Université Claude Bernard Lyon 1

Informatique 3A MFIappro — Automne 2024

QCM (maison) pour le 20 janvier 2025

Important :
Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter aucune, une ou plusieurs bonnes réponses. Les autres questions ont une unique bonne réponse.

Ce QCM est en principe modifiable à l'écran et vous devez cocher les cases manuellement. En cas d'erreur, vous pouvez les cocher ou décocher autant de fois que nécesaire.

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur `http ://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`

HAUNIME Anne

Chapitre 8, section 8.1

Question 1 ♣ Si A et B sont deux ensembles, on dit que $A = B$ si :

- ☒ tout élément de l'un est un élément de l'autre et réciproquement.
- ☐ $A \subset B$.
- ☐ $B \subset A$.
- ☒ $A \subset B$ et $B \subset A$.
- ☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Explication : Voir les définitions 8.4 et 8.9.

Chapitre 8, section 8.2

Question 2 L'union de deux ensembles est l'ensemble des éléments qui :

- ☒ appartiennent à l'un ou à l'autre.
- ☐ appartiennent à l'un et à l'autre.

Explication : Voir la définition 8.12.

Question 3 L'ensemble $4\mathbb{Z} \cap 6\mathbb{Z}$ est égal à

- ☒ $12\mathbb{Z}$.
- ☐ $24\mathbb{Z}$.

Explication : Voir l'exemple 8.16.

Chapitre 8, section 8.3

Question 4 L'ensemble $\{a, b\} \times \{1, 2, 3, 4\}$ est égal à :

- ☒ $\{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (a, 4), (b, 1), (b, 2), (b, 3), (b, 4)\}$.
- ☐ $\{(a, 1), (a, 2), (a, 4), (b, 1), (b, 2), (b, 3), (b, 4)\}$.

Explication : Voir l'exemple 8.18.

Chapitre 9, section 9.1

Question 5 Les deux fonctions $f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 1/x \end{array} \right.$ et $f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 1/x \end{array} \right.$

- ☐ sont égales.
- ☒ sont différentes.

Explication : Elles n'ont pas le même ensemble de départ. Voir la définition 9.3.

Question 6 Tout élément de l'ensemble d'arrivée d'une application possède au plus un antécédent.

- [x] C'est faux.
- [ ] C'est juste.

Explication : Voir la remarque 9.3 .

Chapitre 9, section 9.2

Question 7 Tout élément de l'ensemble d'arrivée d'une application surjective possède

- [x] au moins un antécédent.
- [ ] au plus un antécédent.
- [ ] exactement un antécédent.

Explication : Voir la définition 9.8.

Question 8 ♣ Une application est bijective ssi

- [x] Elle est injective et $f(X) = Y$.
- [x] Elle est injective et surjective.
- [ ] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Explication : Voir la définition 9.10 et le lemme 9.12.

Chapitre 9, section 9.3

Question 9 Deux ensembles finis étant donnés, il existe soit une injection, soit une surjection, soit une bijection de l'un dans l'autre.

- [x] C'est vrai.
- [ ] C'est faux.

Explication : C'est une conséquence de la proposition 9.16.

Question 10 ♣ L'ensemble

- [x] $\mathbb{Z}$
- [x] $\mathbb{N}^2$
- [x] $\mathbb{Q}$
- [x] $\{-1\} \cup \mathbb{N}$
- [x] $\{-10, -9, ..., -1\} \cup \mathbb{N}$
- [ ] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

est dénombrable.

Explication : Voir l'exercice de TD 8.8.

Chapitre 9, section 9.4

Question 11 On a

- [x] $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset\}$.
- [ ] $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \emptyset$.

Explication : L'ensemble P des parties de l'ensemble vide contient l'ensemble vide, comme tout ensemble. C'est le seul élément de P ! Voir par exemple l'exercice 8.1 de TD.

Chapitre 9, section 9.5

Question 12 Les notion de récurrence et de récursivité sont équivalentes.

- [x] C'est vrai.
- [ ] C'est faux.

Explication : Toute définition récurrente est aussi récursive. De plus, on peut montrer que toute définition récursive est aussi récurrente. Voir `https://www.lri.fr/~hivert/COURS/CFA-L3/02-Recursivite.pdf`. .

Chapitre 10, section 10.1

Question 13 On a : $\mathrm{F} \vee \mathrm{F}$

- [x] $= \mathrm{F}$.
- [ ] $= \mathrm{V}$.

Explication : Voir tableau 10.2.

Chapitre 10, section 10.2

Question 14 F implique V.

■ C'est vrai. ☐ C'est faux.

Explication : Voir tableau 10.9.

Chapitre 10, section 10.3

Question 15 ♣ Le symbole $\exists$ signifie

- ☐ "quel que soit".
- ☐ "pour tout".
- ■ "il existe"
- ☐ "il existe un unique"
- ☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Explication : Voir la définition de la section 10.3 .

Chapitre 11, section 11.2

Question 16 ♣ Le produit de deux suites croissantes est

- ☐ croissant.
- ☐ décroissant.
- ☐ ni croissant ni décroissant.
- ■ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Explication : Toutes ces réponses sont fausses, puisque le signe des suites intervient. On rappelle que si a, b, c et d sont des nombres positifs, alors

$$a \leq b \text{ et } c \leq d \Longrightarrow ac \leq bd \tag{1}$$

Ainsi, si (u_n) et (v_n) sont des suites croissantes, à termes positifs, alors d'après (1), puisque $u_n \leq u_{n+1}$ et $v_n \leq v_{n+1}$, on a $u_n v_n \leq u_{n+1} v_{n+1}$, ce qui traduit la croissance de la suite $(u_n v_n)$. Cela est faux si elle ne sont pas toutes les deux positives.

- Prenons par exemple $u_n = -1/n^2$, pour $n \geq 1$, croissante et négative et $v_n = n$, croissante et positive. On a alors
$$u_n v_n = -\frac{1}{n},$$
et $(u_n v_n)$ est croissante.
- Si au contraire, $u_n = -1/n$, pour $n \geq 1$, croissante et négative et $v_n = n^2$, croissante et positive. On a alors
$$u_n v_n = -n,$$
et $(u_n v_n)$ est décroissante.

Question 17 ♣ Si une suite réelle est bornée, alors elle est

- ■ majorée.
- ■ majorée et minorée.
- ☐ non majorée.
- ☐ non majoré ou non minorée.
- ☐ non majoré et non minorée.
- ☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Explication : Voir les définitions 11.9 et 11.10.

Chapitre 11, section 11.3

Question 18 Si deux suites (à valeurs complexes) (u_n) et (v_n) convergent respectivement vers l et l', alors la suite $(u_n v_n)$ converge vers ll'.

■ C'est vrai. ☐ C'est faux.

Explication : Voir la proposition 11.12.

Question 19 Si deux suites (à valeurs complexes) (u_n) et (v_n) convergent respectivement vers $+\infty$ et $-\infty$, alors la suite $(u_n + v_n)$ converge vers 0.

■ C'est faux. ☐ C'est vrai.

Explication : C'est une forme indéterminée. Voir la remarque 11.13.

Question 20 ♣ Si une suite réelle est croissante non majorée, alors

■ Elle tend vers l'infini. ☐ Elle converge. ☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Explication : Voir le théorème 11.18.

Chapitre 11, section 11.5

Question 21 ♣ La somme des $n+1$ premiers termes d'une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 est égale à

■ $(n+1)u_0 + \dfrac{rn(n+1)}{2}$.

☐ $nu_0 + \dfrac{rn(n+1)}{2}$.

■ $\dfrac{1}{2}\left(\text{premier terme} + \text{dernier terme}\right) \times \text{nombre de termes}$.

☐ $\dfrac{1}{2}\left(\text{premier terme} + \text{dernier terme}\right) \times \left(\text{nombre de termes} - 1\right)$.

☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Explication : Voir les propositions 11.30 et 11.31.

Question 22 ♣ On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2.$$

On a

■ $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

■ $S_n = \dfrac{1}{6}\left(2\,n^3 + 3\,n^2 + n\right)$.

☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Explication : Voir la remarque 11.35 du cours et la correction de l'exercice de TD 11.12 et constater que les deux expressions données sont égales !

Question 23 On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout p dans $\mathbb{N}$:

$$S_n^p = \sum_{k=1}^{n} k^p.$$

■ On peut calculer de façon explicite S_n^p. ☐ On ne peut pas calculer de façon explicite S_n^p.

Explication : Voir le point 5a page 77 et la remarque 11.34 page 78 du cours.

Chapitre 12, section 12.2

Question 24 Pour une série de terme général u_n convergente, la suite (v_n) définie par $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$

■ converge. ☐ tend vers zéro. ☐ peut ne pas converger.

Explication : C'est la définition même de la convergence. Voir la définition 12.2.

Question 25 Pour une série de terme général u_n, si elle converge alors, la suite (u_n) tend vers zéro. Cette assertion est

■ vraie. ☐ fausse.

Explication : Voir la proposition 12.5.

Chapitre 12, section 12.3

Question 26 ♣ La série associée à la suite arithmético-géométrique donnée par $u_{n+1} = au_n + b$ converge si :

■ a appartient à $]-1,1[$ et $b=0$

☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

■ u_0 et b sont nuls

Explication : Voir la proposition 12.11.

Chapitre 12, section 12.4

Question 27 Une série à termes positifs est toujours convergente dans

■ $[0, +\infty]$. ☐ $\mathbb{R}_+$.

Explication : Voir la remarque 12.14.

Question 28 ♣ Soient deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ à termes positifs telles que, pour tout n, $u_n \leq v_n$, alors

■ La convergence de la série de terme général v_n entraîne la convergence de la série de terme général u_n.
■ La divergence de la série de terme général u_n entraîne la divergence de la série de terme général v_n.
☐ La convergence de la série de terme général u_n entraîne la convergence de la série de terme général v_n.
☐ La divergence de la série de terme général v_n entraîne la divergence de la série de terme général u_n.
☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Explication : Voir la proposition 12.15.

Chapitre 12, section 12.5

Question 29 Pour une série absolument convergente de terme général u_n,

■ la suite (u_n) tend vers zéro. ☐ la suite (u_n) ne tend pas vers zéro.

Explication : Voir les propositions 12.5 et 12.21 : une série absolument convergente est convergente et son terme général tend vers zéro.

Chapitre 12, section 12.6

Question 30 ♣ Pour une série alternée de terme général u_n, convergente,

■ (u_n) tend vers zéro.
■ $(|u_n|)$ tend vers zéro.
■ $(|u_n|)$ est décroissante.
☐ (u_n) est décroissante.
☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Explication : Voir le théorème 12.25 en remarquant que $|u_n|$ tend vers zéro ssi (u_n) tend vers zéro.

Chapitre 12, section 12.7

Question 31 ♣ La série de terme général $x^n/n!$ converge

■ pour tout $x \in \mathbb{R}$. ■ pour tout $x \in]-1, 1[$. ☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Explication : Voir la proposition 12.29. La convergence pour $x \in \mathbb{R}$ entraîne aussi la convergence pour $x \in]-1, 1[$!