Informatique 3A MFIappro | Automne 2019

Examen du 13 Novembre 2019

Durée : 2 heure(s)

Documents autorisés : OUI ☒ NON ☐
Polycopiés de l'UE, notes manuscrites. Livres interdits

Calculatrice autorisée : OUI ☒ NON ☐
Tout type

Exercice 1.
Étudier et construire le graphe de la fonction suivante :

$$f(x) = \ln(\cosh x).$$

On rappelle que

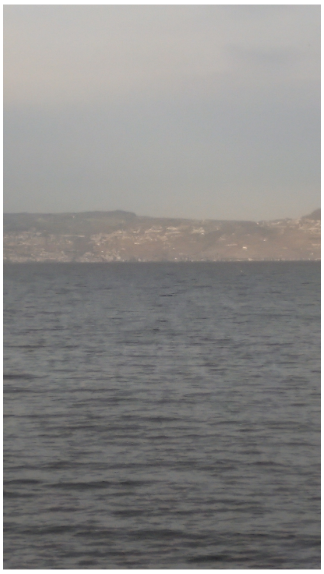
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right).$$

Exercice 2.

(1) Former le développement limité en zéro de la fonction $f(x) = \ln\left(1 + 2\,x^2\right)$ à l'ordre 4.

(2) Former le développement limité en zéro de la fonction $g(x) = \ln\left(1 + \tan\left(x\right)\right)$ à l'ordre 2.

Exercice 3.



Depuis Évian, on regarde la ville de Lausanne, distante de $d = 12.5$ km. On supposera que l'on se trouve à $h_1 = 5$ m. au dessus de la surface de l'eau. On donne le rayon de la terre $R = 6378.137$ km.

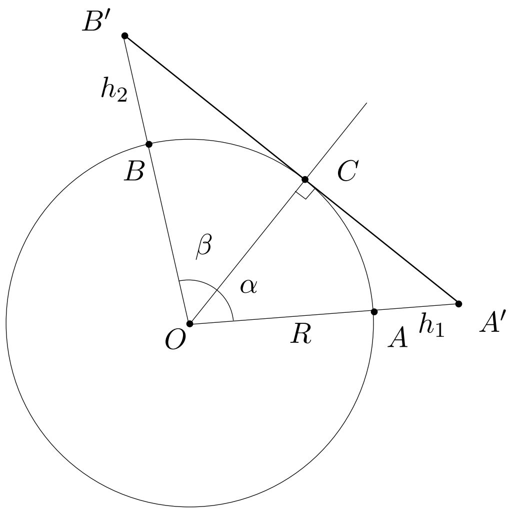


FIGURE 1. La terre, le points d'observation A et le point observé B.

Sur la figure 1, on a noté A et B, les points correspondant à Évian et Lausanne. Le rayon lumineux issu d'un point B' est tangent à la terre au point C et arrive dans l'œil de l'observateur. On s'intéresse à la hauteur h_2 du point B'. L'ensemble du segment $[BB'[$ est en effet caché sous l'horizon. On peut montrer que l'on a :

$$h_2 = R\left(\frac{1}{\cos\left(\dfrac{d}{R} - \arccos\dfrac{R}{R+h_1}\right)} - 1\right), \tag{1}$$

(1) (a) Pourquoi ne peut-on pas écrire de développement limité de arccos en $y = 1$?

(b) Démontrer le résultat suivant :

$$\forall y \in [0,1], \quad \forall x \in [0,\pi/2], \quad \Big(x = \arccos y \Longrightarrow x = \sqrt{2(1-y)}(1+\varepsilon(y)),\Big) \tag{2}$$

avec

$$\lim_{y\to 1} \varepsilon(y) = 0.$$

(2) En déduire une approximation du résultat (1).

Exercice 4.

(1) Calculer par intégration par partie

$$I = \int_1^2 x^3 \ln(x)\, dx.$$

(2) En posant $x = \cos(t)$, calculer

$$I = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Exercice 5.
Résoudre le système matriciel $AX = b$ dans chacun des deux cas suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 12 \\ 11 \\ 34 \end{pmatrix}.$$

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`