POLYTECH LYON

Université Claude Bernard Lyon 1

Informatique 3A MFIappro

Automne 2020

Examen du 27 Janvier 2021

Durée : 1,5 heure(s)

Documents autorisés : OUI ☒ NON ☐

Polycopiés de l'UE, notes manuscrites. Livres et Internet interdits

Calculatrice autorisée : OUI ☒ NON ☐

Tout type

Exercice 1.

Soit un entier $m \geq 0$. Former le développement limité de

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^m,$$

à l'ordre 4 en zéro.

On pourra

— soit calculer les développements limités de $(1+x)^m$ et de $(1-x)^{-m}$ à l'ordre 4 en zéro.

— soit passer en notation exponentielle et utiliser le développement limité de la fonction exponentielle en zéro.

Exercice 2.

(1) (a) Soient b un réel non nul et c un réel quelconque. Calculer la dérivée de

$$f(x) = \ln|bx - c|,$$

et en déduire une primitive de

$$g(x) = \frac{1}{bx - c}.$$

Pour tout la suite, on suppose $b > 0$.

(b) Calculer

$$\int_{(c+b)/b}^{(c+2b)/b} \frac{dx}{bx - c},$$

puis

$$\int_{(c-2b)/b}^{(c-b)/b} \frac{dx}{bx - c}.$$

(2) (a) Calculer la dérivée de la fonction arcsin et en déduire :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

(b) On souhaite calculer

$$F(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}},$$

sur un intervalle où $x > 1$

(i) On fait le changement de variable $\sqrt{x^2-1} = x + t$. Montrer que

$$x = -\frac{1+t^2}{2t}$$

puis que

$$dx = \frac{-t^2+1}{2t^2} dt$$

(ii) En déduire $F(x)$ d'abord en fonction de t puis en fonction de x. On montrera que

$$F(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right).$$

Attention dans ce changement de variable au sein d'une primitive, on procèdera comme dans celui d'une intégrale, sans les bornes.

(c) Calculer successivement

$$\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}, \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{|x^2-1|}}.$$

Exercice 3.

Résoudre le système matriciel $AX = b$ dans chacun des deux cas suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & -3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 18 \\ 11 \\ -18 \end{pmatrix}.$$