taux annuel $\tau > 0$;
- le nombre d'année ou le nombre de mois n_0 .

On calcule alors la mensualité m en écrivant, grâce à (21) que le capital restant dû k_{n_0+1} est exactement nul, ce qui fournit

$$\left(1 + \frac{\tau}{12}\right)^{n_0+1} \left(S - \frac{12m}{\tau}\right) + \frac{12m}{\tau} = 0.$$

et donc

$$m \frac{12}{\tau} \left(1 - \left(1 + \frac{\tau}{12}\right)^{n_0+1}\right) = -S \left(1 + \frac{\tau}{12}\right)^{n_0+1}$$

soit encore

$$m = \frac{S \left(1 + \frac{\tau}{12}\right)^{n_0+1}}{\frac{12}{\tau} \left(\left(1 + \frac{\tau}{12}\right)^{n_0+1} - 1\right)}$$

soit encore

$$m = \frac{S\tau/12}{1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{\tau}{12}\right)^{n_0+1}}}. \quad (43)$$

mois	intérêt	amortissement	capital restant dû (après échéance)	mensualité
0 (avant le début)	0	0	$k_0 = S$	
1 (premier mois du crédit)	i_0	a_0	k_1	m
2	i_1	a_1	k_2	m
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$j + 1$	i_j	a_j	k_{j+1}	m
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n_0	i_{n_0-1}	a_{n_0-1}	$k_{n_0} > 0$	m
$n_0 + 1$ (dernier mois du crédit)	i_{n_0}	a_{n_0}	$k_{n_0+1} = 0$	m

TABLEAU 1. Un tableau d'amortissement.

Les tableaux d'amortissement des banques sont souvent donnés sous la forme du tableau 1.

On peut donc remplacer en fait la définition (27) par

$$\boxed{\text{le crédit cesse au } n_0 + 1\text{-ième mois.}} \quad (44)$$

Dans ce cas,

$$\boxed{\text{la durée en mois du crédit est } n_0 + 1.} \quad (45)$$

Remarque 3. Quand $\tau = 0$, on reprend les résultats de la remarque 1. On calcule alors la mensualité m en écrivant, grâce à (37) que le capital restant dû k_{n_0+1} est exactement nul, ce qui donne :

$$n_0 = \frac{S}{m} - 1,$$

Ainsi, (43) est remplacé par

$$\boxed{n_0 = \frac{S}{n_0 + 1}.} \quad (46)$$

Ainsi, (27) est valable et (28) (29), (30), (31) et (32) sont remplacés de la façon suivante. On a

$$\forall n \in \{0, \dots, n_0 + 1\}, \quad k_n = \begin{cases} S & \text{si } n = 0, \\ S - nm & \text{si } 1 \leq n \leq n_0, \\ 0 & \text{si } n = n_0 + 1. \end{cases} \quad (47)$$

On a aussi l'amortissement

$$\boxed{\forall n \in \{0, \dots, n_0\}, \quad a_n = k_n.} \quad (48)$$

et l'intérêt

$$\boxed{\forall n \in \{0, \dots, n_0\}, \quad i_n = 0.} \quad (49)$$

On a enfin le coût total du crédit :

$$\boxed{C = 0.} \quad (50)$$

Remarque 4. Quand $\tau < 0$, on reprend les résultats de la remarque 2 et (43) et le tableau 1 page précédente sont encore valables.

Remarque 5. Parfois, les calculs des banques sont légèrement différents, dans la mesure où ils tiennent compte, pour ne pas perdre un centime, du fait que les mois n'ont pas le même nombre de jours.

Voir la fonction matlab `emprunt_brut.m` dont les principaux paramètres d'entrée sont

- `S` : capital emprunté
- `tau` : tau nominal annuel annoncé sans assurance, en
- `n0an` : nombre d'années

Exemple 6. Par exemple, si on tape (on peut être en euro ou en milliers d'euro)

```
[m,C,capitalan,capitalmois,amortissement,interet]=emprunt_brut(100,4,1)
```

on obtient

```
m =
    8.5150
C =
    2.1799
capitalan =
    100    0
capitalmois =
    100.0000  91.8183  83.6094  75.3731  67.1094  58.8181  50.4992
    42.1525  33.7780  25.3756  16.9452   8.4867   0
amortissement =
    0  8.1817  8.2089  8.2363  8.2637  8.2913  8.3189
    8.3467  8.3745  8.4024  8.4304  8.4585  8.4867
interet =
    0  0.3333  0.3061  0.2787  0.2512  0.2237  0.1961
    0.1683  0.1405  0.1126  0.0846  0.0565  0.0283
```

et si l'on tape

```
[m,C,capitalan,capitalmois,amortissement,interet]=emprunt_brut(100,4,1,'exemple','exemple')
```

qui fournit l'exemple `exemple.ods`.

Exemple 7. Déterminer la mensualité et le coût du crédit si on choisit d'emprunter la somme

$$S = 100\,000 \text{ €},$$

avec un taux annuel égal à

$$\tau = 3,5\%,$$

sur une durée (en années) donnée par

$$N_0 = 20.$$

La mensualité est de

$$m = 579,96 \text{ €},$$

avec un coût égal à

$$C = 39\,190,33 \text{ €},$$

non négligeable !

On pourra vérifier les calculs avec les nombreux simulateurs de crédit disponible sur le web, comme par exemple <https://www.calculatrice-credit.fr/>.

mois	intérêt	amortissement	capital restant dû (après échéance)
0	0	0	100 000
1	291,67	288,29	99 711,71
2	290,83	289,13	99 422,57
3	289,98	289,98	99 132,6
4	289,14	290,82	98 841,77
5	288,29	291,67	98 550,1
6	287,44	292,52	98 257,58
7	286,58	293,38	97 964,2
8	285,73	294,23	97 669,97
9	284,87	295,09	97 374,88
232	15,	564,96	4 579,37
233	13,36	566,6	4 012,77
234	11,7	568,26	3 444,51
235	10,05	569,91	2 874,6
236	8,38	571,58	2 303,02
237	6,72	573,24	1 729,78
238	5,05	574,91	1 154,86
239	3,37	576,59	578,27
240	1,69	578,27	0

TABLEAU 2. Un tableau d'amortissement (début et fin).

On a indiqué dans le tableau 2 le début et la fin du tableau d'amortissement.

On peut constater en figure 1 page suivante, la part très importante de l'intérêt dans la mensualité qui diminue jusqu'à être très faible en fin de crédit.

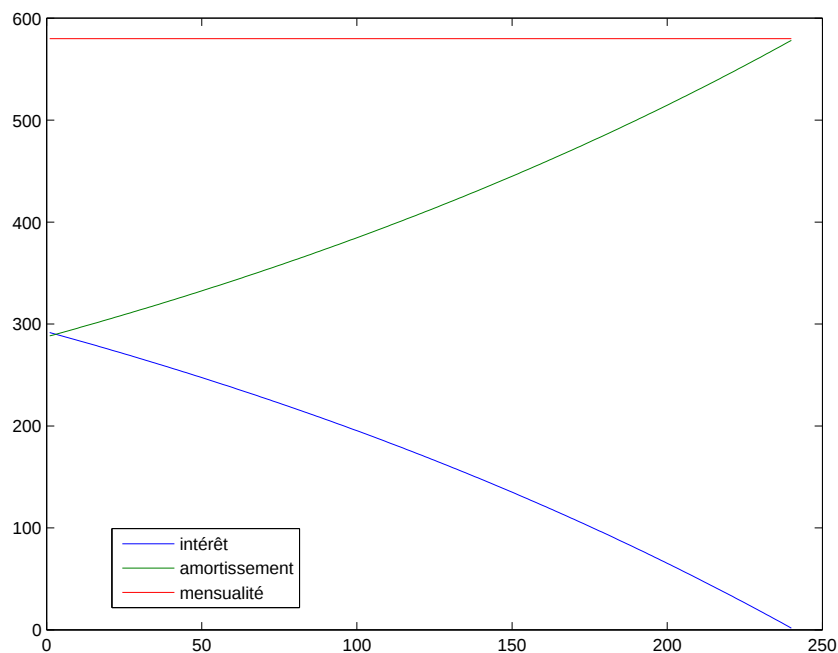


FIGURE 1. L'amortissement et l'intérêt au cours du temps (en mois).

Exemple 8.

Prenons exemple de l'emprunt réel dont le tableau d'amortissement figure sur la figure 2 page ci-contre et le tableau 3 page 12. Pour avoir un calcul en nombre d'année, seules les deux dernières années ont été prises en compte. On a donc la somme à emprunter

$$S = 23\,271,42 \text{ €},$$

avec un taux annuel égal à

$$\tau = 1,2\%,$$

sur une durée (en années) donnée par

$$N_0 = 2.$$

La mensualité déterminée avec nos calculs est de

$$m = 981,81 \text{ €},$$

avec un coût égal à

$$C = 292,01 \text{ €},$$

très faible vu le taux et la durée faibles du crédit, ce qui est confirmé par la figure 3 page 14. On pourra comparer le tableau 2 page précédente, déterminé avec nos calculs, avec le tableau 3 page 12, qui mettent en évidence une seule différence sur la dernière mensualité (une petite différence de 1,95 centimes) et sur le dernier amortissement (une différence petite de 0,02 centimes) les autres colonnes (intérêt et amortissement) étant identiques.

N° de contrat : 001
 Crédit : 001
 Objet : REPRISE PRET EXTERNE

Montant restant dû à la date de paiement de la dernière échéance : 29 954,43 €
 Dont intérêts déjà différés : 0,00 €

Taux hors assurances : 1,200 % l'an Fixe

Remboursable en 31 échéance(s) de périodicité : Mensuelle

Échéance	Date d'échéance	Amortissements	Intérêts	Intérêts différés	Assurances	Total à payer	Capital restant dû après échéance
126	05/02/2026	951,86	29,95			981,81	29002,57
127	05/03/2026	952,81	29,00			981,81	28049,76
128	05/04/2026	953,76	28,05			981,81	27096,00
129	05/05/2026	954,71	27,10			981,81	26141,29
130	05/06/2026	955,67	26,14			981,81	25185,62
131	05/07/2026	956,62	25,19			981,81	24229,00
132	05/08/2026	957,58	24,23			981,81	23271,42
133	05/09/2026	958,54	23,27			981,81	22312,88
134	05/10/2026	959,50	22,31			981,81	21353,38
135	05/11/2026	960,46	21,35			981,81	20392,92
136	05/12/2026	961,42	20,39			981,81	19431,50
137	05/01/2027	962,38	19,43			981,81	18469,12
138	05/02/2027	963,34	18,47			981,81	17505,78
139	05/03/2027	964,30	17,51			981,81	16541,48
140	05/04/2027	965,27	16,54			981,81	15576,21
141	05/05/2027	966,23	15,58			981,81	14609,98
142	05/06/2027	967,20	14,61			981,81	13642,78
143	05/07/2027	968,17	13,64			981,81	12674,61
144	05/08/2027	969,14	12,67			981,81	11705,47
145	05/09/2027	970,10	11,71			981,81	10735,37
146	05/10/2027	971,07	10,74			981,81	9764,30
147	05/11/2027	972,05	9,76			981,81	8792,25
148	05/12/2027	973,02	8,79			981,81	7819,23
149	05/01/2028	973,99	7,82			981,81	6845,24
150	05/02/2028	974,96	6,85			981,81	5870,28
151	05/03/2028	975,94	5,87			981,81	4894,34
152	05/04/2028	976,92	4,89			981,81	3917,42
153	05/05/2028	977,89	3,92			981,81	2939,53
154	05/06/2028	978,87	2,94			981,81	1960,66
155	05/07/2028	979,85	1,96			981,81	980,81
156	05/08/2028	980,81	0,98			981,79	0,00

FIGURE 2. Un tableau d'amortissement réel.

Exemple 9. Déterminer la mensualité et le coût du crédit si on choisit d'emprunter la somme

$$S = 100\,000 \text{ €},$$

avec un taux annuel égal à

$$\tau = -0,75\%,$$

sur une durée (en années) donnée par

$$N_0 = 20.$$

La mensualité est de

$$m = 386,07 \text{ €},$$

avec un coût égal à

$$C = -7\,343,76 \text{ €},$$

négatif!

On pourra vérifier les calculs de nouveau avec le simulateur de crédit <https://www.calculatrice-credit.fr/> qui marche encore pour $\tau < 0$.

On a indiqué dans le tableau 5 page 15 le début et la fin du tableau d'amortissement.

Échéance	Date d'échéance	amortissement	intérêt	mensualité	capital restant dû après échéance
0		0	0	0	23 271,42
1	05/09/26	958,54	23,27	981,81	22 312,88
2	05/10/26	959,5	22,31	981,81	21 353,38
3	05/11/26	960,46	21,35	981,81	20 392,92
4	05/12/26	961,42	20,39	981,81	19 431,5
5	05/01/27	962,38	19,43	981,81	18 469,12
6	05/02/27	963,34	18,47	981,81	17 505,78
7	05/03/27	964,3	17,51	981,81	16 541,48
8	05/04/27	965,27	16,54	981,81	15 576,21
9	05/05/27	966,23	15,58	981,81	14 609,98
10	05/06/27	967,2	14,61	981,81	13 642,78
11	05/07/27	968,17	13,64	981,81	12 674,61
12	05/08/27	969,14	12,67	981,81	11 705,47
13	05/09/27	970,1	11,71	981,81	10 735,37
14	05/10/27	971,07	10,74	981,81	9 764,3
15	05/11/27	972,05	9,76	981,81	8 792,25
16	05/12/27	973,02	8,79	981,81	7 819,23
17	05/01/28	973,99	7,82	981,81	6 845,24
18	05/02/28	974,96	6,85	981,81	5 870,28
19	05/03/28	975,94	5,87	981,81	4 894,34
20	05/04/28	976,92	4,89	981,81	3 917,42
21	05/05/28	977,89	3,92	981,81	2 939,53
22	05/06/28	978,87	2,94	981,81	1 960,66
23	05/07/28	979,85	1,96	981,81	980,81
24	05/08/28	980,81	0,98	981,79	0

TABLEAU 3. Un tableau d'amortissement réel (deux dernières années).

On peut constater en figure 4 page 14, les intérêts négatifs et l'amortissement supérieur donc à la mensualité.

Emprunt avec assurance et divers frais

Les divers frais sont souvent

- assurance : assurance en %, sur le montant réellement emprunté (à payer par an) ;
- frais de dossier, fixes à payer en début d'emprunt ;
- caution à payer en début d'emprunt (sur fonds propres) ;
- pourcentage de la caution à récupérer en fin d'emprunt.

Parfois, une restitution est à prévoir en fin de prêts, comme pourcentage de la caution.

Voir la fonction matlab `emprunt_tot.m`.

Correction de l'exercice 3.

Exercice 1936 issu de <http://exo7.emath.fr/>, par Gineste et Lévi Operman 01/11/2001

On donne deux façon de procéder

- (1) Montrons que $n^{\ln n} e^{-\sqrt{n}} \leq n^{-2}$. On remarque que $n^{\ln n} e^{-\sqrt{n}} = e^{(\ln n)^2} e^{-\sqrt{n}}$. Or pour u assez grand $4u^2 + 4u \leq e^u$, soit $4u^2 - e^u \leq -4u$. En posant $u = \ln \sqrt{n} = \frac{1}{2} \ln n$, il vient $\ln^2 n - \sqrt{n} \leq -2 \ln n$. D'où

$$\underbrace{e^{\ln^2 n - \sqrt{n}}}_{n^{\ln n} e^{-\sqrt{n}}} \leq \underbrace{e^{-2 \ln n}}_{\frac{1}{n^2}}$$

mois	intérêt	amortissement	capital restant dû (après échéance)
0	0	0	23 271,42
1	23,27	958,54	22 312,88
2	22,31	959,5	21 353,39
3	21,35	960,46	20 392,93
4	20,39	961,42	19 431,51
5	19,43	962,38	18 469,13
6	18,47	963,34	17 505,79
7	17,51	964,3	16 541,49
8	16,54	965,27	15 576,22
9	15,58	966,23	14 609,99
10	14,61	967,2	13 642,79
11	13,64	968,17	12 674,62
12	12,67	969,13	11 705,49
13	11,71	970,1	10 735,38
14	10,74	971,07	9 764,31
15	9,76	972,05	8 792,27
16	8,79	973,02	7 819,25
17	7,82	973,99	6 845,26
18	6,85	974,96	5 870,29
19	5,87	975,94	4 894,35
20	4,89	976,92	3 917,44
21	3,92	977,89	2 939,55
22	2,94	978,87	1 960,68
23	1,96	979,85	980,83
24	0,98	980,83	0

TABLEAU 4. Un tableau d'amortissement.

Par comparaison, la série de terme général $n^{\ln n} e^{-\sqrt{n}}$ est donc convergente car la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ est convergente.

(2) On peut aussi remarquer que

$$\begin{aligned}
 n^2 u_n &= n^2 n^{\ln n} e^{-\sqrt{n}}, \\
 &= e^{2 \ln n + \ln(n)^2 - \sqrt{n}}, \\
 &= e^{-\sqrt{n} \left(1 - \frac{\ln(n)^2}{\sqrt{n}} - \frac{2 \ln n}{\sqrt{n}}\right)},
 \end{aligned}$$

expression qui tend vers zéro quand n tend vers l'infini car $1 - \frac{\ln(n)^2}{\sqrt{n}} - \frac{2 \ln n}{\sqrt{n}}$ tend vers 1. On conclut en utilisant la règle de Riemann (voir la propriété 12.24 du cours).

Correction de l'exercice 4.

Exercice 1931 issu de <http://exo7.emath.fr/>, par Roussel 01/09/2001

(1) La série est convergente car alternée (voir théorème 12.14 page 103 du cours). En effet, $\frac{1}{n^3}$ tend vers zéro en décroissant, puisque $n < n+1$ et donc $1/(n+1)^3 < 1/n^3$

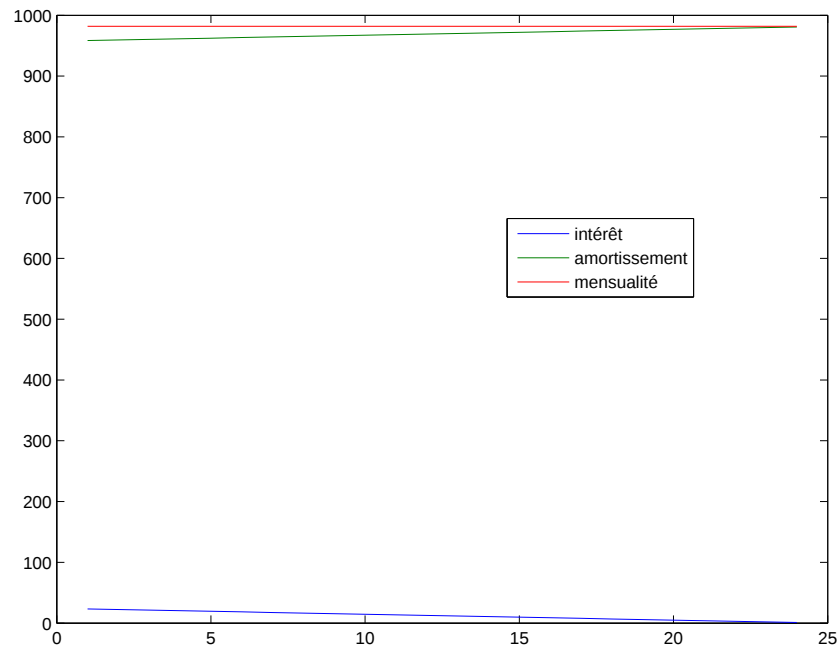


FIGURE 3. L'amortissement et l'intérêt au cours du temps (en mois).

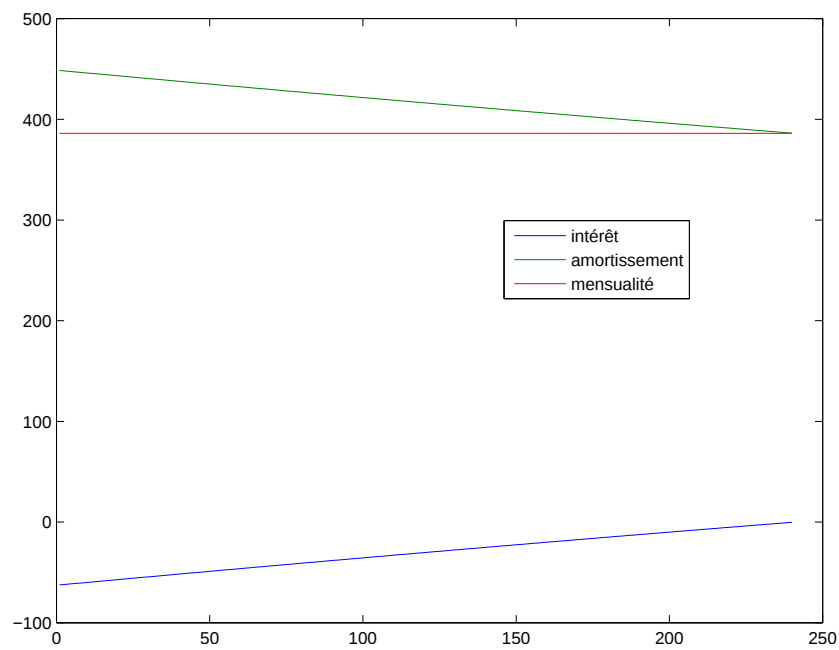


FIGURE 4. L'amortissement et l'intérêt au cours du temps (en mois).

Remarque 10. Elle est aussi absolument convergente, série de Riemann avec un exposant égal à 3, mais il est indispensable d'évoquer la série alternée pour le point suivant.

mois	intérêt	amortissement	capital restant dû (après échéance)
0	0	0	100 000
1	-62,5	448,57	99 551,43
2	-62,22	448,29	99 103,15
3	-61,94	448,01	98 655,14
4	-61,66	447,73	98 207,41
5	-61,38	447,45	97 759,96
6	-61,1	447,17	97 312,8
7	-60,82	446,89	96 865,91
8	-60,54	446,61	96 419,3
9	-60,26	446,33	95 972,97
232	-2,18	388,25	3 097,25
233	-1,94	388,	2 709,24
234	-1,69	387,76	2 321,48
235	-1,45	387,52	1 933,96
236	-1,21	387,28	1 546,69
237	-0,97	387,03	1 159,65
238	-0,72	386,79	772,86
239	-0,48	386,55	386,31
240	-0,24	386,31	0

TABLEAU 5. Un tableau d'amortissement (début et fin).

- (2) Le reste à l'ordre N est majoré par $1/(N+1)^3$. Voir en effet l'inégalité (12.15a) du cours. Il faut donc choisir N tel que $N+1 \geq \sqrt[3]{1/\varepsilon}$ soit

$$N \geq \sqrt[3]{1/\varepsilon} - 1$$

et donc numériquement $N = 9$. On trouve

$$S \approx S_N = 0,902\,116\,476.$$

- (3) (a) Remarquons que la série $\tilde{\zeta}(p)$ donnée pour tout $p \in]0, +\infty[$ par

$$\tilde{\zeta}(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}, \quad (51)$$

est une série alternée (même justification que dans la question 1) et que la série $\zeta(p)$ donnée pour tout $p \in]1, +\infty[$ par

$$\zeta(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \quad (52)$$

est une série absolument convergente (même justification que dans la remarque 10).

- (b) Remarquons que l'on peut écrire (chacune des deux sommes existent, puisque convergentes ; on admet que l'on peut scinder la somme en deux)

$$\begin{aligned}
 \tilde{\zeta}(p) &= \sum_{\substack{n=1, \\ n \text{ pair}}}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p} + \sum_{\substack{n=1, \\ n \text{ impair}}}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}, \\
 &= \sum_{q=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2q-1}}{(2q)^p} + \sum_{\substack{n=1, \\ n \text{ impair}}}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}, \\
 &= -\frac{1}{2^p} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q^p} + \sum_{\substack{n=1, \\ n \text{ impair}}}^{\infty} \frac{1}{n^p},
 \end{aligned}$$

et donc

$$\tilde{\zeta}(p) = -\frac{1}{2^p} \zeta(p) + \sum_{\substack{n=1, \\ n \text{ impair}}}^{\infty} \frac{1}{n^p}. \quad (53)$$

Remarquons aussi que l'on peut écrire (chacune des deux sommes existent, puisqu'absolument convergentes ; on admet que l'on peut scinder la somme en deux) exactement de la même façon (sans les coefficients $(-1)^{n-1}$)

$$\zeta(p) = \sum_{\substack{n=1, \\ n \text{ pair}}}^{\infty} \frac{1}{n^p} + \sum_{\substack{n=1, \\ n \text{ impair}}}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \quad (54)$$

$$= \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{(2q)^p} + \sum_{\substack{n=1, \\ n \text{ impair}}}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \quad (55)$$

$$= \frac{1}{2^p} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q^p} + \sum_{\substack{n=1, \\ n \text{ impair}}}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \quad (56)$$

$$= \frac{1}{2^p} \zeta(p) + \sum_{\substack{n=1, \\ n \text{ impair}}}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \quad (57)$$

et donc

$$\sum_{\substack{n=1, \\ n \text{ impair}}}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \left(1 - \frac{1}{2^p}\right) \zeta(p). \quad (58)$$

Si l'on utilise (53) et (58), il vient donc successivement

$$\begin{aligned}
 \tilde{\zeta}(p) &= -\frac{1}{2^p} \zeta(p) + \sum_{\substack{n=1, \\ n \text{ impair}}}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \\
 &= -\frac{1}{2^p} \zeta(p) + \left(1 - \frac{1}{2^p}\right) \zeta(p),
 \end{aligned}$$

et donc

$$\tilde{\zeta}(p) = \frac{2^{p-1} - 1}{2^{p-1}} \zeta(p). \quad (59)$$

En particulier pour $p = 3$, (59) donne, après calculs

$$S = \frac{3}{4} \zeta(3). \quad (60)$$

Remarque 11. Justifions correctement (53) et (58). On écrit, pour N fixé (qui prend la place de ∞ dans les calculs précédents)

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n-1}}{n^p} &= \sum_{\substack{n=1, \\ n \text{ pair}}}^N \frac{(-1)^{n-1}}{n^p} + \sum_{\substack{n=1, \\ n \text{ impair}}}^N \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}, \\ &= \sum_{q=1}^N \frac{(-1)^{2q-1}}{(2q)^p} + \sum_{\substack{n=1, \\ n \text{ impair}}}^N \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}, \\ &= -\frac{1}{2^p} \sum_{q=1}^{2N} \frac{1}{q^p} + \sum_{\substack{n=1, \\ n \text{ impair}}}^N \frac{1}{n^p}, \end{aligned}$$

et on obtient (53) en faisant tendre N vers l'infini. (58) s'obtient exactement de la même façon.

Ces calculs peuvent aussi être justifiés en utilisant le fait que des séries absolument sommables (pour $p > 1$, ici) sont sommables dans tous les sens, soit dans l'ordre que l'on veut !!

(c) On ne peut faire le même calcul pour

$$\mathcal{S} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \quad (61)$$

puisque ici, il faudrait utiliser $\zeta(1)$, somme qui diverge (somme de Riemann avec un exposant 1) !

Cependant, grâce aux résultats de [Bas22, l'annexe "Quelques calculs explicites de sommes de Séries", section "Calcul par les séries entières"], on peut montrer que la somme donnée par (61) vaut $\ln(2)$.

(d) La fonction ζ étant tabulée, grâce à (60), on vérifie que *a posteriori* que

$$|S - S_N| = |0,901\,542\,677 - 0,902\,116\,476| = 5,737\,98 \times 10^{-4} \leq \varepsilon.$$

Références

- [Bas22] J. BASTIEN. *Outils Mathématiques pour l'Ingénieur 3*. Notes de cours de l'UV OMI3 (Département Mécanique) de Polytech Lyon, disponible sur le web : <http://utbmjb.cherz-alice.fr/Polytech/index.html>, rubrique "Mécanique 4A : Outils Mathématiques pour l'Ingénieur 3". 2022. 269 pages.