Informatique 3A MFIappro — Automne 2018

Examen du 20 Décembre 2018

Durée : 2 heure(s)

Documents autorisés : OUI ☒ NON ☐
Polycopiés de l'UE, notes manuscrites. Livres interdits

Calculatrice autorisée : OUI ☒ NON ☐
Tout type

Exercice 1.
Déterminer toutes les parties de l'ensemble $S = \{1, 2, 3, 4\}$, puis de l'ensemble $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, en justifiant l'exhaustivité des parties.

Exercice 2.
Résoudre le système matriciel $AX = b$ dans chacun des deux cas suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 12 \\ 11 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3.

(1) Étudier la fonction f définie par

$$\forall x, \quad f(x) = \frac{\ln(x)}{x}.$$

(2) (a) Déduire de l'étude de f que

$$\forall (x, y) \in {\mathbb{R}_+^*}^2, \quad f(x) = f(y) \text{ avec } x < y \Longrightarrow x \in]1, e[\text{ et } y > e, \tag{1}$$

(b) En déduire ensuite que si on cherche x et y entiers, alors

$$x = 2 \text{ et } y = 4. \tag{2}$$

(3) *Question facultative*

Déduire de ce qui précède les solutions de l'équation :

$$(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad p^q = q^p. \tag{3}$$

Exercice 4.

(1) Former le développement limité en zéro de la fonction $f(x) = \ln\left(1 + 4\,x^3\right)$ à l'ordre 4.

(2) Former le développement limité en zéro de la fonction $g(x) = \ln\left(1 + \sin\left(x\right)\right)$ à l'ordre 4.

Exercice 5.
Exercice issu des TD
On cherche à calculer dans cet exercice, l'intégrale I définie par

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

(1) En faisant le changement de variable $x = \tan(t)$, montrer que

$$I = 2\int_0^{\pi/4} \frac{dt}{\cos t}.$$

(2) En faisant maintenant le changement de variable $u = \sin(t)$, montrer que

$$I = -2\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{du}{u^2-1}.$$

(3) Enfin, en montrant que

$$\frac{1}{u^2-1} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{u+1} - \frac{1}{u-1}\right),$$

conclure quant à la valeur de I.

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`