Informatique 3A MFIappro — Automne 2024

Corrigé du contrôle continu du 27 janvier 2025

Correction de l'exercice 1.
On pourra consulter `https://fr.wikipedia.org/wiki/Principe_des_tiroirs` dont est issue cette correction.

(1) En mathématiques, le principe des tiroirs (de Dirichlet), affirme que, si n chaussettes sont rangées dans m tiroirs, et que $m < n$, alors il y a un tiroir qui contient au moins deux chaussettes.

(2) Mathématiquement, le principe peut s'énoncer ainsi :

Si E et F sont deux ensembles finis tels que $\text{card}(E) > \text{card}(F)$, alors il n'existe pas d'application injective de E dans F.

En effet, si, par rapport à la question 1, on appelle E l'ensemble des chaussettes, numérotées de 1 à n et F l'ensemble des tiroirs, numérotés de 1 à p. On dispose d'une application f qui va de E dans F qui, à chaque chaussette associe son (unique) numéro de tiroir. On a bien $\text{card}(E) = n > \text{card}(F) = m$, ce qui signifie que l'assertion "$\text{card}(E) \leq \text{card}(F)$" est fausse. En vertu de la proposition 9.16 page 65 du cours, il n'existe pas d'injection de E dans F. Pour en revenir à nos chaussettes, f n'est pas injective, ce qui signifie qu'un tiroir est associé à 2 chaussettes différentes et donc qu'il existe un tiroir qui contient au moins deux chaussettes. En termes plus simples et naturels, s'il y a moins de tiroirs de chaussettes, il y a nécessairement deux chaussettes dans un seul tiroir.

(3) (a) Par exemple, si on choisit 5 cartes d'un jeu à quatre couleurs (pique, cœur, carreau, trèfle), il existe deux cartes qui ont même la couleur. On remplace les tiroirs par les couleurs (de cardinal 4) et les chaussettes par les cartes (de cardinal 5).

(b) Autre exemple issu du contexte de chaussettes et de tiroirs :

"C'est la nuit et vous devez choisir au hasard des chaussettes dans lequel sont mélangés des chaussettes rouges et de chaussettes verte. Combien de chaussettes faut-il prendre pour être sûr d'avoir deux chaussettes de la même couleur ?"

Il suffit de choisir une chaussette de plus que le nombre de couleurs, soit trois chaussettes.

Correction de l'exercice 2.

(1) Donnons un petit texte qui sera intégré dans le polycopié de cours.

On se pose l'habituel problème : "n personnes trinquent ensemble, chacune d'elles trinquant une fois seulement avec chacune des autres. Combien de "tchin" entend-on en tout ?". Notons N le nombre de "tchin".

On peut raisonner de la façon suivante :

(a) On affirme que chaque personne fait un " tchin " avec chacune des $n-1$ autres. On numérote par exemple les personnes 1, 2, 3, ..., n. Dans ce raisonnement,

- La personne n° 1 fait $n-1$ "tchin" avec les personnes n° 2, n° 3, ..., n° n ;
- La personne n° 2 fait $n-2$ "tchin" avec les personnes n° 3, n° 4, ..., n° n et 1 "tchin" avec la personne n° 1 déjà été pris en compte ;

— La personne n° 3 fait $n-3$ "tchin" avec les personnes n° 4, n° 5, ..., n° n et 2 "tchin" avec les personnes n° 1 et n° 2 déjà été pris en compte ;
— $\vdots$ $\vdots$
— La personne n° $n-2$ fait 2 "tchin" avec les personnes n° $n-1$ et n° n et $n-3$ "tchin" avec les personnes n° 1 à n° $n-3$ déjà été pris en compte ;
— La personne n° $n-1$ fait 1 "tchin" avec la personne n° n et $n-2$ "tchin" avec les personnes n° 1 à n° $n-2$ déjà été pris en compte.
— La personne n° n fait 0 "tchin" et $n-1$ "tchin" avec les personnes n° 1 à n° $n-1$ déjà été pris en compte.

Autrement dit, on pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, la personne n° i fait

- $n-i$ "tchin" avec les personnes n° $i+1$ à n ;
- et $i-1$ "tchin" avec les personnes n° 1 à $i-1$, déjà pris en compte ;

et donc en tout $n-1$ "tchin". Le nombre de "tchin" est bien le double du nombre de "tchin" réellement entendu. Puisque dans ce raisonnement, on compte $n \times (n-1)$ (puisque $n-1$ "tchin" pour chacune des n personnes), on a donc

$$2N = n(n-1),$$

et donc

$$N = \frac{n(n-1)}{2}. \tag{1}$$

(b) On raisonne maintenant autrement.
— La personne n° 1 fait $n-1$ "tchin" avec les personnes n° 2, n° 3, ..., n° n ;
— La personne n° 2 fait $n-2$ "tchin" avec les personnes n° 3, n° 4, ..., n° n, puisque le "tchin" avec la personne n° 1 a déjà été pris en compte ;
— La personne n° 3 fait $n-3$ "tchin" avec les personnes n° 4, n° 5, ..., n° n, puisque les autres "tchin" avec les personnes n° 1 et n° 2 ont déjà été pris en compte ;
— $\vdots$ $\vdots$
— La personne n° $n-2$ fait 2 "tchin" avec les personnes n° $n-1$ et n° n, puisque les autres "tchin" avec les personne n° 1 à n° $n-3$ ont déjà été pris en compte ;
— La personne n° $n-1$ fait 1 "tchin" avec la personne n° n, puisque les autres "tchin" avec les personne n° 1 à n° $n-1$ ont déjà été pris en compte ;
— La personne n° n fait 0 "tchin", puisque les autres "tchin" avec les personnes n° 1 à n° $n-1$ déjà été pris en compte.

Autrement dit, on pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, la personne n° i fait $n-i$ "tchin" avec les personnes n° $i+1$ à n. On déduit donc que le nombre de "tchin" vaut

$$N = (n-1) + (n-2) + ... + 2 + 1 = S_n$$

et donc

$$N = 1 + 2 + 3 + ... + (n-1) = S_{n-1}. \tag{2}$$

(c) De (1) et (2), on déduit

$$S_{n-1} = \frac{n(n-1)}{2},$$

et on retrouve bien, en remplaçant $n-1$ par n :

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2},$$

(d) Montrons maintenant que le calcul du nombre de tchin correspond à un problème de dénombrement de parties à 2 éléments.

(i) Pour établir la formule (1), on a considéré l'ensemble $\{1, 2, ..., n\}$ et on en a dénombré les couples (i, j) où $i \neq j$, puisque chaque "tching" ainsi dénombré est associé à un couple. On a donc montré que le nombre P de couples valait

$$P = n(n-1) \tag{3}$$

(ii) Pour établir la formule (2), on a dénombré les ensembles (à deux éléments) $\{i, j\}$ où $i \neq j$. On a donc montré que le nombre Q de ces ensembles valait

$$Q = 1 + 2 + 3 + ... + (n-1) = S_{n-1}. \tag{4}$$

(iii) Chaque ensemble à deux éléments $\{i, j\}$ où $i \neq j$ est associé à deux couples (i, j) et (j, i). On a donc

$$P = 2Q, \tag{5}$$

on déduit donc

$$Q = \frac{P}{2}$$

et de (3) et (4), on déduit enfin

$$Q = S_{n-1} = 1 + 2 + 3 + ... + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}. \tag{6}$$

Remarque 1. On retrouve le fait que le nombre d'ensemble à deux éléments vaut

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}, \tag{7}$$

en passant par le nombre de 2 arrangements dans un ensemble à n éléments qui vaut $n(n-1)$.

(2) Rappelons le calcul fait dans le point 5b(ii) page 79 du cours.

On calcule de deux façons différentes la somme

$$\mathcal{S}_{n,2} = \sum_{k=1}^{n} (k+1)^2 - k^2$$

(a) Par somme télescopique, on a, d'une part

$$\mathcal{S}_{n,2} = (n+1)^2 - 1. \tag{8}$$

(b) D'autre part, si on développe le terme $(k+1)^2$, il vient

$$\mathcal{S}_{n,2} = \sum_{k=1}^{n} k^2 + 2k + 1 - k^2,$$

et donc

$$\mathcal{S}_{n,2} = \sum_{k=1}^{n} (2k+1). \tag{9}$$

En comparant (8) et (9), il vient

$$\sum_{k=1}^{n} (2k+1) = (n+1)^2 - 1,$$

et donc

$$2\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} 1\right) = (n+1)^2 - 1,$$

et donc

$$2S_n + n = (n+1)^2 - 1,$$

ce qui est finalement équivalent à

$$
\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{2}\left((n+1)^2 - 1 - n\right), \\
&= \frac{n+1}{2}\left(n+1-1\right), \\
&= \frac{n+1}{2}\left(n\right).
\end{aligned}
$$

Correction de l'exercice 3.
Exercice 1936 issu de `http://exo7.emath.fr/`, par Gineste et Lévi Operman 01/11/2001
On sait que : $\ln(e^n - 1) \leq \ln e^n = n$. De plus, $\ln n \geq 1$ pour n assez grand, par conséquent $\frac{\ln n}{\ln(e^n-1)} \geq \frac{1}{n}$. On conclut par comparaison que la série $\sum \frac{\ln n}{\ln(e^n-1)}$ est divergente.

Correction de l'exercice 4.

(1) (a) Par convention, on peut poser, si $d = 0$, $n = -1$ et donc l'ensemble des chiffres est vide et la somme de l'équation (2) de l'énoncé est nulle.

(b) Supposons donc $d \neq 0$. On rappelle que, par convention, on a

$$\forall i \in \{1, ..., n\}, \quad 0 \leq a_i \leq \beta - 1. \tag{10}$$

Ainsi, en utilisant à la fois l'hypothèse (3) de l'énoncé, (10) et l'équation (2) de l'énoncé, on a

$$
\begin{aligned}
d &= \sum_{i=0}^{n} a_i \beta^i \geq a_n \beta^n \geq 1 \times \beta^n = \beta^n, \\
d &\leq \sum_{i=0}^{n} (\beta - 1)\beta^i = (\beta - 1)\sum_{i=0}^{n} \beta^i = \beta^{n+1} - 1 < \beta^{n+1}
\end{aligned}
$$

et donc

$$\beta^n \leq d < \beta^{n+1}$$

ce qui est équivalent à

$$\ln(\beta^n) \leq \ln d < \ln(\beta^{n+1}),$$

soit encore (puisque $\beta > 1$)

$$n \leq \frac{\ln d}{\ln \beta} < n + 1,$$

ce qui est équivalent à

$$n = E\left(\frac{\ln d}{\ln \beta}\right), \tag{11}$$

où E désigne la partie entière.

(2) (a) On suppose dans cette question que $d \neq 0$. Remarquons tout d'abord que

$$
\begin{aligned}
d &= \sum_{i=0}^{n} a_i \beta^i, \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i \beta^i + a_0, \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \beta^{i-1}\right)\beta + a_0,
\end{aligned}
$$

et en posant $i' = i - 1$ dans la première somme

$$= \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1}\beta^i\right)\beta + a_0,$$

soit encore

$$d = \beta\widetilde{d} + a_0$$

soit

$$d = \beta Q + R, \tag{12a}$$

avec

$$Q = \widetilde{d} = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1}\beta^i, \tag{12b}$$

$$R = a_0 \in \{, ..., \beta - 1\}. \tag{12c}$$

Il suffit donc comme le montrent (12a) et (12c) d'effectuer la division euclidienne de d par β. Le reste R fournit a_0. Il ne reste plus qu'à réapliquer ce calcul à $\widetilde{d}$ (s'il est non nul ; s'il est nul, on a nécessairement $n = 0$ et on s'arrête là) donné par (12b) qui permet de déterminer a_1, puis a_2, ..., jusqu'à a_n.

Algorithme 1 Algorithme de changement de base (de la base 10 vers la base β) *dec2base*$(d, \beta \longrightarrow a)$

Entrée :

d : entier naturel ;

β : entier naturel supérieur ou égal à 2 ;

Sortie :

$a = (a_0, ..., a_n)$: $n + 1$ entiers appartenant $\{0, ..., \beta - 1\}$ avec $a_n \geq 1$ si $d \neq 0$ et vérifiant

$$d = \sum_{i=0}^{n} a_i\beta^i. \tag{13}$$

si $d = 0$ **alors**
  $a \longleftarrow \emptyset$
sinon
  $n \longleftarrow E\left(\frac{\ln d}{\ln \beta}\right)$
  $\widetilde{d} \longleftarrow d$
  pour $i = 0$ à n **faire**
    Déterminer l'unique couple $(Q, R) \in \mathbb{N} \times \{0, ..., \beta - 1\}$ tel que $\widetilde{d} = \beta Q + R$
    $a_i \longleftarrow R$
    $\widetilde{d} \longleftarrow Q.$
  fin pour
fin si

L'algorithme précis est donc écrit dans l'algorithme 1. On pourra aussi consulter la fonction de matlab `dec2base.m` ou celle programmée disponible à l'adrese web habituelle `dec2basebis.m`.

(b) On détermine tout d'abord n à partir de (11), puis à chaque itération de la boucle on fait une division euclidienne. On a donc une complexité en $\mathcal{O}(n)$, c'est-à-dire en $\mathcal{O}\left(E\left(\frac{\ln d}{\ln \beta}\right)\right)$. On prendra garde à bien prendre en compte β qui ici peut changer du tout au tout !

(c) On peut ne pas déterminer la valeur de n déterminée à la question 1 (néanmoins, il peut servir dans des langages comme matlab où il est utile de connaître la taille d'un vecteur avant de le déclarer). En effet, il suffit de reprendre l'algorithme 1 page précédente et de le modifier de façon à ne faire tourner la boucle que tant que le reste (voir (12)) est non nul. L'algorithme précis est alors écrit dans l'algorithme 2. On prendra soin d'incrémenter la valeur de n à chaque exécution de la boucle.

Algorithme 2 Algorithme de changement de base (de la base 10 vers la base β) *dec2basevar*$(d, \beta \longrightarrow a)$

Entrée :

d : entier naturel ;

β : entier naturel supérieur ou égal à 2 ;

Sortie :

$a = (a_0, ..., a_n)$: $n+1$ entiers appartenant $\{0, ..., \beta - 1\}$ avec $a_n \geq 1$ si $d \neq 0$ et vérifiant

$$d = \sum_{i=0}^{n} a_i \beta^i. \tag{14}$$

si $d = 0$ **alors**
  $a \longleftarrow \emptyset$
sinon
  $\widetilde{d} \longleftarrow d$
  $n \longleftarrow 0$
  tant que $\widetilde{d} > 0$ **faire**
    Déterminer l'unique couple $(Q, R) \in \mathbb{N} \times \{0, ..., \beta - 1\}$ tel que $\widetilde{d} = \beta Q + R$
    $a_n \longleftarrow R$
    $\widetilde{d} \longleftarrow Q.$
    $n \longleftarrow n + 1.$
  fin tant que
fin si

(3) Si on utilise la version de la question 2c et donc l'algorithme 2, on a successivement pour d et β donnés par l'équation (2c) de l'énoncé, on obtient successivement

$$\begin{aligned}
25 &= 1 + 2 \times 12, \text{ et donc } n = 0 \text{ et } a_0 = 1\,;\\
12 &= 0 + 2 \times 6, \text{ et donc } n = 1 \text{ et } a_1 = 0\,;\\
6 &= 0 + 2 \times 3, \text{ et donc } n = 2 \text{ et } a_2 = 0\,;\\
3 &= 1 + 2 \times 1, \text{ et donc } n = 3 \text{ et } a_3 = 1\,;\\
1 &= 1 + 2 \times 0, \text{ et donc } n = 4 \text{ et } a_4 = 1.
\end{aligned}$$

On a donc, en base 2 :

$$25 = 11001. \tag{15}$$

(4) (a) On peut utiliser l'algorithme de la question 2c en le modifiant de façon à n'utiliser qu'une énumération jusqu'à 10 (ou jusqu'à β dans le cas général) et sans faire de divisions.

Proposon deux méthodes :

(i)(A) Pour cela on écrit d'abord un algorithme (non écrit précisement ici) qui permet d'ajouter 1 à un nombre écrit sous la forme (13). Il suffit de procéder ainsi (comme dans un compteur mécanique de distance de vélo ou de voiture) : on ajoute 1 au chiffre des unité. Si celui-ci est inférieur ou égal à 9, on s'arrête là. Sinon, on met à zéro le chiffre des unité et on ajoute 1 (une dizaine) au chiffre des dizaines et ainsi de suite. Cette opération peut s'utiliser pour $n+1$ tas de cailloux dont le cardinal de chacun d'eux représente un chiffre. On ajoute 1 caillou au premier tas. S'il de cardinal inférieur ou égal à 9, on s'arrête là. Sinon, on enlève tous les cailloux de ce tas (en en repérant l'emplacement) et on rajoute un caillou au second cas et ainsi de suite.

(B) Enfin, on considère le premier tas de cailloux, auquel on enlève progressivement les cailloux un par un. À coté, on dispose un second tas de cailloux, initialement vide, qui comportera $n+1$ tas de cailloux, chacun d'eux représentant le chiffre a_i. Les cailloux sont alors progressivement ajoutés, un par un, à ce second tas les différents cailloux en utilisant l'algorithme décrit au point 4(a)iA, jusqu'à épuisement du premier tas.

(ii) On utilise l'algorithme 2 sans effectuer de divisions !

Pour cela, on fait des tas de 10 cailloux à partir du tas initial, tant que c'est possible. Quand cela n'est plus possible (c'est-à-dire qu'il reste au plus 9 cailloux) on compte le nombre de cailloux qui restent, qui vaut $a_0 \in \{0, ..., 9\}$.

Ensuite, s'il reste encore des cailloux, on remplace chaque tas de 10 cailloux par un caillou (en travaillant en fait sur les dizaines) et on recommence comme précédemment : on obtient alors a_1 et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il ne reste plus de cailloux.

(b) La complexité de tels algorithme peut être quantifiée en disant que chaque manipulation élémentaire compte comme 1.

La complexité l'algorithmes présenté au point 4(a)i serait en $\mathcal{O}(d)$ beaucoup plus grand que celle de l'algorithme 2. Celle du point 4(a)ii est encore en $\mathcal{O}(d)$. En effet, la première étape est de complexité d, puis la seconde en $d/10$ puis $d/10^2$ et ainsi de suite jusqu'à asymptotiquement $d/10^n$ soit

$$\begin{aligned}
d\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+...+\frac{1}{10^n}\right) &= d\frac{1-\frac{1}{10^{n+1}}}{1-\frac{1}{10}},\\
&= \frac{10}{9}\left(1-\frac{1}{10^{n+1}}\right)d,\\
&= \mathcal{O}(d)
\end{aligned}$$

Reste à savoir si les hommes préhistoriques raisonnaient ainsi, en base 10 en utilisant leur dix doigts, voire en base[1] 20, en utilisant aussi les orteilles !

Correction de l'exercice 5.

Ce tour de magie fait partie de l'atelier "magie" présenté à la Maison des Mathématiques de l'Informatique à Lyon (MMI) et préparé par Jean-Baptiste Aubin, Charlotte Avellaneda, Camille Beaudou, Yves Doumergue, Olivier Druet. Voir `https://mmi-lyon.fr/`.

(1) (a) Chacune des feuilles de la figure 1 contient 16 nombres, tous compris entre 0 (1 en fait car le zéro n'apparait nul part) et 31. La première question permet donc d'éliminer la moitié des nombres choisis parmis les valeurs 0 à 31 et il ne reste donc plus que 16 nombres. La seconde question, si elle est bien choisie, permet d'en éliminer la moitié donc il ne reste plus que 8 nombres et ainsi de suite jusqu'à la cinquième question à la suite de la laquelle il ne demeure plus qu'un nombre que

1. ce qui a développé un système de numérotation dit vigésimal, utilisé par les populations celtes, dont notre "quatre-vingt" est un vestige ! Voir par exemple `https://fr.wikipedia.org/wiki/Système_vicésimal`

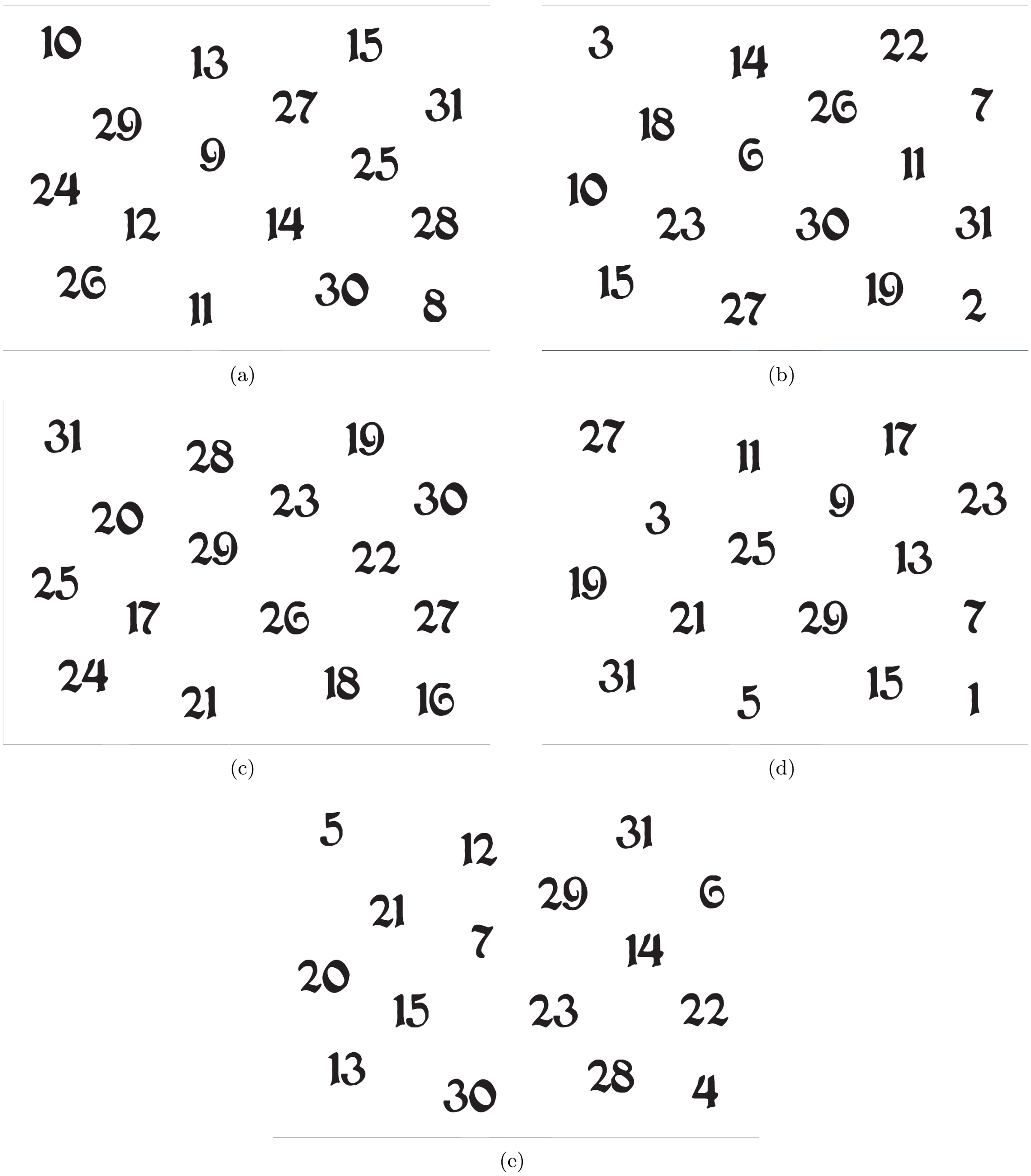

FIGURE 1. Les cinq feuilles présentées. Feuilles préparées dans le cadre de l'atelier "magie" de la Maison des Mathématiques de l'Informatique à Lyon (MMI) (Jean-Baptiste Aubin, Charlotte Avellaneda, Camille Beaudou, Yves Doumergue, Olivier Druet). Voir `https://mmi-lyon.fr/`.

le mathémagicien peut donc en théorie connaître. Il reste donc à définir les questions pour qu'elles soient toutes indépendantes les unes des autres.

Remarque 2. Ce principe de division successive en deux est appelé dichotomie (serait désignée ici plutôt sous la forme dichotomie discrète) et est aussi utilisée en analyse numérique (sous une forme continue) pour définir le zéro d'une fonction en découpant l'intervalle où elle appartient successivement en deux, jusqu'à obtenir un intervalle de taille aussi petite que nécessaire. Voir par exemple [DB22, section 4.3] disponible sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MNBmater/coursMNBmater.pdf`.

(b) La feuillle de la figure 1(c) contient les 16 nombres, compris entre 0 et 31, supérieurs ou égaux à 16 et la feuillle de la figure 1(d) contient les 16 nombres, compris entre 0 et 31, impairs.

(c) — Le nombre 1 n'apparait que sur la feuille de la figure 1(d).
— Le nombre 2 n'apparait que sur la feuille de la figure 1(b).
— Le nombre 4 n'apparait que sur la feuille de la figure 1(e).
— Le nombre 8 n'apparait que sur la feuille de la figure 1(a).
— Le nombre 16 n'apparait que sur la feuille de la figure 1(c).

(2) (a) Compris entre 0 et $31 = 2^5 - 1$, le nombre d s'écrit en base 2 (ou binaire) sous la forme

$$d = \sum_{i=0}^{4} a_i 2^i, \tag{16a}$$

avec

$$\forall i \in \{0, ..., 4\}, \quad a_i \in \{0, 1\}. \tag{16b}$$

a_i représente $i + 1$-ième chiffre en base 2. Cela revient aussi à écrire l'équation (1) de l'énoncé. Attention, ici, contrairement à l'usage habituel (utilisé par exemple dans l'exercice 4 page 4) le premier chiffre (dans l'ordre de lecture) n'est pas nécessairement nul. Cela revient à coder le nombre d avec des 0 et des 1 avec 5 digits.

(b) (i) Les nombres compris entre 0 et 31, supérieurs ou égaux à 16, sont de la forme

$$d = 16 + r,$$

où $r \in \{0, ..., 15\}$. Si on décompose r de nouveau en base 2, on a (avec $\forall i \in \{0, ..., 3\}, \quad a_i \in \{0, 1\}$)

$$\begin{aligned} d &= 16 + r, \\ &= 16 + \sum_{i=0}^{3} a_i 2^i, \\ &= 2^4 + \sum_{i=0}^{3} a_i 2^i, \\ &= \sum_{i=0}^{4} a_i 2^i, \end{aligned}$$

avec $a_4 = 1$. Ainsi, d'après ce que l'on a observé en question 1b, la feuillle de la figure 1(c), c'est-à-dire, la "16" contient les nombres dont le premier chiffre (a_4 dans (16)) vaut 1.

De même, les nombres, compris entre 0 et 31, impairs sont de la forme

$$d = 2r + 1,$$

où $r \in \{0, ..., 15\}$. Si on décompose r de nouveau en base 2, on a (avec $\forall i \in \{0, ..., 3\}, \quad a_i \in \{0, 1\}$)

$$\begin{aligned} d &= 2r + 1, \\ &= 2\sum_{i=0}^{3} a_i 2^i + 1, \\ &= \sum_{i=0}^{3} a_i 2^{i+1} + 1 \times 2^0, \\ &= \sum_{i=-1}^{3} a_i 2^{i+1}, \end{aligned}$$

et en posant $b_i = a_{i+1}$ pour $i \in \{0, ..., 3\}$ et $b_0 = 1$

$$= \sum_{i=0}^{4} b_i 2^i,$$

avec $b_0 = 1$ Ainsi, d'après ce que l'on a observé en question 1b, la feuille de la figure 1(d), c'est-à-dire, la "1" contient les nombres dont le dernier chiffre (a_0 dans (16)) vaut 1. Ainsi, en généralisant ce qui est écrit au début de la question 2b de l'énoncé, on peut affirmer que

$$\text{Pour tout } i \in \{0, ..., 4\}, \text{ la feuille "} 2^i \text{" contient tous les nombres entiers compris entre 0 et 31} \\ \text{dont le } 5 - i\text{-ième chiffre dans sa décomposition en base 2 } (a_i \text{ dans (16)) vaut 1}, \tag{17}$$

autrement dit :
- Les nombres de la feuille "1" sont tous les nombres entiers compris entre 0 et 31 dont le chiffre des unités vaut 1 dans sa décomposition en base 2 ;
- les nombres de la feuille "2" sont tous les nombres entiers compris entre 0 et 31 dont le chiffre des "deuzaines" [2] (terme en 2) vaut 1 dans sa décomposition en base 2 ;
- les nombres de la feuille "4" sont tous les nombres entiers compris entre 0 et 31 dont le chiffre des "quatraines"" (terme en 4) vaut 1 dans sa décomposition en base 2 ;
- les nombres de la feuille "8" sont tous les nombres entiers compris entre 0 et 31 dont le chiffre des "huitaines" (terme en 8) vaut 1 dans sa décomposition en base 2 ;
- les nombres de la feuille "16" sont tous les nombres entiers compris entre 0 et 31 dont le chiffre des "seizaines" (terme en 16) vaut 1 dans sa décomposition en base 2.

(ii)(A) Il suffit donc de décomposer tout nombre compris entre 0 et 31 avec son écriture (16) pour trouver les numéros des feuilles auquel il appartient. Plus précisément, si d vérifie (16) il est sur toutes les feuilles "2^i" correspondant à $a_i \neq 0$.

Remarque 3. Pour cela on peut faire des divisions euclidiennes successives par 2 (comme présenté par exemple dans l'exercice 4 page 4) ou alors de regarder successivement si 16 "rentre" dans le nombre, puis "8" dans le reste et ainsi de suite.

Ainsi, d'après l'équation (15) le nombre défini par l'équation (4b) de l'énoncé appartient aux feuilles "1", "8" et "16".

(B) Il est clair que tous les chiffres de 0 dans son écriture (16) sont nuls et 0 n'a donc aucun 1 et il n'appartient à aucune feuille. Ce nombre n'est pas utilisé dans le tour puisque ce n'est pas une date !

2. Voir par exemple `https://fr.wiktionary.org/wiki/deuzaine`.

On a aussi

$$31 = 16 + 8 + 4 + 2 + 1, \tag{18}$$

et donc tous les chiffres de 31 dans son écriture (16) sont égaux à 1 et il appartient à toutes les feuilles.

(C) D'après ce qui précède, il suffit d'écrire tous les nombres de 0 à 31 en base 2 et pour chacun d'eux, les chiffres égaux à 1 indiquent les feuilles auquelles appartient ce nombre. Pour éviter la conversion en base 2 des nombre de 0 à 31, il suffit, plus simplement, de compter de 0 à 31 en binaire avec 5 digits , soit 00000, 00001, 00010, ..., 11110, 11111. Pour tout $i \in \{0, ..., 4\}$, la feuille "2^i" contiendra donc tous les entiers correspondant aux nombres en binaire qui a un 1 sur le $5 - i$-ième chiffre, ou un 1 dans la $i + 1$-ième colonne du tableau 1 page suivante.

Voir les tableaux 1 page suivante et 2 page 13 qui présentent respectivement les nombres en binaires de 0 à 31 puis colonne par colonne, les nombres qui doivent appartenir aux cartes "16", "8", "4", "2" et "1".

(iii) Il suffit de remarquer que d'après (16), tout nombre $d \in \{0, ..., 31\}$ s'écrit

$$d = \sum_{\substack{i=0, \\ a_i \neq 0}}^{4} 2^i, \tag{19}$$

et donc qu'il suffit, pour le mathémagicien, de sommer les numéros de feuilles "i", pour lesquelles la réponse est "oui". Ces nombres sont, de plus, affichés en bas de droite de chacune des feuilles. L'ordre des feuilles est quelconque.

Comme l'a très bien écrit l'un d'entre vous, on résumera en écrivant : le mathémagicien doit additionner les valeurs en bas à droite de chaque feuille choisie par la personne afin d'en déduire sa date de naissance.

Par exemple, compte tenu de l'équation (15) équivalente à

$$25 = 16 + 8 + 1, \tag{20}$$

pour le nombre défini par l'équation (4b) de l'énoncé, les réponses seront "oui" pour les feuilles "16", "8" et "1" et il suffira d'effectuer la somme (20).

(iv)(A) D'après ce que l'on a vu en question 2(b)i page 9, et en particulier (17), on a besoin, pour tout $i \in \{0, ..., 4\}$, de déterminer tous les nombres p dont l'écriture en base 2 est tel que $a_i = 1$, c'est-à-dire, qui s'écrive

$$p = \overline{a_4 a_3 a_2 a_1 a_0}, \tag{21}$$

avec $\forall j \in \{0, ..., 4\} \setminus \{i\}, \quad a_i \in \{0, 1\}$ et $a_i = 0$. Pour cela il suffit de définir tous les entiers $a_j \in \{0, 1\}$ pour $j \neq i$. L'ensemble de ces nombres est de cardinal $2^4 = 16$. On peut donc, compter de 0 à $2^4 - 1$ en binaire, de mettre tous ces nombres dans un tableau et de venir intercaller entre la $4 - j$-ième et la $5 - j$-ième colonne, une colonne de 1. On convertit ensuite tous ces nombres en base 10 et cela nous fournit les nombres appartenant à la feuille "2^j", que l'on peut ensuite disposer dans l'ordre croissant.

Voir les tableaux 3 page 13 et 4 page 14.

(B) Le principe a été donné en question 2(b)ivA.

Voir les tableaux 5 page 14, 6 page 15 et 7 page 15.

(C) La méthode vues dans la question 2(b)iiC est un peu plus rapide, puisqu'elle n'utilise pas la conversion en base 10. Celle de la question 2(b)ivB exige la conversion en base 10 et le tri des numéros obtenus.

0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1
2	0	0	0	1	0
3	0	0	0	1	1
4	0	0	1	0	0
5	0	0	1	0	1
6	0	0	1	1	0
7	0	0	1	1	1
8	0	1	0	0	0
9	0	1	0	0	1
10	0	1	0	1	0
11	0	1	0	1	1
12	0	1	1	0	0
13	0	1	1	0	1
14	0	1	1	1	0
15	0	1	1	1	1
16	1	0	0	0	0
17	1	0	0	0	1
18	1	0	0	1	0
19	1	0	0	1	1
20	1	0	1	0	0
21	1	0	1	0	1
22	1	0	1	1	0
23	1	0	1	1	1
24	1	1	0	0	0
25	1	1	0	0	1
26	1	1	0	1	0
27	1	1	0	1	1
28	1	1	1	0	0
29	1	1	1	0	1
30	1	1	1	1	0
31	1	1	1	1	1

TABLE 1. Écriture en binaire des nombres de 0 à 31

(c) (i) Ce cas-là n'est guère intéressant : il s'agit de devenir un nombre compris entre 0 et 0, et donc égal à 0, en ne montrant aucune feuille !

(ii) Le cas de la question 2b correspond à $p = 5$.

(iii) on suppose désormais p quelconque dans $\mathbb{N}$. Il nous faut deviner un nombre compris entre 0 et $2^p - 1$ en posant p questions ce qui suffit à déterminer chacun de ces p chiffres en base 2.

(A) En généralisant ce que l'on observé dans la question 2(b)i page 9, les nombres de la feuille "1" correspondent aux nombres impairs entre 0 (ou 1) et $2^p - 1$, c'est-à-dire de la forme $2r + 1$ où $r \in \{0, ..., 2^{p-1} - 1\}$. De même les nombres de la feuille "2^{p-1}" correspondent aux nombres supérieurs ou égaux à 2^{p-1}, c'est-à-dire dans $\{2^{p-1}, ..., 2^p - 1\}$.

feuille "16"	feuille "8"	feuille "4"	feuille "2"	feuille "1"
16	8	4	2	1
17	9	5	3	3
18	10	6	6	5
19	11	7	7	7
20	12	12	10	9
21	13	13	11	11
22	14	14	14	13
23	15	15	15	15
24	24	20	18	17
25	25	21	19	19
26	26	22	22	21
27	27	23	23	23
28	28	28	26	25
29	29	29	27	27
30	30	30	30	29
31	31	31	31	31

Table 2. Contenu des différentes feuille de "1" à "16"

0	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	17
0	1	0	0	1	9
1	1	0	0	1	25
0	0	1	0	1	5
1	0	1	0	1	21
0	1	1	0	1	13
1	1	1	0	1	29
0	0	0	1	1	3
1	0	0	1	1	19
0	1	0	1	1	11
1	1	0	1	1	27
0	0	1	1	1	7
1	0	1	1	1	23
0	1	1	1	1	15
1	1	1	1	1	31

Table 3. Tous les nombres de la feuille "1" (dans la dernière colonne, les premières colonnes correspondant à leur écriture en binaire)

(B) Les deux méthodes sont les suivantes (il suffit de généraliser les deux méthodes déjà vues) :
— Pour la méthode de la question 2(b)iiC :

0	1	0	0	0	8
1	1	0	0	0	24
0	1	1	0	0	12
1	1	1	0	0	28
0	1	0	1	0	10
1	1	0	1	0	26
0	1	1	1	0	14
1	1	1	1	0	30
0	1	0	0	1	9
1	1	0	0	1	25
0	1	1	0	1	13
1	1	1	0	1	29
0	1	0	1	1	11
1	1	0	1	1	27
0	1	1	1	1	15
1	1	1	1	1	31

TABLE 4. Tous les nombres de la feuille "8" (dans la dernière colonne, les premières colonnes correspondant à leur écriture en binaire)

0	0	0	1	0	2
1	0	0	1	0	18
0	1	0	1	0	10
1	1	0	1	0	26
0	0	1	1	0	6
1	0	1	1	0	22
0	1	1	1	0	14
1	1	1	1	0	30
0	0	0	1	1	3
1	0	0	1	1	19
0	1	0	1	1	11
1	1	0	1	1	27
0	0	1	1	1	7
1	0	1	1	1	23
0	1	1	1	1	15
1	1	1	1	1	31

TABLE 5. Tous les nombres de la feuille "2" (dans la dernière colonne, les premières colonnes correspondant à leur écriture en binaire)

Il suffit d'écrire tous les nombres de 0 à 2^p-1 en base 2 et pour chacun d'eux, les chiffres égaux à 1 indiquent les feuilles auquelles appartient ce nombre. Pour éviter la conversion

0	0	1	0	0	4
1	0	1	0	0	20
0	1	1	0	0	12
1	1	1	0	0	28
0	0	1	1	0	6
1	0	1	1	0	22
0	1	1	1	0	14
1	1	1	1	0	30
0	0	1	0	1	5
1	0	1	0	1	21
0	1	1	0	1	13
1	1	1	0	1	29
0	0	1	1	1	7
1	0	1	1	1	23
0	1	1	1	1	15
1	1	1	1	1	31

Table 6. Tous les nombres de la feuille "4" (dans la dernière colonne, les premières colonnes correspondant à leur écriture en binaire)

1	0	0	0	0	16
1	1	0	0	0	24
1	0	1	0	0	20
1	1	1	0	0	28
1	0	0	1	0	18
1	1	0	1	0	26
1	0	1	1	0	22
1	1	1	1	0	30
1	0	0	0	1	17
1	1	0	0	1	25
1	0	1	0	1	21
1	1	1	0	1	29
1	0	0	1	1	19
1	1	0	1	1	27
1	0	1	1	1	23
1	1	1	1	1	31

Table 7. Tous les nombres de la feuille "16" (dans la dernière colonne, les premières colonnes correspondant à leur écriture en binaire)

en base 2 des nombre de 0 à $2^p - 1$, il suffit, plus simplement, de compter de 0 à $2^p - 1$ en binaire avec p digits , soit 0...01, 0...10, ..., 1...10, 1...11 Pour tout $i \in \{0, ..., p\}$, la feuille

"2^p" contiendra donc tous les entiers correspondant aux nombres en binaire qui a un 1 sur le $p-i$-ième chiffre, ou un 1 dans la $i+1$-ième colonne du tableau ainsi crée.

0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1
2	0	0	0	0	1	0
3	0	0	0	0	1	1
4	0	0	0	1	0	0
5	0	0	0	1	0	1
6	0	0	0	1	1	0
7	0	0	0	1	1	1
8	0	0	1	0	0	0
9	0	0	1	0	0	1
10	0	0	1	0	1	0
11	0	0	1	0	1	1
12	0	0	1	1	0	0
13	0	0	1	1	0	1
14	0	0	1	1	1	0
15	0	0	1	1	1	1
16	0	1	0	0	0	0
17	0	1	0	0	0	1
18	0	1	0	0	1	0
19	0	1	0	0	1	1
20	0	1	0	1	0	0
21	0	1	0	1	0	1
22	0	1	0	1	1	0
23	0	1	0	1	1	1
24	0	1	1	0	0	0
25	0	1	1	0	0	1
26	0	1	1	0	1	0
27	0	1	1	0	1	1
28	0	1	1	1	0	0
29	0	1	1	1	0	1
30	0	1	1	1	1	0
31	0	1	1	1	1	1
32	1	0	0	0	0	0
33	1	0	0	0	0	1
34	1	0	0	0	1	0
35	1	0	0	0	1	1
36	1	0	0	1	0	0
37	1	0	0	1	0	1
38	1	0	0	1	1	0
39	1	0	0	1	1	1
40	1	0	1	0	0	0
41	1	0	1	0	0	1
42	1	0	1	0	1	0
43	1	0	1	0	1	1
44	1	0	1	1	0	0
45	1	0	1	1	0	1
46	1	0	1	1	1	0
47	1	0	1	1	1	1
48	1	1	0	0	0	0
49	1	1	0	0	0	1
50	1	1	0	0	1	0
51	1	1	0	0	1	1
52	1	1	0	1	0	0
53	1	1	0	1	0	1
54	1	1	0	1	1	0
55	1	1	0	1	1	1
56	1	1	1	0	0	0
57	1	1	1	0	0	1
58	1	1	1	0	1	0
59	1	1	1	0	1	1
60	1	1	1	1	0	0
61	1	1	1	1	0	1
62	1	1	1	1	1	0
63	1	1	1	1	1	1

TABLE 8. Écriture en binaire des nombres de 0 à 63

feuille "32"	feuille "16"	feuille "8"	feuille "4"	feuille "2"	feuille "1"
32	16	8	4	2	1
33	17	9	5	3	3
34	18	10	6	6	5
35	19	11	7	7	7
36	20	12	12	10	9
37	21	13	13	11	11
38	22	14	14	14	13
39	23	15	15	15	15
40	24	24	20	18	17
41	25	25	21	19	19
42	26	26	22	22	21
43	27	27	23	23	23
44	28	28	28	26	25
45	29	29	29	27	27
46	30	30	30	30	29
47	31	31	31	31	31
48	48	40	36	34	33
49	49	41	37	35	35
50	50	42	38	38	37
51	51	43	39	39	39
52	52	44	44	42	41
53	53	45	45	43	43
54	54	46	46	46	45
55	55	47	47	47	47
56	56	56	52	50	49
57	57	57	53	51	51
58	58	58	54	54	53
59	59	59	55	55	55
60	60	60	60	58	57
61	61	61	61	59	59
62	62	62	62	62	61
63	63	63	63	63	63

Table 9. Contenu des différentes feuille de "1" à "32"

Par exemple, pour $Q = 6$, voir les tableaux 8 page ci-contre et 9 qui présentent respectivement les nombres en binaires de 0 à 63 puis colonne par colonne, les nombres qui doivent appartenir aux cartes "32", "16", "8", "4", "2" et "1".

— Pour la méthode de la question 2(b)ivB :
On peut donc, compter de 0 à $2^p - 1$ en binaire, mettre tous ces nombres dans un tableau et de venir intercaller, pour tout $j \in \{0, ..., p-1\}$, entre la $p-1-j$-ième et la $p-j$-ième colonne, une colonne de 1. On convertit ensuite tous ces nombres en base 10 et cela

nous fournit les nombres appartenant à la feuille "2^j", que l'on peut ensuite disposer dans l'ordre croissant.

Notons que le choix de $p = 5$ semble entre un bon compromis (suffisamment de valeurs pour le tour impressionne et pas de trop de valeurs à regarder dans les feuilles et puis cela correspond au nombre maximal de jours dans un mois, si on enlève le 0).

(C) La méthode de la question 2(b)iiC est de complexité $\mathcal{O}(2^p)$.
Celle de la question 2(b)ivB est de complexité $\mathcal{O}(p2^p)$. Cela sera admis.

Remarque 4. On pourra trouver un tour alternatif, fondé sur le même principe, à la page `https://afdm.apmep.fr/rubriques/recreations/devine-la-date-de-mon-anniversaire/`

Voir les feuilles agrandies (à découper) pages 20 à 24.

Références

[DB22] N. Débit et J. Bastien. *Méthodes numériques de base.* Notes de cours de l'UV MNB (Département Matériaux) de Polytech Lyon, disponible sur le web : `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`, rubrique "Matériaux 3A : Méthodes Numériques de Base". 2022. 326 pages.

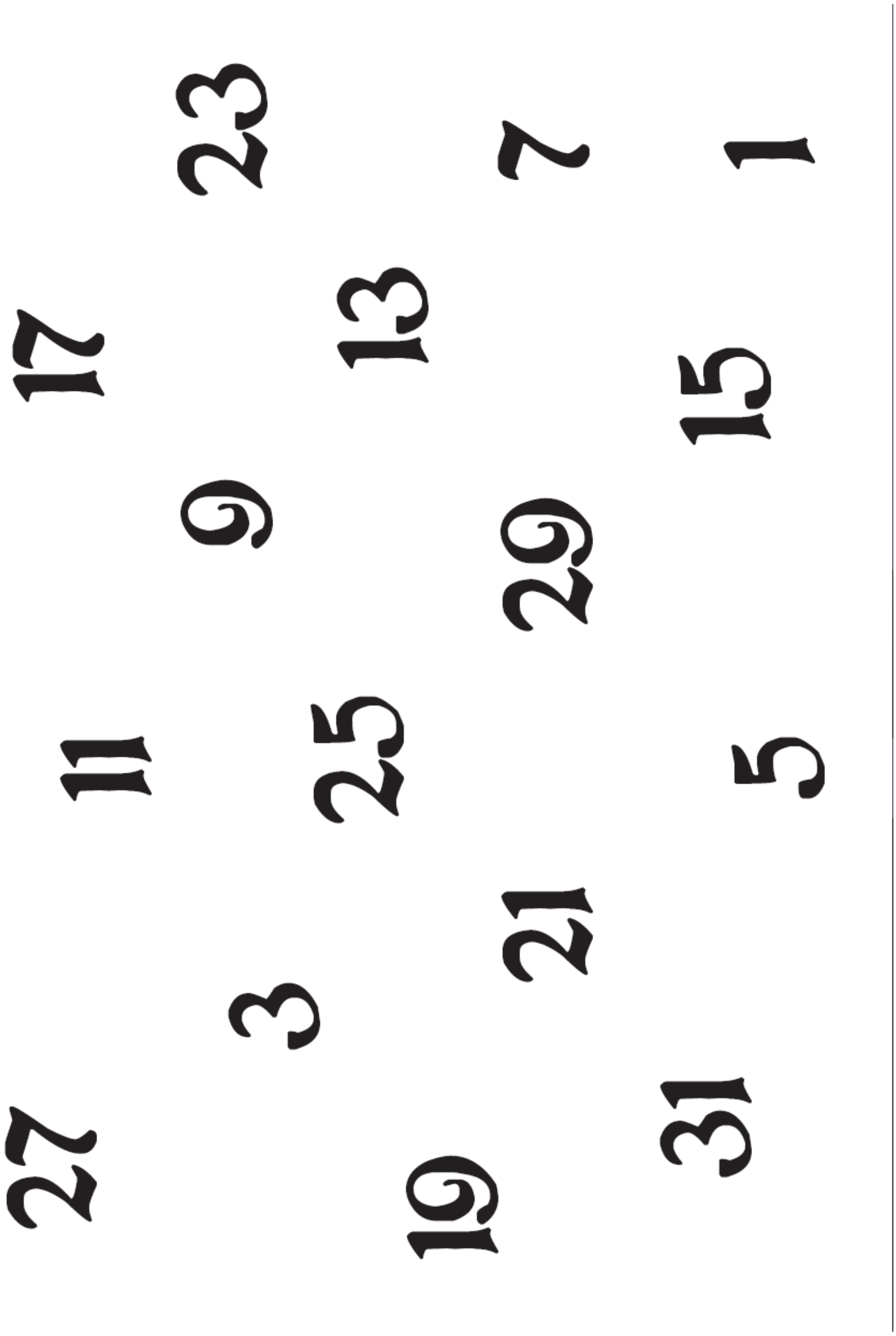

FIGURE 2. La première feuille présentée. Feuilles préparées dans le cadre de l'atelier "magie" de la Maison des Mathématiques de l'Informatique à Lyon (MMI) (Jean-Baptiste Aubin, Charlotte Avellaneda, Camille Beaudou, Yves Doumergue, Olivier Druet). Voir `https://mmi-lyon.fr/`.

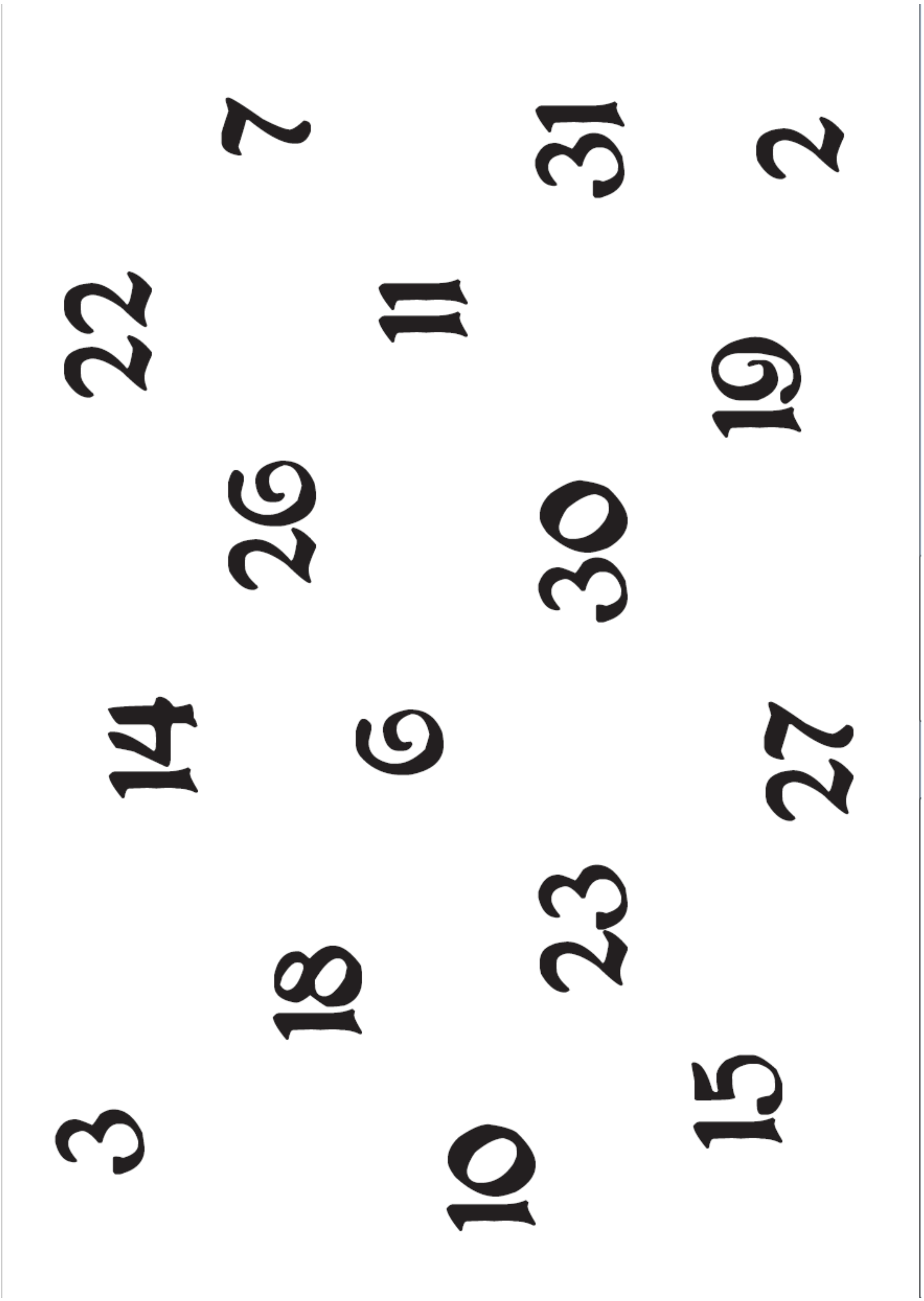

FIGURE 3. La deuxième feuille présentée. Feuilles préparées dans le cadre de l'atelier "magie" de la Maison des Mathématiques de l'Informatique à Lyon (MMI) (Jean-Baptiste Aubin, Charlotte Avellaneda, Camille Beaudou, Yves Doumergue, Olivier Druet). Voir `https://mmi-lyon.fr/`.

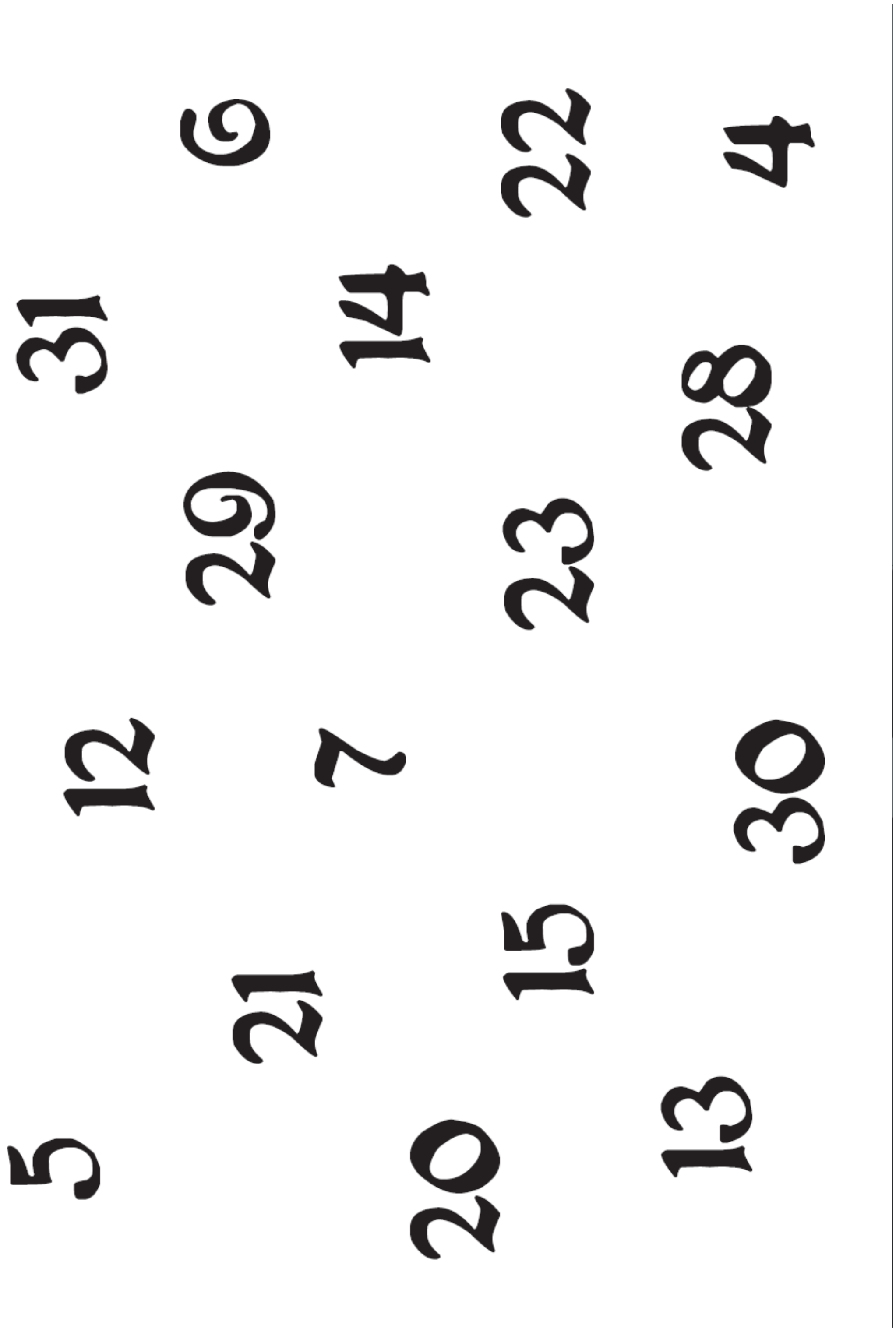

FIGURE 4. La troisième feuille présentée. Feuilles préparées dans le cadre de l'atelier "magie" de la Maison des Mathématiques de l'Informatique à Lyon (MMI) (Jean-Baptiste Aubin, Charlotte Avellaneda, Camille Beaudou, Yves Doumergue, Olivier Druet). Voir `https://mmi-lyon.fr/`.

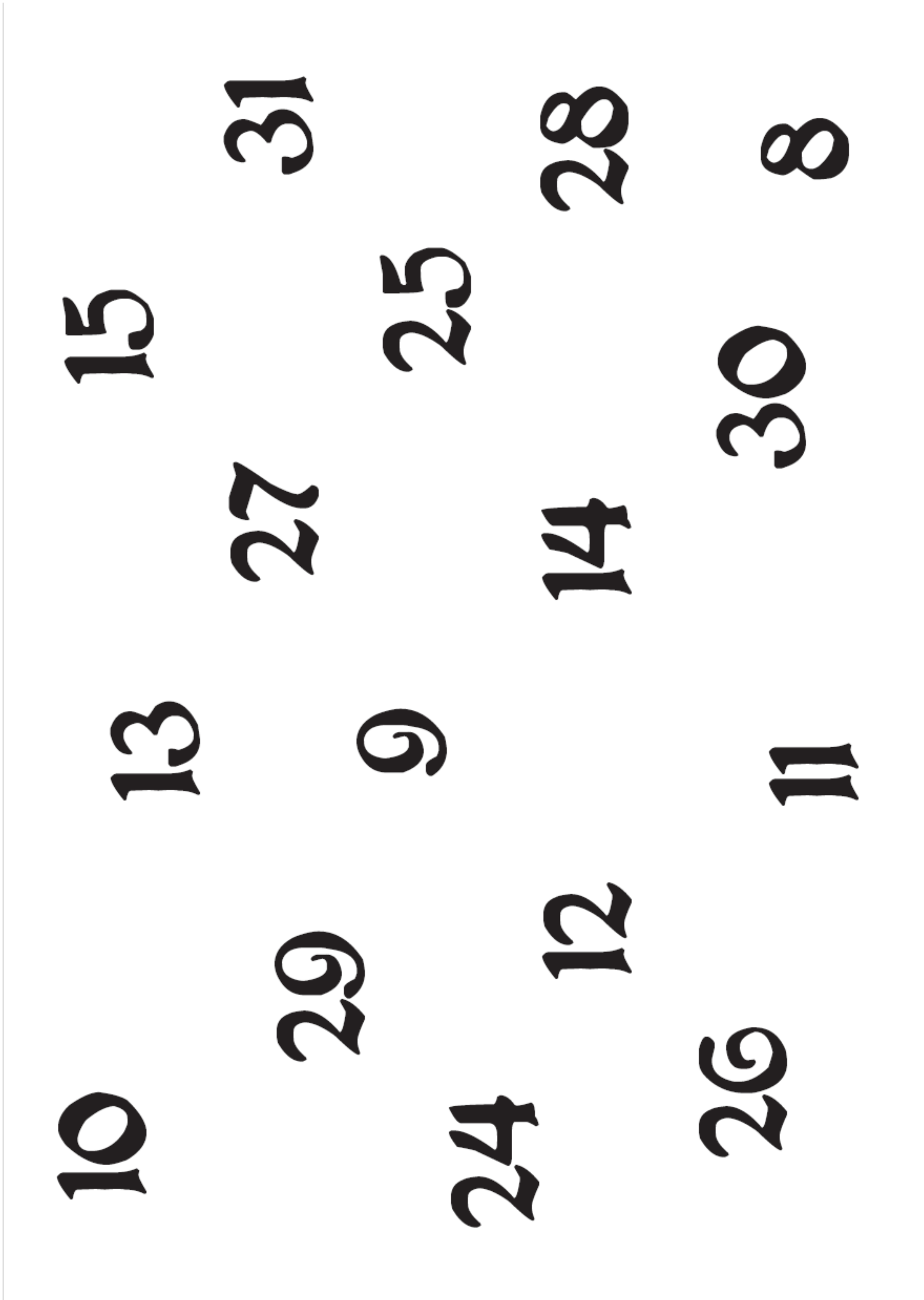

FIGURE 5. La quatrième feuille présentée. Feuilles préparées dans le cadre de l'atelier "magie" de la Maison des Mathématiques de l'Informatique à Lyon (MMI) (Jean-Baptiste Aubin, Charlotte Avellaneda, Camille Beaudou, Yves Doumergue, Olivier Druet). Voir `https://mmi-lyon.fr/`.

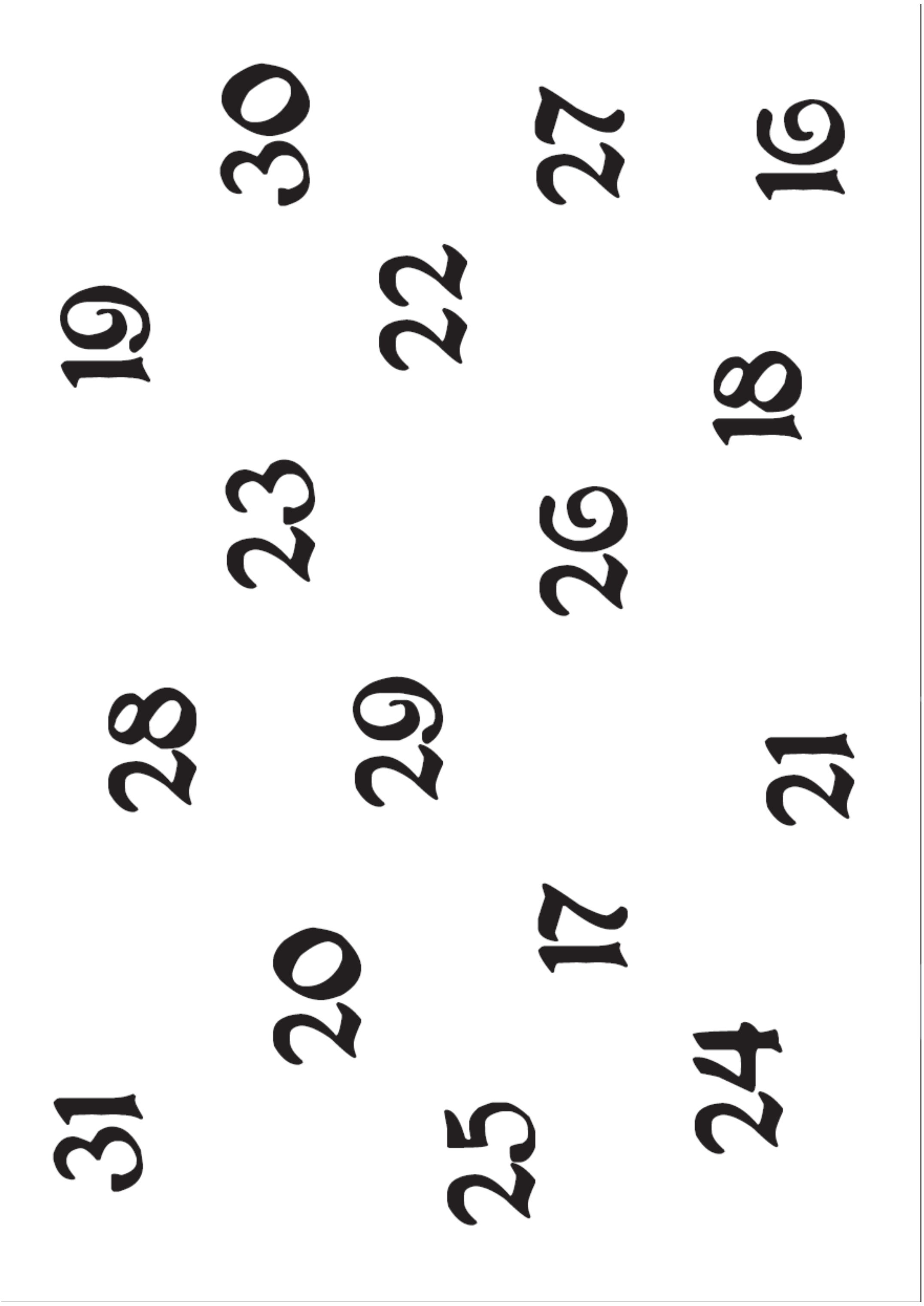

Figure 6. La cinquième feuille présentée. Feuille préparée par la Maison des Mathématiques de l'Informatique à Lyon (MMI) Feuilles préparées dans le cadre de l'atelier "magie" de la Maison des Mathématiques de l'Informatique à Lyon (MMI) (Jean-Baptiste Aubin, Charlotte Avellaneda, Camille Beaudou, Yves Doumergue, Olivier Druet). Voir `https://mmi-lyon.fr/`.