Informatique 3A MFIappro — Automne 2024

# Contrôle continu du 27 janvier 2025

Durée : 1,5 heure(s)

**Documents autorisés** : OUI ☒ NON ☐
Autorisés : *Polycopiés de l'UE, notes manuscrites.*
Interdits : *Écrans (sauf tablette et ordinateurs en mode avion), Livres et Internet*

**Calculatrice autorisée** : OUI ☒ NON ☐
*Tout type*

## Exercice 1.

(1) Rappeler le principe des tiroirs.

(2) En quoi est-il lié aux injections d'un ensemble fini dans un autre ensemble fini ?

(3) Donnez-en une application concrète.

## Exercice 2.

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes. Chacune d'elles propose une preuve alternative de la formule (11.20) du cours pour déterminer la valeur de

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k.$$

(1) On se pose l'habituel problème : "$n$ personnes trinquent ensemble, chacune d'elles trinquant une fois seulement avec chacune des autres. Combien de "tchin" entend-on en tout ?". Notons $N$ le nombre de "tchin".

(a) Si on affirme que chaque personne fait un " tchin " avec chacune des $n-1$ autres, montrer que le nombre obtenu de "tchin" ainsi déterminé est égal à $2N$. En déduire la valeur de $N$ en fonction de $n$.

(b) On raisonne maintenant autrement.

— La personne n° 1 fait $n-1$ "tchin" avec les personnes n° 2, n° 3, ...., n° $n$ ;

— La personne n° 2 fait $n-2$ "tchin" avec les personnes n° 3, n° 4, ...., n° $n$, puisque le "tchin" avec la personne n° 1 a déjà été pris en compte ;

— La personne n° 3 fait $n-3$ "tchin" avec les personnes n° 4, n° 5, ...., n° $n$, puisque les autres "tchin" avec les personnes n° 1 et n° 2 ont déjà été pris en compte ;

— $\vdots$ $\vdots$

— La personne n° $n-2$ fait 2 "tchin" avec les personnes n° $n-1$ et n° $n$, puisque les autres "tchin" avec les personne n° 1 à n° $n-3$ ont déjà été pris en compte ;
— La personne n° $n-1$ fait 1 "tchin" avec la personne n° $n$, puisque les autres "tchin" avec les personne n° 1 à n° $n-1$ ont déjà été pris en compte ;
— La personne n° $n$ fait 0 "tchin", puisque les autres "tchin" avec les personnes n° 1 à n° $n-1$ déjà été pris en compte.

En déduire $N$ sous la forme d'une somme.

(c) Des questions 1a et 1b, déduire l'expression explicite de $S_{n-1}$ puis de $S_n$.

(d) Dans cette question, on montre que le calcul du nombre de "tchin" correspond à un problème de dénombrement de parties à 2 éléments.

(i) Montrer que le calcul de la question 1a revient à dénombrer les $P$ couples $(i, j)$ où $i \neq j$ de l'ensemble $\{1, 2, ..., n\}$ et en déduire la valeur de $P$.

(ii) Montrer que le calcul de la question 1b revient à dénombrer les $Q$ ensembles (à deux éléments) $\{i, j\}$ où $i \neq j$ et en déduire la valeur de $Q$ sous la forme d'une somme.

(iii) Conclure.

(2) Calculer de deux façons différentes la somme

$$\mathcal{S}_{n,2} = \sum_{k=1}^{n} (k+1)^2 - k^2,$$

et en déduire de nouveau la valeur de $S_n$.

**Exercice 3.**

Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{\ln n}{\ln(e^n - 1)}$$

On pourra montrer que pour $n$ assez grand

$$\frac{\ln n}{\ln(e^n - 1)} \geq \frac{1}{n}.$$

**Exercice 4.**

On considère un entier $\beta \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ et un entier naturel $d$ dont les chiffres en base $\beta$ sont (dans l'ordre inverse de l'ordre habituel de celui d'écriture) $a_0$, $a_1$, ...., $a_n$ écrit sous la forme

$$d = \overline{a_n a_{n-1} .... a_0} \tag{1}$$

et vérifiant donc

$$d = \sum_{i=0}^{n} a_i \beta^i. \tag{2}$$

Par convention, si $d \neq 0$, on a

$$a_n \geq 1. \tag{3}$$

(1) Le nombre de chiffre de $d$ est $n+1$. Déterminer $n$ en fonction de $d$ et de $\beta$.

(2) (a) Déterminer un algorithme simple qui permette de calculer $(a_n, a_{n-1}, ...., a_0)$ en fonction de $d$ et $\beta$.

(b) Quel en est sa complexité ?

(c) Montrer que l'on peut ne pas répondre à la question 1 pour écrire cet algorithme et proposer l'algorithme modifié.

(3) Faire tourner cet algorithme de "façon débranchée" pour $\beta$ et $d$ donnés par

$$\beta = 2, \tag{4a}$$

$$d = 25. \tag{4b}$$

(4) On suppose dans cette question que $\beta = 10$.

(a) Est-ce que l'algorithme de la question 2c peut être utilisé ou modifié par des hommes qui ne savent compter que jusqu'à 10 et ne savent pas faire de divisions ? Plus précisément, pour dénombrer un tas de cailloux, on montrera de façon constructive que l'on peut obtenir $n+1$ tas de cailloux à partir de $d$ cailloux, chacun des tas étant de cardinal $a_i$ et donc représentant l'écriture de $d$ sous la forme (1) ou (2).

(b) Quelle serait la complexité de cet algorithme ?

**Exercice 5.**
Un "mathémagicien" [1] vous demande de vous concentrer sur votre date de naissance (ou tout nombre entier compris entre 1 et 31). Il vous présente ensuite successivement les cinq feuilles montrées en figure 1 page suivante. Pour chaque feuille présentée, il vous demande si votre nombre appartient à la feuille et vous répondez par "oui" ou par "non" et à la fin, il vous annonce votre date d'anniversaire ! Ce tour de magie fait partie de l'atelier "magie" présenté à la Maison des Mathématiques de l'Informatique à Lyon (MMI) et préparé par Jean-Baptiste Aubin, Charlotte Avellaneda, Camille Beaudou, Yves Doumergue, Olivier Druet. Voir `https://mmi-lyon.fr/`.
Le but de cet exercice est de comprendre le tour et la façon dont on été déterminées, par un algorithme, les cinq feuilles de la figure 1 page suivante.

(1) (a) En rajoutant le zéro, il y a 32 nombres parmi lequel le mathémagicien trouve l'unique nombre. Expliquez pourquoi 5 questions suffisent à déterminer totalement le nombre choisi.

(b) Que remarquez-vous sur les feuilles des figures 1(c) et 1(d) ?

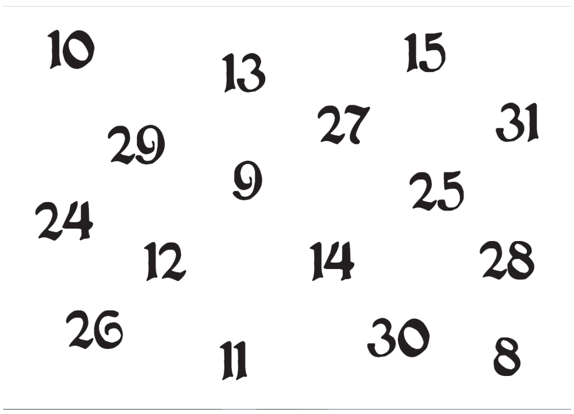
(c) Sur quelles feuilles apparaissent le nombre 1 ? le nombre 2 ? le nombre 4 ? le nombre 8 ? le nombre 16 ?

(2) — La feuille de la figure 1(d) est désormais appelée la feuille "1" et de même
— celle de la figure 1(b) est appelée la feuille "2",
— celle de la figure 1(e) est appelée la feuille "4",
— celle de la figure 1(a) est appelée la feuille "8",
— celle de la figure 1(c) est appelée la feuille "16".

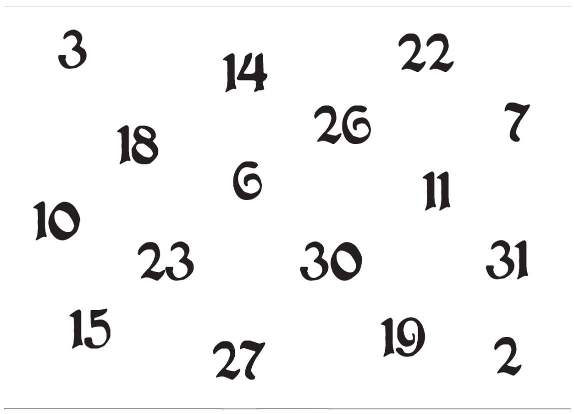
Il s'agit de préparer les feuilles de telles façon qu'elles présentent chacune la moitié des nombres de 0 à 31, ces moitiés étant déterminées de façon indépendante les unes des autres. On s'appuie pour cela sur la décomposition d'un nombre $d \in \{0, ..., 31\}$ en base 2. On pourra consulter l'exercice 4 page ci-contre.

(a) Rappeler la décomposition du nombre $d$ en base 2.

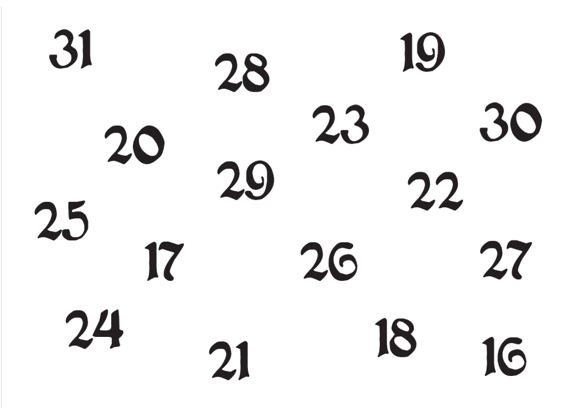
1. Votre obligé.



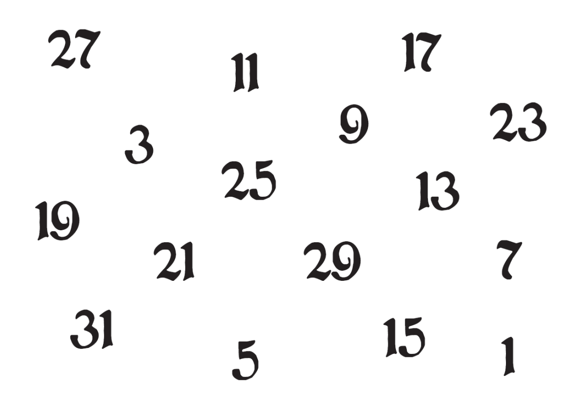

(a)



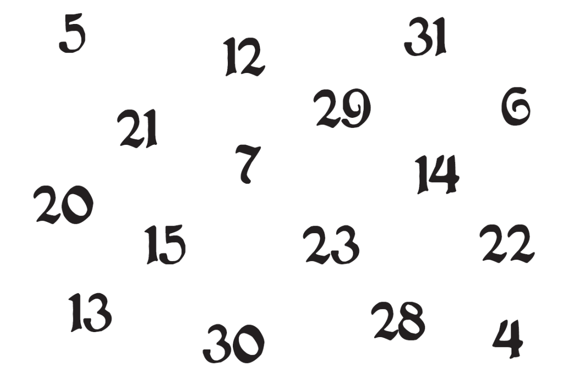

(b)




(c)




(d)




(e)

Figure 1. Les cinq feuilles présentées. Feuilles préparées dans le cadre de l'atelier "magie" de la Maison des Mathématiques de l'Informatique à Lyon (MMI) (Jean-Baptiste Aubin, Charlotte Avellaneda, Camille Beaudou, Yves Doumergue, Olivier Druet). Voir `https://mmi-lyon.fr/`.

(b) *L'objectif de cette question 2b est de proposer une méthode pour retrouver les nombres de chacune des feuilles et de comprendre le principe du tour. Vous n'êtes pas obligé de suivre l'ordre des questions ou ces questions si vous proposez une méthode par vous-même !*

Les nombres de la feuille "1" sont tous les nombres entiers compris entre 0 et 31 dont le chiffre des unités vaut 1 dans sa décomposition en base 2. Les nombres de la feuille "2" sont tous les nombres entiers compris entre 0 et 31 dont le chiffre des "deuzaines" (terme en 2) vaut 1 dans sa décomposition en base 2.

(i) Citer les propriétés similaires pour le remplissage des feuilles "4", "8" et "16".

(ii)(A) On considère le nombre défini par l'équation (4b). À quelle(s) feuille(s) appartient ce nombre ?

(B) À quelle(s) feuille(s) appartient le nombre 0, le nombre 31 ?

(C) Comment feriez-vous pour remplir toutes les feuilles en partant de tous les nombres de 0 à 31 ?

(iii) Au vu des questions précédentes, que doit faire le mathémagicien pour exécuter le tour ? On remarquera que chacune des feuilles "$i$" contient le nombre $i$ en bas à droite.

(iv) On essaye maintenant de déterminer directement tous les nombres de chacune des feuilles, chacune d'elles étant traitée indépendamment des autres.

(A) Faites le calcul complet pour les feuilles "1" et "8".

(B) Donner succinctement le principe pour les autres feuilles.

(C) Comparer les méthodes vues dans les questions 2(b)iiC et 2(b)ivB.

(c) On reprend maintenant la question 2b mais dans le cas général où l'on prépare le tour pour deviner tous les nombres compris entre 0 et $2^p - 1$ avec $p \in \mathbb{N}$.

(i) Traiter complétement le cas $p = 0$.

(ii) À quelle valeur de $p$ correspond le cas de la question 2b ?

(iii) Dans cette question, on suppose désormais $p$ quelconque dans $\mathbb{N}$.

(A) Déterminer toutes les valeurs de la feuille "1" et celle associée au plus grand numéro.

(B) Comment feriez-vous pour déterminer toutes les feuilles pour $p$ quelconque, en utilisant l'une des méthodes des questions 2(b)iiC ou 2(b)ivB.

(C) Quel est la complexité du remplissage de la totalité des feuilles ?

## Corrigé

Un corrigé sera disponible sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`