Université Claude Bernard Lyon 1

TRAVAUX DIRIGÉS DE l'UE MFIappro

Informatique 3A

MATHÉMATIQUES FONDAMENTALES POUR L'INFORMATIQUE (APPRENTIS)

2023-2024, Automne

Jérôme Bastien

Document compilé le 3 septembre 2023

Le lien original de ce document est le suivant :
`http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MFIappro/TDMFIappro.pdf`

Liste des Travaux Dirigés

Avant-propos iii

Travaux Dirigés 1. Fonctions (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) 1
- Notions de continuité, limite 1
- Dérivation 2
- Développements limités 2
- Étude de fonctions 4
- Développements limités (exercices facultatifs) 4
- Étude de fonctions (exercices facultatifs) 5
- Exercices pratiques (exercices facultatifs) 5

Travaux Dirigés 3. Intégration 10
- Calcul direct d'intégrales 10
- Calcul d'intégrales par intégration par partie 10
- Calcul d'intégrales par changement de variable 11
- Intégration des fractions rationnelles et autres fonctions particulières 12

Travaux Dirigés 4. Systèmes linéaires et matrices 14
- Produit matriciel 14
- Résolution de systèmes 14
- Inversibilité de matrices 15
- Application : géométrie plane 15

Travaux Dirigés 6. Équations différentielles ordinaires 17
- Équations différentielles ordinaires d'ordre un et deux à coefficients constants 17
- Autres types d'équations différentielles ordinaires 21

Travaux Dirigés 8. Ensembles, applications, logique 22
- Ensembles 22
- Applications 22
- Logique 23
- Applications (exercices facultatifs) 24

Travaux Dirigés 11. Suites 25
- Études sommaires de suites définies par récurrence 25
- Étude de suites 27
- Étude de suites (exercices facultatif) 28
- Calculs explicites de sommes 28
- Suites arithmético-géométriques 29
- Approximations de π 29
- Emprunts bancaires 32

Travaux Dirigés 12. Séries 33
Étude de séries par calculs directs de somme 33
Autour des séries géométriques 33
Étude générale de séries 34

Travaux Dirigés 13. Comparaison asymptotique 35

Travaux Dirigés 14. Exponentielle et logarithme 36
Exercices généraux 36
Application à l'identification 37
Les règles de puissance et une définition alternative de l'exponentielle 38
Définition alternative et du logarithme 38

Travaux Dirigés 15. Divers problèmes 40

Bibliographie 42

Avant-propos

Ce polycopié constitue les TD de Mathématiques Fondamentales pour l'Informatique (Apprentis) du département Informatique 3A (2023-2024, Automne).

Ce polycopié de TD est normalement disponible à la fois

- en ligne sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html` à la rubrique habituelle ;
- en cas de problème internet, sur le réseau de l'université Lyon I : il faut aller sur :
  — 'Poste de travail',
  — puis sur le répertoire '`P:`' (appelé aussi '`\\teraetu\Enseignants`'),
  — puis '`jerome.bastien`',
  — puis '`Polytech`',
  — puis '`Informatique 3A`'.
  — enfin sur '`MFIappro`'.

TRAVAUX DIRIGÉS 1

Fonctions (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$)

Notions de continuité, limite

EXERCICE 1.1.
Étudier la limite de $(x^3-1)/(x-1)$ quand x tend vers zéro.

EXERCICE 1.2.
Étudier la limite de $x^2\sin(1/x)$ quand x tend vers zéro.

EXERCICE 1.3.
Étudier la limite de $(x^2+1)/(x^4-3x+1)$ quand x tend vers $+\infty$.

EXERCICE 1.4.
Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}-x-\frac{1}{2}$$

Les exercices qui suivent sont facultatifs (et plus durs !).

EXERCICE 1.5.
Déterminer $\lim_{x\to+\infty} x\mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right)$.

EXERCICE 1.6.

(1) On considère la fonction caractéristique $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ de $\mathbb{Q}$ définie par

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\in\mathbb{Q},\\ 0 & \text{si } x\notin\mathbb{Q}.\end{cases}$$

Montrer que la fonction $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ est discontinue en tout point de $\mathbb{R}$. On utilisera le fait que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ et que $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire,

pour tout $x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, il existe une suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de rationnels tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n = x$,
pour tout $x\in\mathbb{Q}$, il existe une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'irrationnels tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = x$.

(2) On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x)\times x+1.$$

Montrer que f est discontinue sur $\mathbb{R}^*$ et continue en zéro.

(3) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Pourriez vous construire une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie sur tout $\mathbb{R}$, qui soit ne soit continue qu'en n points distincts de $\mathbb{R}$ exactement et discontinue en dehors de ces points ?

Dérivation

EXERCICE 1.7. Calculer les dérivées des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition :

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$, b) $f(x) = \tan\left(2x^2\right)$,

c) $f(x) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$, d) $f(x) = \cos^3(x)\sin^2(x)$,

e) $f(x) = x^2(1+x)^n$ où $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 1.8. Tracer le tableau de variation de la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = e^x - x^2 - x.$$

On pourra être amené à dériver plusieurs fois g.

EXERCICE 1.9. Montrer que la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (x - \sin x)(\pi - x - \sin x),$$

est strictement croissante sur $]0, \pi/2[$.
On montrera que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = (\pi - 4\sin x)\sin x.$$

Les exercices qui suivent sont facultatifs.

EXERCICE 1.10. Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n-ième des fonctions suivantes :

a) $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \left(x^3+2x-7\right)e^x \end{array}$ b) $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x \cos(x) \end{array}$

EXERCICE 1.11. Soient $x_0 \in \mathbb{R}$, f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie au voisinage de x_0 et dérivable en x_0, $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Démontrer que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+bh) - f(x_0-ah)}{(b+a)h} = f'(x_0).$$

Développements limités

EXERCICE 1.12.
Trouver les limites suivantes

(1)
$$\lim_{x\to 0} \ln(1+\sin x)\,\mathrm{cotan}\, 2x$$

(2)
$$\lim_{x\to 1/2} \left(2x^2-3x+1\right)\tan \pi x$$

(3)
$$\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$$

EXERCICE 1.13.

(1) Trouver la limite suivante :
$$\lim_{x\to 1} \frac{2}{1-x^2} - \frac{3}{1-x^3}$$
(2) Les développements limités sont-ils vraiment nécessaires ?

On pourra voir une version alternative dans l'exercice 1.14.

EXERCICE 1.14.

(1) Trouver la limite suivante :

$$\lim_{x\to 1} \frac{2}{1-x^2} - \frac{3\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{1-x^3}$$

(2) Les développements limités sont-ils vraiment nécessaires ?

On pourra voir une version alternative dans l'exercice 1.13.

EXERCICE 1.15.
Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 4 de $f(x) = \ln(\cos(x))$.

EXERCICE 1.16. Former les développements limités à l'ordre et au voisinage indiqués des fonctions suivantes :

1) ordre 4, voisinage de 0 , $f(x) = \ln\left(\frac{\sinh(x)}{x}\right)$,

2) 3, 0, $\ln\big(\ln(e+x)\big)$,

3) 4, 0, $\frac{x}{e^x-1}$,

4) 7, 0, $e^{\cos x}$,

5) 3, 2, x^x.

EXERCICE 1.17.
Reprendre l'exercice 1.4 avec les développements limités.

EXERCICE 1.18.
Déterminer le développement limité en $x = \pi/4$, à l'ordre 4 de $f(x) = \sin(x)$.
On pourra utiliser l'une des deux méthodes suivantes :
- On utilise les formules habituelles et l'on dérive la fonction f autant de fois que nécessaire ;
- On pose $x = \pi/4 + h$ où h tend vers zéro et on utilise la formule

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a.$$

EXERCICE 1.19.
Cet exercice a été donné à l'examen (Automne 2020).
Soit un entier $m \geq 0$. Former le développement limité de

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^m,$$

à l'ordre 4 en zéro.
On pourra
— soit calculer les développements limités de $(1+x)^m$ et de $(1-x)^{-m}$ à l'ordre 4 en zéro.
— soit passer en notation exponentielle et utiliser le développement limité de la fonction exponentielle en zéro.

Étude de fonctions

EXERCICE 1.20.
On considère la fonction suivante

$$f(x) = e^{2\,x} - 2\,x - 8.$$

(1) Déterminer le nombre des racines de l'équation $f(x) = 0$ pour $x \geq 0$.

(2) Répondre à la question 1 lorsque $f(x) = \sin(x) - x$ et $f(x) = \cos(x) - x$ sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 1.21.
Exercice donné à l'examen à mi-parcours du 21 septembre 2018.

(1) On considère la fonction f donnée par

$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad f(x) = \frac{\sqrt{x+1}(x-2)}{(x^2+1)^{3/2}}$$

  (a) Montrer que la dérivée f' de f vérifie :

$$f'(x) = -3/2\,\frac{x\left(x^2 - 5 - 2\,x\right)}{\sqrt{x+1}\,\left(x^2+1\right)^{5/2}}.$$

  (b) Montrer que les racines de $x^2 - 5 - 2\,x = 0$ sont $x = 1 \pm \sqrt{(}6)$.

  (c) En déduire le tableau de variation et le graphe de f.

(2) En déduire un encadrement des zéros de f, puis les déterminer exactement.

(3) Conclure.

Développements limités (exercices facultatifs)

EXERCICE 1.22.
Former le développement limité en 0 à l'ordre 7 de la fonction

$$x \mapsto x \mapsto \tan(x)$$

EXERCICE 1.23.
Former le développement limité en 0 à l'ordre 7 de la fonction

$$x \mapsto x \mapsto \sin(\tan(x))$$

EXERCICE 1.24.
Former le développement limité en 0 à l'ordre 4 de la fonction

$$x \mapsto (\ln(1+x))^2$$

EXERCICE 1.25.
Former le développement limité en 0 à l'ordre 3 de la fonction

$$x \mapsto \exp(\sin(x))$$

EXERCICE 1.26.
Former le développement limité en 0 à l'ordre 9 de la fonction

$$x \mapsto \sin^6(x)$$

Étude de fonctions (exercices facultatifs)

EXERCICE 1.27.
Exercice donné à l'examen du 20 décembre 2018.
On pourra aussi consulter l'étude alternative d'un cas particulier dans l'exercice 14.3 page 36.

(1) Étudier la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \frac{\ln(x)}{x}.$$

(2) (a) Déduire de l'étude de f que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^{*2}, \quad (f(x) = f(y) \text{ et } x < y) \Longrightarrow x \in]1, e[\text{ et } y > e, \tag{1.1}$$

(b) En déduire ensuite que si on cherche x et y entiers, alors

$$x = 2 \text{ et } y = 4. \tag{1.2}$$

(3) *Question facultative*
Déduire de ce qui précède les solutions de l'équation :

$$(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad p^q = q^p. \tag{1.3}$$

EXERCICE 1.28.
Exercice donné à l'examen du 13 novembre 2019.
Étudier et construire le graphe de la fonction suivante :

$$f(x) = \ln(\cosh x).$$

On rappelle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right).$$

Exercices pratiques (exercices facultatifs)

EXERCICE 1.29.

(1) Les femmes gagnent en moyenne moins que les hommes [1], plus précisément "un écart de 24 % persiste entre les deux sexes". Est-ce que cela implique que les hommes gagnent 24 % de plus ?

(2) Dans quel cas, cette dernière affirmation est-elle à peu près vraie ?

(3) Dans quel cas, cette dernière affirmation est-elle exactement vraie ?

EXERCICE 1.30.
On construit une boite en carton parallélépipédique (sans couvercle) à partir d'une surface carrée de coté $2a$, comme le montre la figure 1.1
Déterminer le coté x des quatre petits morceaux découpés pour que le volume de la boite construite soit maximal.

EXERCICE 1.31.
On construit une boite en carton parallélépipédique (sans couvercle) à partir d'une surface rectangulaire de largeur $2l$ et de longueur $2L$, comme le montre la figure 1.2
On suppose donc que $0 < l \leq L$.

1. Voir https://www.francetvinfo.fr/economie/disparites-salariales/pourquoi-les-femmes-gagnent-moins-que-les-hommes_675169.html

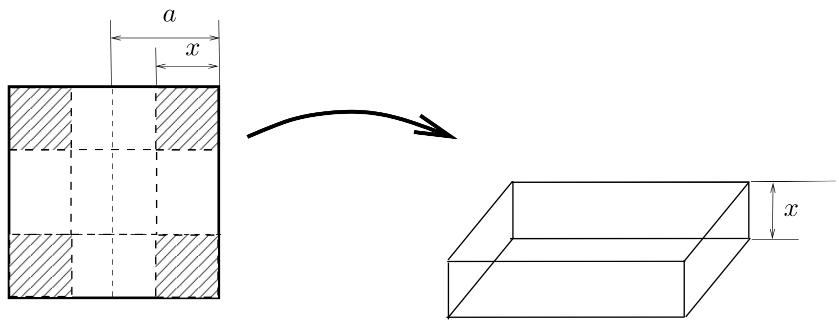


FIGURE 1.1. La boite et son patron.

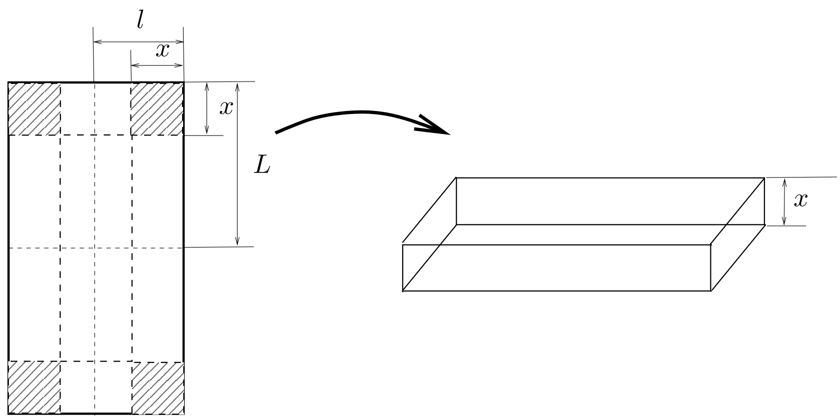


FIGURE 1.2. La boite et son patron.

On admettra que $l^2 + L^2 - lL > 0$ et en posant

$$x_1 = \frac{1}{3}\left(L + l - \sqrt{l^2 + L^2 - lL}\right),$$
$$x_2 = \frac{1}{3}\left(L + l + \sqrt{l^2 + L^2 - lL}\right),$$

on admettra que

$$0 < x_1 < l \leq x_2.$$

Déterminer le coté x des quatre petits morceaux découpés pour que le volume de la boite construite soit maximal.

EXERCICE 1.32.
On veut fabriquer une casserole en aluminium embouti au moyen d'une feuille de métal circulaire de surface donnée S.

(1) On suppose qu'il n'y a pas de déchet de métal, que les déformations se font à volume constant, que son épaisseur (négligeable devant les autres dimensions) reste constante et qu'il n'y a pas de couvercle. Montrer que la surface reste constante
(2) Calculer le plus grand volume de la casserole qu'il soit possible de réaliser.

EXERCICE 1.33.

Sur une route, la distance entre deux voitures doit permettre de s'arrêter même si la première s'arrête brusquement. Nous proposons un modèle, où toutes les voitures roulent sur une seule même file, à la même vitesse v avec la même distance entre deux voitures.

(1) *Question facultative dont on pourra admettre le résultat.*

  (a) On suppose que le ralentissement d'une voiture est uniforme. Cela signifie que la voiture décellère avec une accélération négative constante, égale à $-a$ (a est une constante strictement positive, exprimée en ms^{-2}). Montrer que, si v est la vitesse de la voiture avant freinage, alors la distance de freinage vaut $d_f = v^2/(2a)$.

  (b) Quelle est dans ce cas-là, la force exercée par le sol sur les pneus ?

(2) À la distance de freinage d_f, il convient d'ajouter la distance parcourue pendant la durée τ de réaction du conducteur. Calculer la distance qui doit séparer les deux voitures.

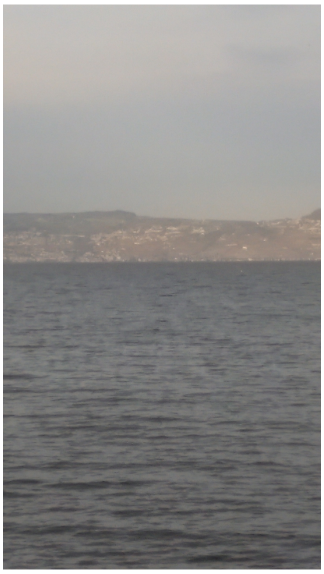
(3) (a) La longueur moyenne d'une voiture est l. Calculer le débit par unité de temps D de voitures sur une route en fonction de la vitesse v.

  (b) Étudier l'application $v \mapsto D(v)$.

  (c) Application numérique : $l = 5\,\mathrm{m}$, $a = 10\,\mathrm{ms}^{-2}$ et $\tau = 1\,\mathrm{s}$.

(4) Critiquer ce modèle, ainsi que les sections de routes à vitesses régulées et ... enfin, le comportement de certains conducteurs !

EXERCICE 1.34.
Exercice donné à l'examen du 13 novembre 2019.



Depuis Évian, on regarde la ville de Lausanne, distante de $d = 12.5$ km. On supposera que l'on se trouve à $h_1 = 5$ m. au dessus de la surface de l'eau. On donne le rayon de la terre $R = 6378.137$ km.
Sur la figure 1.3 page suivante, on a noté A et B, les points correspondant à Évian et Lausanne. Le rayon lumineux issu d'un point B' est tangent à la terre au point C et arrive dans l'œil de l'observateur. On s'intéresse à la hauteur h_2 du point B'. L'ensemble du segment $[BB'[$ est en effet caché sous l'horizon. On peut montrer que l'on a :

$$h_2 = R\left(\frac{1}{\cos\left(\frac{d}{R} - \arccos\frac{R}{R+h_1}\right)} - 1\right), \tag{1.4}$$

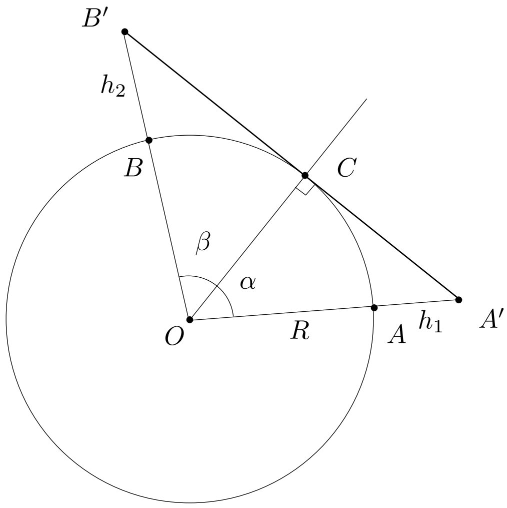


FIGURE 1.3. La terre, le points d'observation A et le point observé B.

(1) (a) (i) Pourquoi ne peut-on pas écrire de développement limité de arccos en $y = 1$?

(ii) Démontrer le résultat suivant :

$$\forall y \in [0,1], \quad \forall x \in [0,\pi/2], \quad \left(x = \arccos y \Longrightarrow x = \sqrt{2(1-y)}(1+\varepsilon(y)),\right) \tag{1.5}$$

avec

$$\lim_{y\to 1} \varepsilon(y) = 0.$$

(b) En déduire une approximation du résultat (1.4).

(2) Pourriez-vous rappeler l'expérience faite par les Grecs pour mesurer le périmètre de la Terre ?

EXERCICE 1.35.

(1) Écrire les développements limités des fonctions sin et cos aux ordres respectifs 3 et 2 en 0.

(2) En déduire les approximations de $\sin\left(10^{-3}\right)$ et de $\cos\left(10^{-3}\right)$.

(3) Confirmez cela avec votre calculatrice.

On pourra consulter l'exercice 1.36 qui reprend et développe cet exercice.

EXERCICE 1.36.
Cet exercice est l'étude rigoureuse de l'exercice 1.35.

(1) *Approximation de* $\cos x$ *et de* $\sin x$. Attention, x est mesuré en radians.

(a) Montrer que pour tout entier n et pour tout réel x

$$\begin{cases} \cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4!} + ... + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + R_n^c, \\ \\ \sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + ... + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_n^s, \end{cases} \tag{1.6}$$

avec

$$R_n^c \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \text{ et } R_n^s \leq \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}.$$

(b) On note désormais

$$\begin{cases} C_n(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4!} + ... + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}, \\ \\ S_n(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + ... + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \end{cases}$$

Pourquoi les formules (1.6) permettent-elles d'obtenir une approximation de $\cos x$ et de $\sin x$ avec une erreur respectivement inférieure à $(|x|^{2n+2})/(2n+2)!$ et $(|x|^{2n+3})/(2n+3)!$?

(2) On suppose dans toute cette question que $x = 10^{-3}$.

(a) Déterminer un entier n_1 tel que

$$\frac{|x|^{2n_1+2}}{(2n_1+2)!} \leq 10^{-9} \text{ et } \frac{|x|^{2n_1+3}}{(2n_1+3)!} \leq 10^{-9}.$$

Nb : On pourra procéder par «tâtonnement».

(b) En calculant $C_n(10^{-3})$ et $S_n(10^{-3})$ pour $n = 1$, proposez une approximation de $\cos(10^{-3})$ et de $\sin(10^{-3})$ à 10^{-9} près.

Comparez ces valeurs approchées aux valeurs de $\cos(10^{-3})$ et de $\sin(10^{-3})$ «exactes» renvoyées par la machine et commentez brièvement.

(3) On suppose pour toute cette question que x est élément de $[0, \pi/4]$.

(a) Montrer que

$$\frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \leq \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n+2} \frac{1}{(2n+2)!} \text{ et } \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!} \leq \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n+2} \frac{1}{(2n+2)!}. \tag{1.7}$$

(b) Montrer que, pour $n = 5$, on a, pour tout x de $[0, \pi/4]$:

$$\begin{cases} |\cos x - C_n(x)| \leq 10^{-9}, \\ |\sin x - S_n(x)| \leq 10^{-9}. \end{cases} \tag{1.8}$$

(c) Déduire de (1.8) une approximation de $\cos x$ et de $\sin x$ pour x élément de $\left\{10^{-3}, \pi/7, \pi/4\right\}$.

Comparez les aux valeurs «exactes» renvoyées par la machine et commentez brièvement.

(d) Comparez et commentez les méthodes des questions 2 et 3.

(4) *Extension des résultats obtenus*

(a) Comment peut-on utiliser les résultats de la question 3 pour calculer des approximations du cosinus et de sinus de tout réel à 10^{-9} près ?

(b) Proposez des approximations de $\cos x$ et de $\sin x$ pour x élément de $\{\pi/3, 3.2, 6\}$.

Comparez les aux valeurs «exactes» renvoyées par la machine et commentez brièvement.

TRAVAUX DIRIGÉS 3

Intégration

Une partie de ces exercices est issue et adaptée de [CN03].

Calcul direct d'intégrales

EXERCICE 3.1. Calculer directement les intégrales suivantes :

(1) $\displaystyle\int_0^1 x^4 dx$,

(2) $\displaystyle\int_0^{1/2\,\pi} \sin(x)\, dx$,

(3) $\displaystyle\int_0^1 \left(1+x^2\right)^{-1} dx$,

(4) $\displaystyle\int_0^{1/2\,\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$,

(5) $\displaystyle\int_0^{1/3\,\pi} \tan(x)\, dx$,

(6) $\displaystyle\int_1^{e^1} x^{-1} dx$,

(7) $\displaystyle\int_1^3 (2\,x-1)^{-1}\, dx$,

(8) $\displaystyle\int_0^{1/2\,\pi} \sin^2 x dx$.

Calcul d'intégrales par intégration par partie

EXERCICE 3.2. Calculer les intégrales suivantes :

(1) (a) $\displaystyle\int_0^1 x^3 e^{-x} dx$,

(b) Pour traiter différemment ce calcul, on pourra se référer à l'exercice 3.3.

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} \left(x^2-x\right) \cos(x)\, dx$,

(3) (a) Calculer, pour $a>0$:

$$I(a)=\int_a^e \ln(x)\, dx.$$

(b) Déterminer la limite quand a tend vers 0 de $I(a)$, qui sera notée

$$\int_0^{e^1} \ln(x)\, dx.$$

EXERCICE 3.3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx.$$

(1) (a) Calculer I_0.

(b) En utilisant une intégration par partie, établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1}, pour $n \geq 1$.

(2) Déterminer successivement I_0, I_1, I_2 et I_3.

(3) (a) Écrire la relation de récurrence de n à 1 et en sommant ces égalités, obtenir une expression explicite de I_n.

(b) Retrouver alors la valeur de I_3.

Calcul d'intégrales par changement de variable

EXERCICE 3.4.
Calculer les intégrales suivantes en faisant le changement de variable indiqué :

(1) $\displaystyle\int_0^{1/2\,\pi} \cos^2 x \sin x dx$, avec $t = \cos x$,

(2) $\displaystyle\int_1^4 \frac{x}{\sqrt{2x+1}} dx$, avec $1 + 2x = t^2$,

(3) $\displaystyle\int_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx$, avec $x - 1 = t^2$,

(4) $\displaystyle\int_1^{4/3} \frac{1}{x\sqrt{-1+x^2}} dx$, avec $x = 1/t$,

(5) $\displaystyle\int_0^{1/2\,\pi} \frac{\cos x}{6 - 5\sin x + \sin^2 x} dx$, avec $\sin(x) = t$.

(6) $\displaystyle\int_0^{\pi} (3 + 2\cos(x))^{-1} dx$, avec $t = \tan(x/2)$,

(7) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$, avec $x = \tan(t)$,

Dans ce dernier cas, on découpera le calcul en plusieurs parties et on pourra adopter la méthode suivante :

(a) En faisant le changement de variable $x = \tan(t)$, montrer que

$$I = 2\int_0^{\pi/4} \frac{dt}{\cos t}.$$

(b) En faisant maintenant le changement de variable $u = \sin(t)$, montrer que

$$I = -2\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{du}{u^2 - 1}.$$

(c) Enfin, en montrant que

$$\frac{1}{u^2-1} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{u+1} - \frac{1}{u-1}\right),$$

conclure quant à la valeur de I.

Intégration des fractions rationnelles et autres fonctions particulières

Section facultative

EXERCICE 3.5. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$I_n = \int_0^1 x^n \sin(\pi x) dx.$$

(1) Calculer I_0 et I_1.

(2) Établir une relation entre I_n et I_{n+2}.

(3) En déduire I_2, I_3 et I_4.

EXERCICE 3.6. Calculer les intégrales suivantes :

(1) $\displaystyle\int_0^{1/2\sqrt{2}} \left(-1 + x^2\right)^{-1} dx$,

(2) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{x+1}{(x-1)(x-2)^2} dx$,

(3) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x+1}{x^2+x+1} dx$,

(4) $\displaystyle\int_0^{e^1} \left(x^2 + 2\,x + 2\right)^{-2} dx$.

EXERCICE 3.7.
Cet examen a été donné à l'examen d'Automne 2020.

(1) (a) Soient b un réel non nul et c un réel quelconque. Calculer la dérivée de

$$f(x) = \ln|bx - c|,$$

et en déduire une primitive de

$$g(x) = \frac{1}{bx - c}.$$

Pour tout la suite, on suppose $b > 0$.

(b) Calculer

$$\int_{(c+b)/b}^{(c+2b)/b} \frac{dx}{bx - c},$$

puis

$$\int_{(c-2b)/b}^{(c-b)/b} \frac{dx}{bx - c}.$$

(2) (a) Calculer la dérivée de la fonction arcsin et en déduire :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

(b) On souhaite calculer

$$F(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}},$$

sur un intervalle où $x > 1$

(i) On fait le changement de variable $\sqrt{x^2-1} = x+t$. Montrer que

$$x = -\frac{1+t^2}{2t}$$

puis que

$$dx = \frac{-t^2+1}{2t^2}dt$$

(ii) En déduire $F(x)$ d'abord en fonction de t puis en fonction de x. On montrera que

$$F(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right).$$

Attention dans ce changement de variable au sein d'une primitive, on procèdera comme dans celui d'une intégrale, sans les bornes.

(c) Calculer successivement

$$\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}, \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{|x^2-1|}}.$$

TRAVAUX DIRIGÉS 4

Systèmes linéaires et matrices

Produit matriciel

EXERCICE 4.1. Calculer le produit matriciel AB dans les cas suivants :

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix},$$

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 8 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

EXERCICE 4.2. Calculer le produit matriciel ABC avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Résolution de systèmes

EXERCICE 4.3. Résoudre les systèmes suivants

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + y = 3, \\ 2x + 4y = 6. \end{cases} \qquad \text{b) } \begin{cases} x + y + z = 6, \\ 2x - 3y + 4z = 8, \\ x + y - z = 0. \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + y + z = 6, \\ 2x - 3y + 4z = 8, \\ 3x - 2y + 5z = 14. \end{cases} \qquad \text{d) } \begin{cases} x + y + z = 6, \\ 2x - 3y + 4z = 8, \\ 3x - 2y + 5z = 13. \end{cases}$$

On précisera si chaque système admet une solution, une infinité de solutions ou aucune solution.

Inversibilité de matrices

EXERCICE 4.4. Préciser dans chaque cas si la matrice A est inversible ou non :

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$,

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$, d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 10 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 4.5.

(1) (a) Déterminer l'inverse de la matrice $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Déterminer l'inverse de la matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) Plus généralement pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, déterminer l'inverse de la matrice $P \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ définie par

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ & \vdots & & & & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Application : géométrie plane

On se propose dans cet exercice d'utiliser les notions de matrice pour exprimer analytiquement les rotations planes. Ces notions peuvent aussi s'exprimer par le biais des complexes.

EXERCICE 4.6 (Étude des rotations).
On se place dans le plan complexe, muni d'un repère orthonormé (O, x, y).

(1) Soient $R \in \mathbb{R}_+^*$, $\theta, \phi \in \mathbb{R}$. Rappeler l'interprétation géométrique de l'égalité

$$Re^{i\phi} \times e^{i\theta} = Re^{i(\theta+\phi)}.$$

(2) Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et M un point du plan de coordonnées (x, y). En posant $z = x + iy$, calculer l'affixe du point M', image de M par la rotation de centre O et d'angle θ.

(3) En déduire les coordonnées (x', y') de M'. On met le résultat sous la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = S_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

où S_θ est la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par

$$S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

(4) Montrer que l'inverse de la matrice S_θ est définie par

$$S_\theta^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

(5) Pourquoi a-t-on

$$S_\theta^{-1} = S_{-\theta} \ ?$$

Interprétez géométriquement.

(6) Montrer que, pour tout $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, on a

$$S_\theta S_{\theta'} = S_{\theta+\theta'}.$$

Interpréter ce résultat géométriquement et matriciellement.

Remarque 4.1. Les matrices permettent d'étudier les applications linéaires planes ou spatiales (ou dans des espaces de dimensions quelconques). L'exercice 4.7 permet de traiter un autre type d'application.

exercice 4.7 (Étude d'une symétrie axiale).
On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé. On considère la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x/2$. On appelle $p_\mathcal{D}$ la projection orthogonale sur la droite $\mathcal{D}$.

(1) Soit M de coordonnées (x, y) et $H(x', y')$ l'image $p_\mathcal{D}(M)$ de M. Montrer que

$$H \in \mathcal{D} \Longrightarrow y' = \frac{x'}{2}, \tag{4.1a}$$

$$\mathcal{D} \perp (MH) \Longrightarrow 2x + y - 2x' - y' = 0. \tag{4.1b}$$

(2) Déduire de (4.1) que l'on a

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ où } A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3) La matrice A est elle inversible ? Pourquoi ?

TRAVAUX DIRIGÉS 6

Équations différentielles ordinaires

Équations différentielles ordinaires d'ordre un et deux à coefficients constants

Exercices en partie extraits de [BC04].

Équations différentielles à coefficients constants d'ordre un

EXERCICE 6.1.
Résoudre les équations différentielles suivantes

$$\begin{aligned}
&\text{a)} \quad 2y'(t) + 3y(t) = 0, \quad y(4) = 6,\\
&\text{b)} \quad ay'(t) + by(t) = 0, \quad y(t_0) = y_0,\\
&\text{c)} \quad ay'(t) + by(t) = f(t), \quad y(t_0) = y_0,
\end{aligned}$$

où $a \in \mathbb{R}^*$, $b, t_0, y_0 \in \mathbb{R}$ et f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

EXERCICE 6.2.
On étudie l'équation différentielle

$$-y'(t) + 2y(t) = 1 + t + t^2.$$

(1) Résoudre cette équation différentielle en :
   (a) cherchant une solution particulière sous la forme d'un polynôme ;
   (b) utilisant la méthode de la variation de la constante.
(2) Comparer les deux solutions obtenues aux questions (1a) et (1b) et conclure.
(3) Définir la solution correspondant à la condition initiale $y(1) = 2$.

EXERCICE 6.3.
Résoudre les équations différentielles suivantes (avec les éventuelles conditions initiales)

(1) Déterminez la solution de l'équation différentielle solution de l'équation différentielle

$$2y'(t) + 3y(t) = e^t,$$

avec la condition initiale

$$y(0) = 2.$$

On cherchera une solution particulière sous la forme d'une fonction de la forme Ke^t où K est une constante.

(2) Déterminez la solution de l'équation différentielle

$$2y'(t) + 3y(t) = \cos(t).$$

On utilisera la méthode de la variation de constante. Pour cela, on procédera comme suit : on fera une double intégration par partie ou on passera en notation exponentielle complexe

(3) Déterminez la solution de l'équation différentielle solution de l'équation différentielle

$$2y'(t) + 3y(t) = \cos(t),$$

avec la condition initiale

$$y(0) = a.$$

On utilisera la méthode de la variation de constante. Pour cela, on procédera comme suit : on fera une double intégration par partie ou on passera en notation exponentielle complexe

(4) Déterminez la solution de l'équation différentielle

$$y'(t) + y(t) = t^2 + t.$$

On cherchera une solution particulière sous la forme d'un polynôme.

EXERCICE 6.4.
Soient a, b et γ, trois réels (avec a non nul). Résoudre l'équation différentielle

$$ay'(t) + by(t) = e^{\gamma t}. \tag{6.1}$$

Comme dans l'exemple 6.4 du cours, on cherchera une solution particulière sous la forme $\widehat{y}(t) = Ke^{\gamma t}$ où K est un réel. Cette méthode ne sera valable que si $\gamma \neq -b/a$. Dans ce cas, il faudra chercher une autre méthode.

EXERCICE 6.5.
Montrer que l'unique solution de l'équation différentielle

$$ay' + by = 0,$$

où a est un réel non nul et b un réel quelconque est donnée par

$$y(t) = ce^{-\frac{b}{a}t},$$

où c est une constante.

Équations différentielles à coefficients constants d'ordre deux

EXERCICE 6.6.
Résoudre les équations différentielles suivantes (avec les éventuelles conditions initiales)

$$\begin{aligned}
&\text{a)} \quad y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 0,\\
&\text{b)} \quad y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = 0,\\
&\text{c)} \quad y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0.
\end{aligned}$$

EXERCICE 6.7.
Résoudre l'équation différentielle suivante

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 3\sin(t) + \cos(t).$$

EXERCICE 6.8.

(1) Résoudre l'équation différentielle suivante

$$2y'' + 5y' - 3y = 0.$$

(2) En déduire la solution de l'équation différentielle suivante

$$2y'' + 5y' - 3y = t^3 + t^2 - 1. \tag{6.2}$$

On cherchera d'abord une solution particulière sous la forme d'un polynôme.

(3) En déduire enfin, la solution de l'équation différentielle suivante (6.2) avec les conditions initiales

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 2. \tag{6.3}$$

Exercices sur la demi-vie et autres

EXERCICE 6.9.
La demi-vie d'un isotope radioactif est le temps nécessaire pour que la moitié des noyaux de cet isotope initialement présents se désintègrent naturellement. On rappelle que le nombre $N(t)$ de ces élements au cours du temps vérifie l'équation différentielle $N'(t) = -\lambda N(t)$ où $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Est-il vrai qu'au bout de deux demi-vies, le produit s'est totalement désintégré ? Justifiez votre réponse !

EXERCICE 6.10.
Une grandeur évolue à une vitesse proportionnelle à elle même même. On sait que cette grandeur double tous les dix ans. Combien de temps lui faut-il pour tripler ?

EXERCICE 6.11.
On étudie la désintégration d'un isotope radioactif de constante radioactive λ, c'est-à-dire que le nombre $N(t)$ d'atomes de cet isotope vérifie

$$N'(t) = -\lambda N(t). \tag{6.4}$$

(1) Résoudre l'équation différentielle (6.4) avec $N(t=0) = N_0$. Calculer la demi-vie $t_{1/2}$ de l'isotope sachant que c'est le temps au bout duquel la moitié des atomes se sont désintégrés.
(2) Dans la haute atmosphère, du carbone radioactif est produit à partir des collisions entre des noyaux d'azote et des neutrons produits par les rayons cosmiques. Le dioxyde de carbone de l'atmosphère contient en proportion quasiment constante du carbone 14 et du carbone 12. La proportion de ces 2 isotopes est la même dans les végétaux et dans l'atmosphère. Lorsque la plante meurt, elle cesse d'assimiler le dioxyde de carbone et le carbone 14 qu'elle contient, de demi-vie 5570 ans se désintègre sans être renouvelé. Dans une tombe égyptienne, on a trouvé un échantillon de bois provenant d'un sarcophage qui produisait 560 désintégrations par seconde alors qu'un échantillon du même bois fraîchement coupé contenant la même masse de carbone produit 816 désintégrations par seconde. Déterminer la date de fabrication du sarcophage.

Applications à la mécanique

EXERCICE 6.12.
On considère l'équation différentielle gérant le mouvement d'un point matériel d'abscisse x soumis à l'association en parallèle d'un ressort linéaire de raideur k et d'un patin de viscosité c et à une force extérieure nulle :

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0.$$

Ici, m, c et k sont des réels strictement positifs.

(1) Résoudre cette équation différentielle (on distinguera plusieurs cas)
(2) En faisant le moins de calculs possible, montrer que, dans tous les cas (et ce, indépendamment des conditions initiales)

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0.$$

Physiquement, d'où vient ce résultat ?

EXERCICE 6.13 (Résolution du flambement dans le cas raisonnant).
On étudie l'équation différentielle qui traduit l'équilibre d'une poutre en compression avec un défaut initial

$$v''(x) + \omega_0^2 v(x) = K\sin(\omega x), \tag{6.5}$$

avec les conditions aux limites

$$v(0) = v(L) = 0. \tag{6.6}$$

Ici, ω, ω_0 et K sont des constantes strictement positives et L est la longueur de la poutre étudiée.
Dans le cours, on a déjà traité le cas où $\omega_0 \neq \omega$. On suppose donc que

$$\omega = \omega_0. \tag{6.7}$$

(1) Pourquoi ne peut on pas chercher une solution particulière de (6.5) sous la forme

$$v = \lambda \sin(\omega_0 x),$$

(comme dans le cours) sous l'hypothèse (6.7) ?

(2) En utilisant la méthode de la variation de la constante, résoudre (6.5) sous l'hypothèse (6.7).

(3) Vérifier que la solution obtenue est bien solution de (6.5).

(4) En considérant l'hypothèse (qui provient de (6.7))

$$\omega_0 L = \pi,$$

et les conditions aux limites (6.6), montrer que le système (6.5)-(6.6) n'admet une solution que dans le cas où $K = 0$, cette solution étant

$$v(x) = B_0 \sin(\omega_0 x),$$

où B_0 est une constante quelconque.

Pour chercher

EXERCICE 6.14.

(1) Déterminez la solution de l'équation différentielle solution de l'équation différentielle

$$y'(t) + 3y(t) = 1 + t^2 + t + t^3,$$

avec la condition initiale

$$y(2) = 1.$$

On cherchera une solution particulière sous la forme d'un polynôme.

(2) Comment feriez-vous pour, partant d'une fonction y donnée, inventer une équation différentielle dont y est la solution. Résolvez-la !

EXERCICE 6.15.
soit $\tau > 0$. Résoudre l'équation différentielle

$$\forall t \in [\tau, +\infty[, \quad 2ty'(t) - y(t) = 0.$$

EXERCICE 6.16.
Lorsqu'on perce un trou au fond d'un récipient cylindrique rempli de liquide sur une hauteur z, on démontre en mécanique des fluides que la vitesse d'expulsion du liquide par le trou est $v = \sqrt{2gz}$.

(1) En supposant que la section du récipient est S est que celle du trou est s, montrer que

$$vs = -Sdz/dt.$$

Indication «tout ce qui n'est plus au dessus est sorti par le trou».

(2) En déduire l'équation différentielle permettant de trouver $z(t)$.

(3) En utilisant la technique de séparation des variables, intégrer cette équation différentielle ; on supposera que $z = z_0$ à $t = 0$.

(4) En déduire le temps de vidange du récipient.

(5) Application : la clepsydre

On voudrait fabriquer un récipient dont la forme soit telle que dz/dt soit constant : on pourra ainsi fabriquer une horloge à eau dans laquelle la hauteur serait en relation linéaire avec le temps écoulé. Pour cela, on suppose que le récipient est de révolution autour d'un axe Oz et dont la section perpendiculaire à cet axe serait un cercle de rayon $r(z)$ ne dépendant que de z. Trouver la forme de $r(z)$.

(6) Réflexion :

Pensez-vous que les grecs savaient résoudre des équations différentielles ? Comment ont-ils procédé ?

Autres types d'équations différentielles ordinaires

Exercices essentiellement extraits de [BD01, chapitre 4].

EXERCICE 6.17. Résoudre l'équation $xyy' - y^2 = 1$.

EXERCICE 6.18.

(1) Soient A une primitive quelconque de a et $C \in \mathbb{R}$. Montrer alors que la fonction
$$\phi(t) = Ce^{-A(t)} \tag{6.8}$$
est solution de l'équation
$$y'(t) + a(t)y(t) = 0. \tag{6.9}$$

(2) Si on fait le changement de fonction inconnue en posant :
$$y(t) = w(t)e^{-A(t)},$$
quelle est l'équation vérifiée par w ? En déduire que toutes les solutions de (6.9) sont de la forme (6.8).

(3) Soient y la solution générale et y_p une solution particulière de
$$y'(t) + a(t)y(t) = f(t) \tag{6.10}$$
et soit $z = y - y_p$. Déterminer l'équation dont z est solution. En déduire que la solution générale de (6.10)
$$y(t) = Ce^{-A(t)} + y_p(t),$$
où $y_p(t)$ est une solution particulière de (6.10).

EXERCICE 6.19. Résdoudre l'équation différentielle du premier ordre
$$y' + 3x^2y = 0$$

EXERCICE 6.20 (Équation de Bernoulli).
Soient n un entier naturel strictement supérieur à 1 et a et b deux réels. On considère l'équation différentielle suivante :
$$y'(t) = ay(t) + by^n(t). \tag{6.11}$$
On se propose de rechercher les solutions strictement positives de (6.11) sur $\mathbb{R}$.

(1) On pose sur $\mathbb{R}$, $z = y^{1-n}$. Déterminer une équation différentielle satisfaite par z et la résoudre.

(2) En déduire les solutions strictement positives de (6.11) sur $\mathbb{R}$.

(3) Que donne le cas $n = 0$?

TRAVAUX DIRIGÉS 8

Ensembles, applications, logique

Ensembles

EXERCICE 8.1.
On cherche à construire par récurrence les parties d'un ensemble à $n \in \mathbb{N}$ éléments. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \{a_1, ..., a_n\}$ où les a_i sont quelconques.

(1) Déterminer $\mathcal{P}(S_0)$

(2) pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $\mathcal{P}(S_n)$ en fonction de $\mathcal{P}(S_{n-1})$.

On considérera a_n le dernier élément de S_n et pour construire les parties de $\mathcal{P}(S_n)$, on se servira des parties de $\mathcal{P}(S_n)$ qui contiennent a_n et celles qui ne contiennent pas a_n.

(3) Expliciter l'algorithme utilisant cette méthode.

(4) Traduisez-le en "mots courants" !

(5) En déduire aussi que le cardinal de $\mathcal{P}(S_n)$ vaut 2^n.

(6) Application : construire de cette façon $\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\})$

Applications

EXERCICE 8.2.
Soient X, un ensemble quelconque, I un ensemble fini, $(a_i)_{i \in I}$ des nombres réels et $(A_i)_{i \in I}$ une partition [1] de X.

(1) On pose [2]

$$\forall x \in X, \quad f(x) = \sum_{i \in I} a_i \chi_{A_i}(x). \tag{8.1}$$

Simplifier f.

(2) Le résultat précedent est-il valable si I n'est plus nécessairement supposé fini ?

EXERCICE 8.3.
Soit I un ensemble quelconque.

(1) On rappelle que χ_A désigne la fonction caractéristique de $A \subset I$, égale à 1 sur A et 0 ailleurs.

Montrer qu'à toute partie A de $\mathcal{P}(I)$ on peut associer une unique application f de I dans $\{0, 1\}$ telle que $f = \chi_A$ et réciproquement.

(2) En déduire une construction algorithmique des parties de l'ensemble $I = \{1, 2, ..., n\}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$. Traiter le particulier $n = 4$.

1. On rappelle que cela signifie : aucun A_i n'est vide, elles sont deux à deux disjointes et de réunion égale à X.
2. On rappelle que χ_A désigne la fonction indicatrice d'une partie A de X, valant 1 sur A et 0 ailleurs.

Logique

EXERCICE 8.4.
Écrire les tables de vérité des lois $. \wedge . \wedge .$, $. \wedge (. \vee .)$ et $. \vee (. \Longrightarrow .)$ (c'est-à-dire des applications $(P,Q,R) \mapsto P \wedge Q \wedge R$, $(P,Q,R) \mapsto P \wedge (Q \vee R)$, $(P,Q,R) \mapsto P \vee (Q \Longrightarrow R)$).

EXERCICE 8.5.

(1) (a) Proposer différentes fonctions (en les idenfiant) qui agissent sur une proposition P qui ne peut peut prendre que deux valeurs, V (vrai) ou F (faux).

(b) Comment, en considérant une table de vérité contenant les différentes valeurs possibles de P, être certain d'obtenir l'exhaustivité de cette liste de fonction ?

(2) On étudie maintenant les fonctions qui agissent sur deux propositions P et Q.

(a) En raisonnant comme dans la question 1b, proposer un tableau contenant toutes les valeurs possibles de ces fonctions.

(b) Identifier un certain nombre de ces fonctions en utilisant les fonctions connues ($\vee$, $\wedge$, $\neg$, $\Longrightarrow$ ....).

(c) On essaye maintenant d'identifier toutes les fonctions établies dans la question 1b.

(i) Essayez de trouver, parmi les fonctions déterminées dans la question 1b, les fonctions suivantes :

- $(P,Q) \mapsto P$
- $(P,Q) \mapsto Q$
- $(P,Q) \mapsto \neg P$
- $(P,Q) \mapsto \neg Q$
- $(P,Q) \mapsto \mathrm{F}$
- $(P,Q) \mapsto \mathrm{V}$

(ii) Comment définir l'ensemble des fonctions définies par : pour toute proposition P et Q :

$$f(P,Q) = (a(P))b(c(P)), \tag{8.2}$$

où

$$\begin{aligned} a &\in \{I_{\mathrm{d}}, \neg\}, \\ b &\in \{\wedge, \vee\}, \\ c &\in \{I_{\mathrm{d}}, \neg\}. \end{aligned}$$

(iii) Appliquer cela pour retrouver l'ensemble des fonctions définies par (8.2), parmi les fonctions déterminées dans la question 1b.

(iv) Exprimer ces différentes fonctions autrement en utilisant les fonction $\Longrightarrow$ et $\neg$.

(v) Quelles fonctions "manquent à l'appel" par rapport aux fonctions déterminées dans la fonction 2a ?

(vi) Y'a-t-il unicité de l'écriture des différentes fonctions déterminées ?

(vii) Conclure.

(3) (a) Comment feriez-vous pour déterminer toutes les fonctions qui agissent sur trois propositions P, Q et R ?

(b) Comment feriez-vous pour identifier toutes ces fonctions ?

(4) De façon plus générale, quel est le nombre de fonctions qui agissent sur $n \geq 1$ propositions ?

Applications (exercices facultatifs)

EXERCICE 8.6.
Comment modifier le premier exemple du corrigé de l'exemple 9.13 page 61 du cours pour rendre l'application respectivement injective, surjective, bijective ?

EXERCICE 8.7.
Comment modifier le premier exemple du corrigé de l'exemple 9.14 page 61 du cours pour rendre l'application respectivement injective, surjective, bijective ?

Cet exercice a été donné à l'examen à l'automne 2022.

EXERCICE 8.8.

(1) (a) Expliquer comment un homme préhistorique qui ne sait pas compter (il distingue juste, de façon très binaire, une et zéro pierre) peut comparer deux tas de pierre. Plus précisément, sans tenir compte, ni de leur masse, ni de leur volume, comment peut-il en un nombre fini et simple d'opérations, déterminer lequel en contient le plus [3].

(b) Est-ce valable si l'un des tas de caillou est infini (numéroté par eremple 0, 1, 2, 3, ...) ? Mettre cela en lien avec la notion de bijection.

(c) Dans cette même logique, peut-on savoir s'il y a autant de nombre entiers naturels que de nombre pairs, de nombres impairs ? S'il y a autant de nombres pairs que de nombres impairs ?

(2) (a) (i) Peut-on exhiber une bijection entre l'union de $\mathbb{N}$ et un autre élément, par exemple avec -1 et $\mathbb{N}$?

(ii) De même, si p est un entier non nul, peut-on exhiber une bijection entre $\{k \in \mathbb{Z}, -p \leq k\}$ et $\mathbb{N}$?

(b) (i) Peut-on exhiber une bijection entre $\{0, 1\} \times \mathbb{N}$ et $\mathbb{N}$? On pourra penser à associer à un couple du type $(0, n)$, où n est un entier, à un nombre pair et à un couple du type $(1, n)$, à un nombre impair.

(ii) De même, si p est un entier non nul, peut-on exhiber une bijection entre $\{0, 1, ..., p\} \times \mathbb{N}$ et $\mathbb{N}$?

(3) Toutes les questions de la question 2 servent en fait à poser un cadre mathématique pour étudier l'hôtel de Hilbert ; cet hotel possède un nombre infini de chambres, numérotées 0, 1, 2, 3, ... On suppose qu'il est plein, c'est-à-dire qu'il y a un client par chambre.

(a) (i) On suppose qu'arrive un voyageur en taxi et qu'il souhaite occuper une chambre, ce qui est possible d'après le récéptionniste. Comment procède-t'il ? Mettre cela en lien avec la question (2a).

(ii) Même question si un bus contenant p personnes pour p est entier non nul, se présente.

(b) (i) On suppose maintenant que le bus, qui appartient au beau-frère du réceptionniste, possède un nombre infini de voyageurs, numérotés 0, 1, 2, 3, ... Si ce bus arrive le soir à l'hôtel, comment remplir l'hôtel avec tous ces nouveaux voyageurs ? On mettra cela en lien avec la question 2b.

(ii) Même question si ce sont deux bus infinis qui arrivent ou de façon plus générale, p bus.

(iii) Enfin, on suppose que, le beau frère qui a fait fortune, grâce à tous ces voyageurs, investit dans un nombre infini de bus, numérotés 1, 2, 3, 4, ... Comment procéder pour remplir l'hôtel si tous ces bus arrivent, pleins, à l'hôtel.
On admettra cette fois-ci que $\mathbb{N}^2$ est bijection avec $\mathbb{N}$.

3. peut-être pour déterminer lequel correspond à la plus grande richesse ... ce genre de calcul a peut-être été le premier du genre, sachant que le mot "calcul" provient éthymologiquement du mot "caillou".

TRAVAUX DIRIGÉS 11

Suites

Études sommaires de suites définies par récurrence

EXERCICE 11.1.

(1) (a) N'oubliez pas de convertir votre calculatrice en mode radian. Ceux qui ont une calculatrice « à l'ancienne » procèderont ainsi : Taper n'importe quel nombre, par exemple 0.500000, puis appuyez plusieurs fois de suite sur la touche « cos ». Les autres calculatrices, avec affichage alphanumérique, devront s'adapter. Vous pouvez aussi utiliser votre ordinateur !

Que constatez-vous ?

(b) En appelant u_n, la valeur obtenue à la n-ième frappe de la touche « cos », quelle relation avez-vous entre u_n et n ? Entre u_{n+1} et u_n ?

(2)

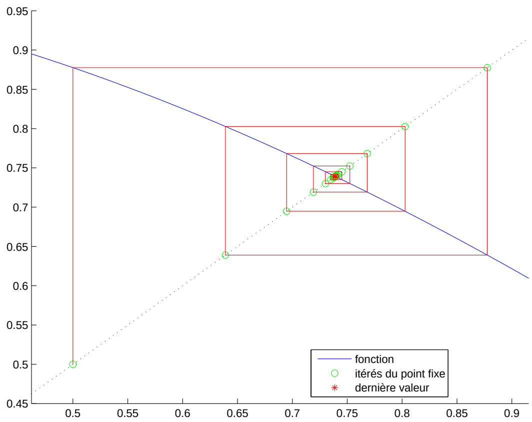


FIGURE 11.1. Le colimaçon associés à la suite $u_{n+1} = \cos u_n$.

Tracer sur un même graphique les fonctions données par $y = \cos(x)$ et $y = x$ et expliquer la construction du colimaçon de la figure 11.1.

(3)

Faire la même manœuvre en passant cette fois-ci votre calculatrice en mode degré. Observez la figure 11.2.

(4)

Observez la figure 11.3 et commentez ! Ici, α est donné numériquement par

$$\alpha = 100. \tag{11.1}$$

(5) Tâchez de vous référer par exemple à [DB21, chapitre "Équations non-linéaires", section "Méthode de point fixe"] pour comprendre la convergence de la suite u_n dans les différents cas vu ci-dessous.

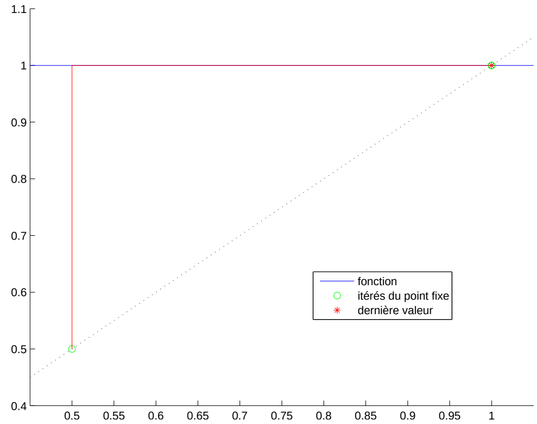


FIGURE 11.2. Le colimaçon associés à la suite $u_{n+1} = \cos u_n$ (en degré).

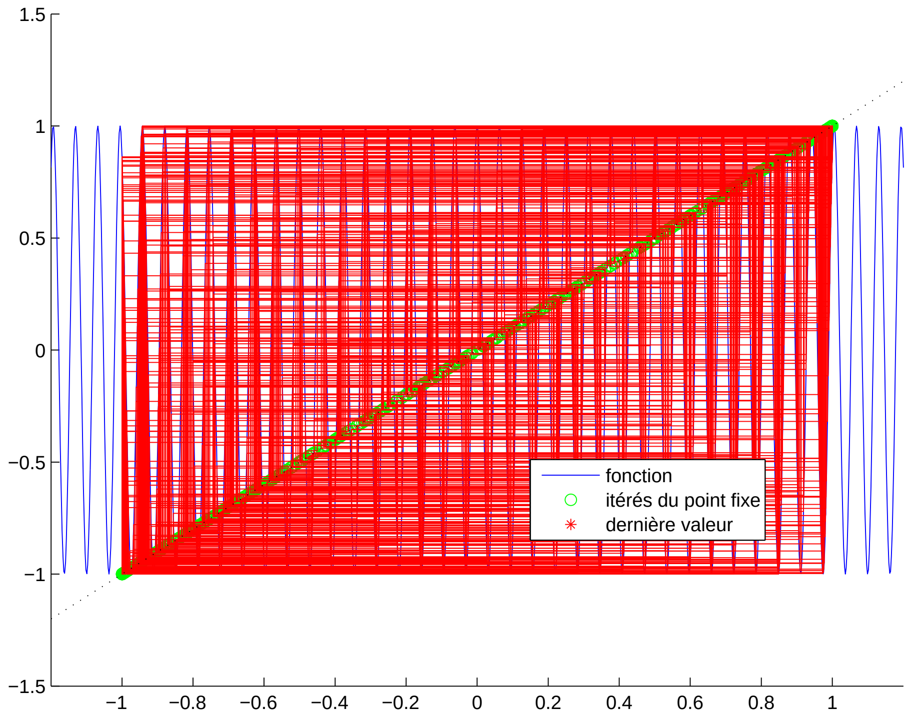


FIGURE 11.3. Le colimaçon associés à la suite $u_{n+1} = \cos(\alpha u_n)$ pour α donné par (11.1).

EXERCICE 11.2.
Reprendre l'exercice 11.1 avec la suite définie par récurrence par

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{A}{u_n}\right), \tag{11.2}$$

en prenant par exemple $u_0 = 5$ et $A = 10$. Observez la « rapidité » du calcul et la figure 11.4.

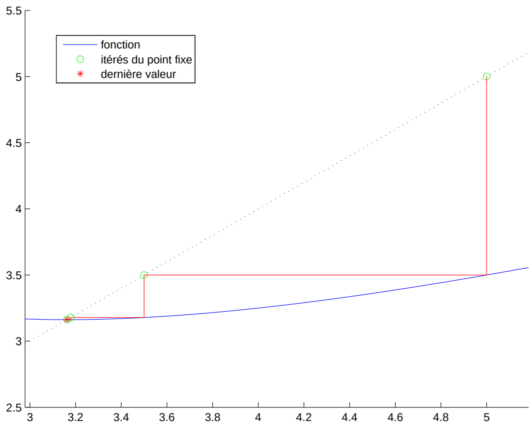


FIGURE 11.4. Le colimaçon associés à la suite définie par (11.2).

Étude de suites

EXERCICE 11.3.
Étudier la convergence des suites définies par leur terme général u_n dans chacun des cas suivants :

$$u_n = \frac{n-(-1)^n}{n+(-1)^n},$$
$$u_n = \frac{3^n-2^n}{3^n+2},$$
$$u_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n},$$
$$u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

EXERCICE 11.4.
Soient (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs réelles.

(1) Si (u_n) est bornée et si (v_n) tend vers $+\infty$, montrer que (u_n+v_n) tend vers $+\infty$.
(2) Peut-on affaiblir l'hypothèse sur (u_n) ?
(3) Exhibez un contre-exemple de suite (u_n) non minorée et (v_n) tendant vers $+\infty$ telles que (u_n+v_n) tend vers $+\infty$.

EXERCICE 11.5.

(1) Soit (u_n) une suite convergente, non constante à partir d'un certain rang. Comment, dans la définition de la convergence, assurer l'unicité de l'entier N en fonction de ε ? Par la suite, cet entier N est noté $N(\varepsilon)$.
(2) Montrer que $N(\varepsilon)$ tend vers $+\infty$ quand ε tend vers zéro, c'est-à-dire :
$$\forall A \in \mathbb{N}, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall \varepsilon \in]0,\eta], \quad N(\varepsilon) \geq A. \tag{11.3}$$
(3) Déterminer $N(\varepsilon)$ pour $u_n = a\sin(1/n)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}^*$.

EXERCICE 11.6.

(1) Que peut-on dire d'une suite qui vérifie $\lim_{n\to\infty} nu_n = 0$?
(2) Que peut-on dire d'une suite qui vérifie $\lim_{n\to\infty} nu_n = 1$?

(3) Que peut-on dire d'une suite qui vérifie $\lim_{n\to\infty} nu_n = +\infty$?

EXERCICE 11.7.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n^2 = \lambda$. Que dire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

EXERCICE 11.8.
Soient u et v deux suites de réels de $[0,1]$ telles que $\lim_{n\to+\infty} u_n v_n = 1$. Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers 1.

EXERCICE 11.9.
Cet exercice a été donné à l'examen à l'Automnne 2022.
Étudier (en montrant que ces deux suites sont adjacentes) les deux suites u_n et v_n respectivement définies par

$$u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n+1}, \quad v_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n}.$$

Étude de suites (exercices facultatif)

EXERCICE 11.10.
On souhaite étudier la convergence de la suite complexe définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{2-u_n},$$

avec $0 < |u_0| < 1$.

(1) Étudier d'abord la suite des modules.

(2) Conclure sur la convergence de la suite (u_n).

EXERCICE 11.11.
Soient $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite à terme strictement positifs et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite à terme complexes vérifiant

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = +\infty, \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = l \in \mathbb{C}.$$

(1) Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right)^{-1} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k = l.$$

(2) Quel résultat connu cela généralise-t-il dans le cas où $\lambda_k = 1$?

(3) Dans le cas où $\lambda_k = 1$, existe-t-il une suite qui vérifie la convergence au sens étudié, sans être convergente ?

Calculs explicites de sommes

EXERCICE 11.12.
Démontrer la formule (11.25a) page 76 du cours, de une, deux, voire trois façon(s) (différentes). On pourra utiliser par exemple l'une des deux méthodes proposées dans le cours au point 5a page 75, dans le cas particulier $p = 2$.

EXERCICE 11.13.
Démontrer la formule (11.25b) page 76 du cours, de une, deux, voire trois façon(s) (différentes). On pourra utiliser par exemple l'une des deux méthodes proposées dans le cours au point 5a page 75, dans le cas particulier $p = 3$.

Suites arithmético-géométriques

EXERCICE 11.14.
Vu sur https://fr.wikipedia.org/wiki/Tours_de_Hano%C3%AF

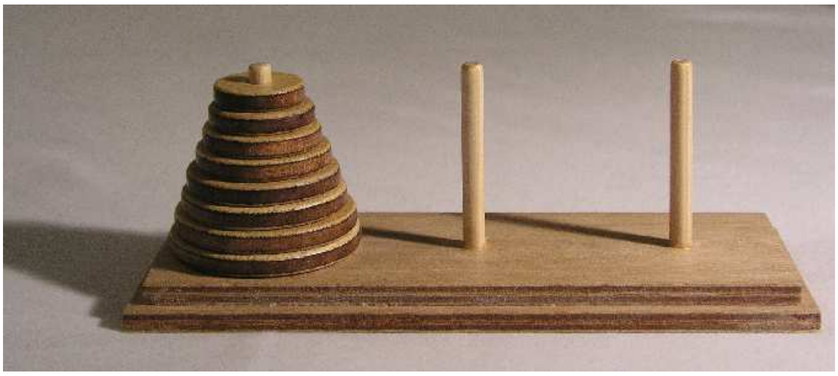


FIGURE 11.5. Une système de tour de Hanoï en bois (CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=228623).

Les tours de Hanoï sont un jeu de réflexion et consistant à déplacer des disques de diamètres différents d'une tour de "départ" à une tour d'"arrivée" en passant par une tour "intermédiaire", et ceci en un minimum de coups, tout en respectant les règles suivantes :

— on ne peut déplacer plus d'un disque à la fois ;
— on ne peut placer un disque que sur un autre disque plus grand que lui ou sur un emplacement vide.

On suppose que cette dernière règle est également respectée dans la configuration de départ (Voir la figure 11.5).

(1) Déterminer u_n le nombre de coups minimal pour pour parvenir à ses fins. On déterminera, pour cela, une relation de récurrence liant u_n à u_{n-1}.
(2) Montrer que la méthode décrite ici donne la séquence optimale (celle qui nécessite le moins de coups), et que celle-ci est unique.

Approximations de π

EXERCICE 11.15.
Nous étudions dans cet exercice la méthode d'approximation de π, imaginée par Archimède (voir aussi les exercices 11.16 et 11.17).
Pour plus de détails, on pourra consulter la section M.2 page 201 du cours.
L'idée est de construire deux suites de polygone réguliers de même nombre de sommets tels qu'un cercle donnés soit circonscrit à chacun des polygone de la première suite (le cercle passe par tous les sommets) et ce cercle soit inscrit dans chacun des polygone de la seconde suite (le cercle est tangent à tous les cotés de ce polygone). Par la suite, pour simplifier les polygones auxquels est cisconcrit le cercle seront dits inscrits dans le cercle et les polygones dans lequel le cercle est inscrits seront dits circonscrits au cercle. Chacune des deux suite de polygone se rapprochera du cercle donné de telle sorte que les polygones aient des périmètres (faciles à calculer) qui se rapprochent par défaut et par excès du périmètre du cercle. Au début, on considère deux héxagones réguliers inscrit et circonscrit au cercle. Ensuite à chaque étape, on double le nombre de sommet de chacun des deux polygones en construisant deux nouveaux polygones qui soient de nouveau respectivement inscrits et circonscrit au cercle.

(1) On supposera que le cercle est de rayon 1/2. À l'étape numéro $n \in \mathbb{N}$ du procédé, notons

U_n la longueur du côté du polygone régulier inscrit dans le cercle,

V_n la longueur du côté du polygone régulier circonscrit au cercle.

Déterminer U_0 et V_0 ainsi que les relations de récurrence relatives à U_n et V_n.

(2) En déduire l'expression des périmètres des polygones réguliers inscrit et circonscrit au cercle.

(3) Montrer de façon géométrique que ces périmètres tendent vers π.

(4) Montrer de façon analytique que ces périmètres tendent vers π en précisant la qualité de la convergence (c'est-à-dire une estimation des erreurs commises).

(5) Constuire (en imaginant le faire avec une règle et un compas) les deux premiers polygones.

EXERCICE 11.16.
Nous étudions dans cet exercice la méthode d'approximation de π, imaginée par Cuès, dans la lignée de la méthode d'Archimède (voir aussi les exercices 11.15 et 11.17).
Pour plus de détails, on pourra consulter la section M.3 page 216 du cours.

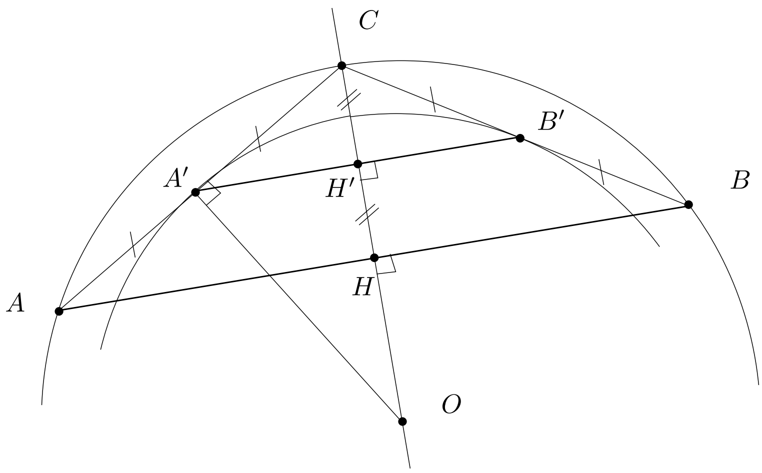


FIGURE 11.6. Passage du polygône à celui d'un polygône à deux fois plus de cotés, de même périmètre.

Nous partons d'un carré de coté 1/4 et donc de périmètre 1. Nous allons cette fois-ci construire une suite de polygônes réguliers de mêmes périmètres, tous égaux à 1, le coté du nouveau polygône étant égal à la moitié de l'ancien et comme pour la méthode d'Archimède, le nombre de sommet étant le double. Cette suite de polygône se rapprochera d'un cercle de périmètre 1 et donc de rayon $1/(2\pi)$.
On se donne tout d'abord un polygone régulier de coté $[AB]$ (ayant en tout n cotés), inscrit dans un cercle de rayon r et de centre O et on construit un polygone ayant deux fois plus de cotés et de périmètre égal au premier (il sera dit isopérimétre au premier). Voir figure 11.6. On considère C le milieu de l'arc AB, A' le milieu de $[AC]$ et B' le milieu de $[BC]$, H le milieu de $[AB]$ et H' le milieu de $[A'B']$. On considère alors le polygone régulier à $2n$ cotés, de centre O, dont l'un des cotés est $[A'B']$ et nous montrons qu'il est bien isopérimètre au premier polygone. Notons r le rayon OA, cercle dans lequel est inscrit le premier polygone et a son apothème, c'est-à-dire, la distance de O au milieu de AB, soit la distance OH.

(1) Calculer $r' = OA'$, et $a' = OH'$ en fonction de $r = OA$ et $a = OH$.

(2) On supposera que polygône sera de périmètre constant égal à 1 et qu'au début du calcul, pour $n = 2$, la polygône est un carré. À l'étape numéro $n \geq 2$ du procédé, notons

$$r_n = OA,$$
$$a_n = OH.$$

Déterminer a_2 et v_2 ainsi que les relations de récurrence relatives liant a_{n+1} et r_{n+1} à r_n et a_n.

(3) Montrer de façon géométrique que les suites a_n et r_n tendent vers $1/(2\pi)$.

(4) Montrer de façon géométrique que les suites a_n et r_n tendent vers $1/(2\pi)$ en précisant la qualité de la convergence (c'est-à-dire une estimation des erreurs commises).

(5) Constuire (en imaginant le faire avec une règle et un compas) les deux premiers polygones.

EXERCICE 11.17.
Nous étudions dans cet exercice la méthode d'approximation de π, attribuée à Descartes, mais qui n'est qu'une variante de celle imaginée par Cuès (voir aussi les exercices 11.15 et 11.16).
Pour plus de détails, on pourra consulter la section M.4 page 222 du cours.

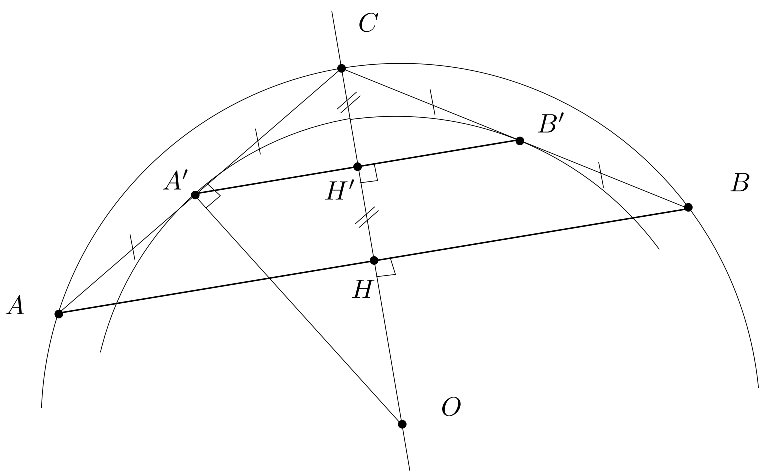


FIGURE 11.7. Passage du polygône à celui d'un polygône à deux fois plus de cotés, de même périmètre.

Nous partons d'un carré de coté $1/4$ et donc de périmètre 1. Nous allons cette fois-ci construire une suite de polygônes réguliers de mêmes périmètres, tous égaux à 1, le coté du nouveau polygône étant égal à la moitié de l'ancien et comme pour la méthode d'Archimède, le nombre de sommet étant le double. Cette suite de polygône se rapprochera d'un cercle de périmètre 1 et donc de rayon $1/(2\pi)$.
On se donne tout d'abord un polygone régulier de coté $[AB]$ (ayant en tout n cotés), inscrit dans un cercle de rayon r et de centre O et on construit un polygone ayant deux fois plus de cotés et de périmètre égal au premier (il sera dit isopérimétre au premier). Voir figure 11.7. On considère C le milieu de l'arc AB, A' le milieu de $[AC]$ et B' le milieu de $[BC]$, H le milieu de $[AB]$ et H' le milieu de $[A'B']$. On considère alors le polygone régulier à $2n$ cotés, de centre O, dont l'un des cotés est $[A'B']$ et nous montrons qu'il est bien isopérimètre au premier polygone. Notons r le rayon OA, cercle dans lequel est inscrit le premier polygone et a son apothème, c'est-à-dire, la distance de O au milieu de AB, soit la distance OH.

(1) Calculer $r' = OA'$, et $a' = OH'$ en fonction de $r = OA$ et $a = OH$.

(2) On supposera que polygône sera de périmètre constant égal à 1 et qu'au début du calcul, pour $n = 2$, la polygône est un carré. À l'étape numéro $n \geq 2$ du procédé, notons

$$\begin{aligned} r_n &= OA, \\ a_n &= OH. \end{aligned}$$

Déterminer a_2 et v_2 ainsi que les relations de récurrence relatives liant a_{n+1} et r_{n+1} à r_n et a_n.

(3) Montrer de façon géométrique que les suites a_n et r_n tendent vers $1/(2\pi)$.

(4) Montrer de façon géométrique que les suites a_n et r_n tendent vers $1/(2\pi)$ en précisant la qualité de la convergence (c'est-à-dire une estimation des erreurs commises).

(5) En éliminant r_n dans les relations de récurrence précédemment établies, exprimer a_{n+1} en fonction de a_n.

Emprunts bancaires

EXERCICE 11.18.
On emprunte une somme que l'on rembourse mois par mois à mensualité et à taux constants.
On appelle S la somme empruntée et τ le taux d'emprunt (hors assurance) annuel, supposé constant et m la mensualité, supposée constante.
Au bout du n-ième mois ($n \in \mathbb{N}$), on appelle k_n le capital dû. Initialement, pour $n = 0$, on doit le capital k_0.
À partir du premier mois, on rembourse, chaque mois, la mensualité, qui se décompose en un intérêt et un amortissement, qui représente le remboursement du capital (hors intérêt). On note donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$, i_n l'intérêt relatif au capital k_n et a_n, l'amortissement remboursé au n-ième mois. L'emprunt cessera lorsque le capital k_n devient négatif ou nul.

(1) Exhiber des relations entre a_n, k_n et i_n et montrer que l'on a la relation

$$k_{n+1} = k_n \left(1 + \frac{\tau}{12}\right) - m.$$

(2) En déduire l'expressions de k_n.

(3) Dédéterminer le plus grand entier n_0 tel que $k_{n_0} > 0$.

(4) Déterminer le coût de l'emprunt, correspondant à la somme des intérêts.

TRAVAUX DIRIGÉS 12

Séries

Étude de séries par calculs directs de somme

EXERCICE 12.1.
On considère la série de terme général

$$u_n = \ln(1 - 1/n^2).$$

(1) Calculer la somme partielle et en déduire la convergence et la somme de la série de terme général u_n.

(2) Auriez-vous pu d'abord démontrer la convergence de la série ?

EXERCICE 12.2.

(1) Montrer que l'on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \frac{x}{1+x^2+x^4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2-x+1} - \frac{1}{x^2+x+1}\right).$$

(2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer S_n définie par

$$S_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{p}{1+p^2+p^4}.$$

(3) En déduire la valeur de la somme S définie par

$$S = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{p}{1+p^2+p^4}.$$

(4) Pourriez-vous démontrer au préalable la convergence de la série de terme général $u_p = \dfrac{p}{1+p^2+p^4}$ sans expliciter la somme partielle ?

Autour des séries géométriques

EXERCICE 12.3.

(1) Montrer qu'en base 10, on a

$$1 = 0,999....$$

(2) Est-ce un paradoxe ?

EXERCICE 12.4.
Dans cet exercice, on se place en base 10.

(1) Quel nombre rationnel est égal à $0,123123123...$ (le développement est périodique de période 123) ?

(2) En généralisant, montrer que tout nombre dont l'écriture en base 10 est périodique à partir d'un certain rang, est égal à un nombre rationnel.

EXERCICE 12.5.
" Imaginons Achille qui court derrière une tortue, dix foix plus lente que lui. Il est dix mètres derrière elle. Pendant qu'il parcourt ces dix mètres, la tortue parcourt un mètre et se retrouve donc un mètre plus loin. Pendant qu'il parcourt ce mètre, la tortue parcourt 0.1 m. Pendant qu'il parcourt 0.1 m., la tortue parcourt 0.01 m. Pendant qu'il parcourt 0.01 m., la tortue parcourt 0.001 m. et ainsi de suite : il restera toujours une distance non nulle entre lui et la tortue et il n'atteindra jamais celle-ci ! "
Que pensez-vous de ce raisonnement ?

EXERCICE 12.6.
Imaginons une mouche (virtuelle) qui vole, en ligne droite, à 200 km/h en partant d'une ville A se dirigeant vers une ville B, distante de 100 kilomètres.
Au moment où elle part, un train part de la ville B, se dirige vers la ville A, à 100 km/h. Quand la mouche rencontre le train, elle fait un demi-tour instantané et repart vers A. Quand elle arrive en A, elle repart vers B et le train. Après un nombre infini d'allers et retours entre A et le train, quand la mouche se retrouve écrasée entre le train et la gare en A, quelle distance a-t-elle parcouru ?

Étude générale de séries

EXERCICE 12.7.
Étudier la convergence de la série de terme général

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \left(1 - n^{-2}\right)^n.$$

EXERCICE 12.8.
Étudier la convergence de la série de terme général

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = e^{-\sqrt{n}}.$$

EXERCICE 12.9.
Étudier la convergence de la série de terme général

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \cos\left(\frac{\pi\, n^2}{2\, n^2 + an + 1}\right) \text{ avec } a \geq 0.$$

EXERCICE 12.10.
Cet exercice a été donné à l'examen complémentaire à l'Automne 2022.
Soient $a > 0$ et $b > 0$ et (u_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{a^n 2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n}} + b^n}.$$

(1) Déterminer, selon les valeurs de b, les limites de la suite $v_n = 2^{\sqrt{n}}/b^n$.
(2) En déterminant un équivalent de u_n, en déduire la nature de la série de terme géneral u_n.

TRAVAUX DIRIGÉS 13

Comparaison asymptotique

EXERCICE 13.1.
Déterminer la complexité algorithmique de [BM03, l'algorithme 1.1 p. 15] reproduit page 103 du cours.

EXERCICE 13.2.
Déterminer la complexité algorithmique de [BM03, l'algorithme 1.2 p. 17] reproduit page 105 du cours.

EXERCICE 13.3.
Déterminer la complexité algorithmique de [BM03, l'algorithme 1.3 p. 19] reproduit page 107 du cours.

TRAVAUX DIRIGÉS 14

Exponentielle et logarithme

Exercices généraux

EXERCICE 14.1. On pose pour tout $x > 0$,

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}.$$

(1) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ vers un intervalle que l'on déterminera.

(2) Déterminer $f^{(-1)}$.

EXERCICE 14.2. Étudier la fonction $x \mapsto x^x$.

EXERCICE 14.3.

(1) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$, par $f(x) = 2^x - x^2$.

   (a) Étudier successivement les fonctions f''', f'' et f'.
   On donnera les valeurs numériques suivantes : $\ln^2(2) - 2 \approx -1.5195$. Pour $\alpha = (\ln(2/\ln^2 2))/\ln 2 \approx 2.0575$, $f'(\alpha) \approx -1.2297$; f' a deux zéros $\beta_1 \approx 0.4851$ et $\beta_2 \approx 3.2124$.

   (b) En déduire le tableau de variation de f. On remarquera que f, la fonction étudiée est nulle en 2 et 4.

(2) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n \geq 5 \Longrightarrow 2^n > n^2.$$

(3) En déduire les solutions $n \in \mathbb{N}^*$ de l'équation $2^n = n^2$.

(4) *Question facultative*

Pour l'étude de la fonction f, montrer qu'en fait les indications numériques fournies dans les questions 1a et 1b étaient inutiles, en admettant néanmoins que

$$e < 2,8 \text{ et } \ln(2) < 0,7. \tag{14.1}$$

On pourra traiter la généralisation de cet exercice dans l'exercice 1.27 page 5.

EXERCICE 14.4. Construire le graphe de la fonction suivante :

$$f(x) = \frac{1}{x} \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right).$$

EXERCICE 14.5. Cet exercice a été donné à l'examen à l'automne 2022.
Soit $(a, b) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$. Montrer que l'application f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f(x) = \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{1/x},$$

est strictement croissante. On pourra noter $t = b/a \in \mathbb{R}_+^*$.

EXERCICE 14.6. Construire le graphe de la fonction suivante :

$$f(x) = xe^{\frac{2x}{x^2-1}}.$$

Application à l'identification

EXERCICE 14.7.

(1) Soient $k \in \mathbb{R}^*$, $y_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $t_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que la solution de l'équation différentielle

$$y'(t) = ky(t), \tag{14.2a}$$

$$y(t_0) = y_0, \tag{14.2b}$$

est donnée par

$$y(t) = y_0 e^{k(t-t_0)}. \tag{14.3}$$

(2) Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ et $\tau \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que si y est donnée par (14.2), alors

$$(\forall t \geq t_0, \quad y(t+\tau) = \alpha y(t)) \Longleftrightarrow k\tau = \ln \alpha. \tag{14.4}$$

(3) Montrer que si $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, la fonction réciproque de $\log_a$ est $x \mapsto a^x$.

(4) Supposons que y vérifie (14.2) et que soient connues des données expérimentalement mesurées notées $(t_i, Z_i)_{1 \leq i \leq N}$ avec

$$\forall i \in \{1, ..., N\}, \quad Z_i = \log_{10}(y(t_i)). \tag{14.5}$$

(a)

Montrer que l'on alors

$$\forall i \in \{1, ..., N\}, \quad Z_i = At_i + B, \tag{14.6a}$$

avec

$$A = \frac{k}{\ln(10)}. \tag{14.6b}$$

(b)

Que peut-on en déduire ?

(c)

Nous présentons dans le tableau 14.1, issu de `http://fr.wikipedia.org/wiki/Loi_de_Moore`, le logarithme décimal du nombre de transistors par puce de silicium entre 1970 et 2010. Tracer un graphique $(t_i, Z_i)_{1 \leq i \leq N}$. En supposant que ce nombre $y(t)$ suit la loi donnée par (14.3), déduire une détermination graphique de la valeur τ en utilisant ce qui précède et la mesure d'une pente de droite.

(d) Tracer sur le graphique déjà fait, la droite correspondant à un doublement du nombre de transistors tous les 18 mois, passant par le point de coordonnées (t_1, Z_1). Commenter.

(5) *Question facultative*

(a) Est-ce que (14.2) (qui est équivalent à (14.3)) est équivalent à

$$\forall t \geq t_0, \quad y(t+\tau) = \alpha y(t) \quad ? \tag{14.7}$$

(b) Quelle condition nécessaire et suffisante à (14.2) (qui est équivalent à (14.3)) pourriez-vous adjoindre à (14.7) ?

t_i	Z_i
1970.8878	3.3871
1979.0259	4.4839
1981.9359	5.1505
1984.9445	5.4731
1988.9889	6.0968
1992.9840	6.5054
1995.0062	6.7634
1996.8804	6.8710
1999.0506	7.4516
2001.0234	7.4086
2000.9741	7.6452
2001.9605	8.3763
2004.0321	8.1398
2004.0321	8.8280

TABLE 14.1. données $(t_i, Z_i)_{1\leq i\leq N}$.

Les règles de puissance et une définition alternative de l'exponentielle

EXERCICE 14.8.
Cet exercice a été donné à l'examen complémentaire à l'Automne 2022.
Justifiez(et préciser le cas échéant) toutes les règles de la figure 14.1, issue d'un cours de quatrième, à partir de la définition donnée en haut à gauche :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times ... \times a}_{n \text{ fois}} \quad \text{avec} \begin{cases} a : & \text{nombre} \\ n : & \text{nombre entier positif} \end{cases}$$

Il est sous-entendu que "nombre entier positif" signifie "nombre entier strictement positif".

Définition alternative et du logarithme

EXERCICE 14.9.
En utilisant la définition du logarithme donnée par l'équation (Q.9) page 273 du cours (voir annexe Q page 271), rédémontrer l'ensemble des formules des chapitres 14 et 15.
On précisera bien quelle est alors la définition de l'exponentielle.

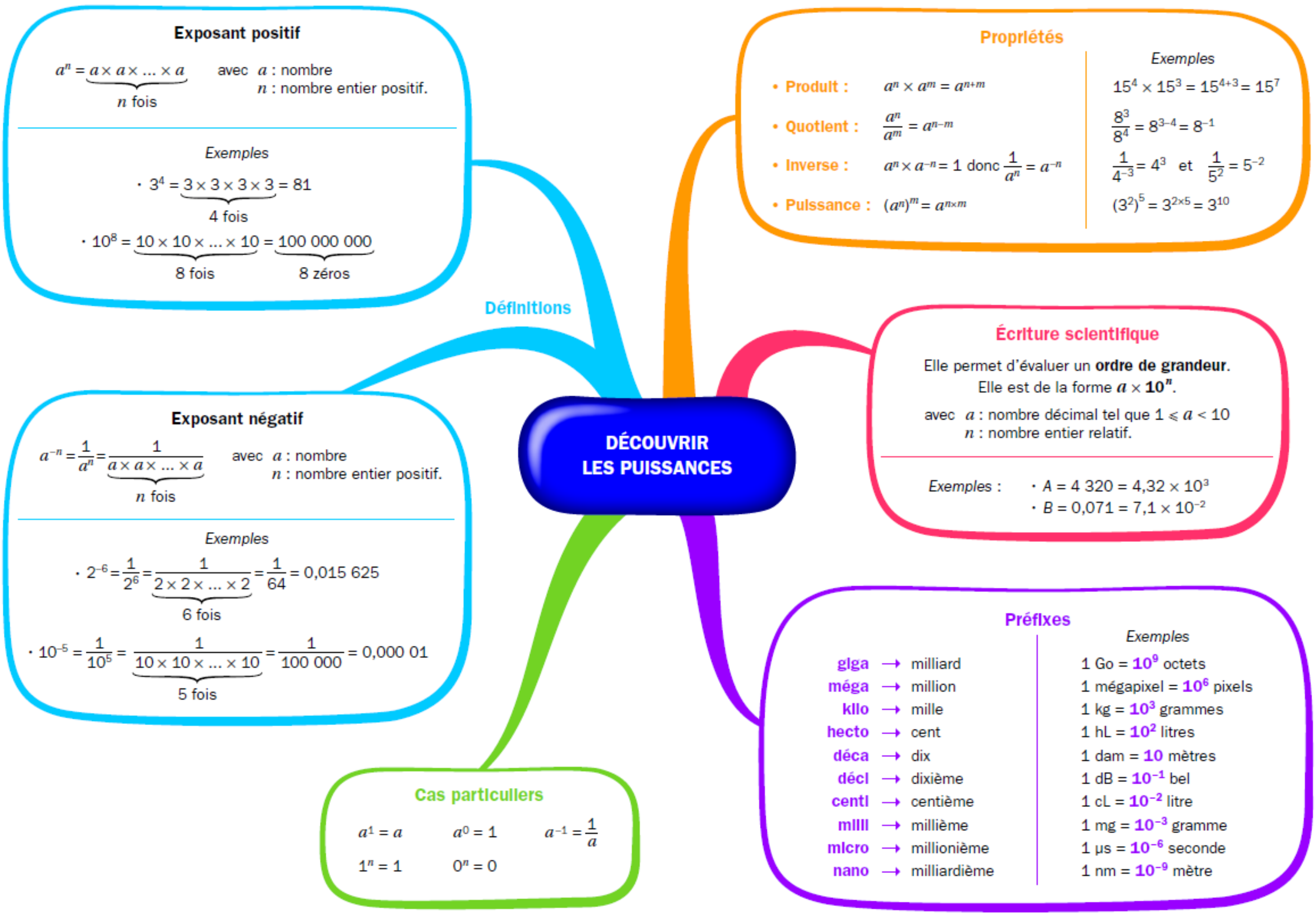


FIGURE 14.1. Les règles de puissances.

TRAVAUX DIRIGÉS 15

Divers problèmes

EXERCICE 15.1.
Un groupe d'amis a loué un gîte pour quelques jours. Chaque familles est constituée d'adultes et d'enfants. Chaque famille a fait des courses et contribué à l'achat de nourriture. De plus, deux d'entre elles se sont partagé les frais du gîte.

(1) Comment procéder pour que chaque famille ait finalement à payer une contribution en vérifiant les règles suivantes : il faut payer proportionnellement
  - pour la nourriture, au nombre de nuits passées dans le gîte et aux nombres de personnes la constituant (en comptant adultes et enfants) ;
  - pour le gîte, au nombre de nuits passées dans le gîte et aux nombres de personnes la constituant (chaque enfant ne paye qu'une demi-part) .

  Vous essayerez de donner une réponse argumentée et surtout étayée de formules mathématiques ou d'un algorithme, afin de prévoir de façon automatique les différents remboursements à faire entre chaque famille. On supposera naturellement connus pour chaque famille, le nombre d'enfants, d'adultes, de nuits passées, la contribution à la nourriture ainsi que la somme payée par les deux familles pour le gîte.

Foyer	Numéro	Nuits	Adultes	Enfants	Nourriture	Gîte
JJ	1	2	2	2	134.00	800.00
R	2	2	1	1	150.00	914.00
AN	3	2	2	1	34.00	0.00
AD	4	2	2	2	92.00	0.00
CY	5	2	2	1	140.00	0.00
CN	6	2	2	3	85.00	0.00
CG	7	2	2	1	85.00	0.00
CC	8	2	2	3	149.00	0.00
G	9	2	1	0	33.00	0.00
LJ-P	10	2	2	2	0.00	0.00
O	11	0	0	1	0.00	0.00
RW	12	2	2	2	68.00	0.00

TABLE 15.1. Données des dépenses du gîtes. Les foyers (familles) sont identifiés dans la première colonne par des initiales ou dans la deuxième par un nombre.

REMARQUE 15.1. Vous pourrez vous exercer sur le type de données fournies dans le tableau 15.1. Les fichiers aux formats `txt` ou `csv` sont disponibles sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/`

`MFIappro/donnees/gite_2019_brut.txt` ou `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MFIappro/donnees/gite_2019_brut.csv`

(2) Comment feriez-vous si chaque famille peut aussi contribuer à la location du gîte ?

Remarque 15.2. Lors du TP 2.7, vous reprendrez cet exercice en le programmant.

Bibliographie

[BC04] J. Bastien et D. Chamoret. *Mathématiques : Applications.* Travaux Dirigés de l'UV MT31 de l'UTBM, disponible sur le web : `http://utbmjb.chez-alice.fr/UTBM/index.html`, rubrique MT31. 2004. 47 pages.

[BD01] G. Blanchard et M.-C. Duban. *Révision d'algèbre et d'analyse (cours de MT11).* Université de Technologies de Compiègne. 2001.

[BM03] J. Bastien et J.-N. Martin. *Introduction à l'analyse numérique. Applications sous Matlab.* Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 519.4 BAS, 4e étage). Voir `https://www.dunod.com/sciences-techniques/introduction-analyse-numerique-applications-sous-matlab`. Paris : Dunod, 2003. 392 pages.

[CN03] T. Clopeau et D. Naima. *Pré-recquis mathématiques. Notes de cours.* Polytech Lyon, 2003.

[DB21] N. Débit et J. Bastien. *Méthodes numériques de base.* Notes de cours de l'UV MNB (Département Informatique) de Polytech Lyon, disponible sur le web : `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`. 2021. 288 pages.