Informatique 3A MFIappro

Automne 2022

Examen du 02 Février 2023

Durée : 1,5 heure(s)

Documents autorisés : OUI ☒ NON ☐

Polycopiés de l'UE, notes manuscrites. Écrans, Livres et Internet interdits

Calculatrice autorisée : OUI ☒ NON ☐

Tout type

Exercice 1.

Étudier (en montrant que ces deux suites sont adjacentes) les deux suites u_n et v_n respectivement définies par

$$u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n+1}, \quad v_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n}.$$

Exercice 2.

(1) Montrer que l'on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{x}{1+x^2+x^4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2-x+1} - \frac{1}{x^2+x+1}\right).$$

(2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer S_n définie par

$$S_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{p}{1+p^2+p^4}.$$

(3) En déduire la valeur de la somme S définie par

$$S = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{p}{1+p^2+p^4}.$$

(4) Pourriez-vous démontrer au préalable la convergence de la série de terme général $u_p = \dfrac{p}{1+p^2+p^4}$ sans expliciter la somme partielle ?

Exercice 3.

On étudie la désintégration d'un isotope radioactif de constante radioactive λ, c'est-à-dire que le nombre $N(t)$ d'atomes de cet isotope vérifie

$$N'(t) = -\lambda N(t). \tag{1}$$

(1) Résoudre l'équation différentielle (1) avec $N(t=0) = N_0$. Calculer la demi-vie $t_{1/2}$ de l'isotope sachant que c'est le temps au bout duquel la moitié des atomes se sont désintégrés.

(2) Dans la haute atmosphère, du carbone radioactif est produit à partir des collisions entre des noyaux d'azote et des neutrons produits par les rayons cosmiques. Le dioxyde de carbone de l'atmosphère contient en proportion quasiment constante du carbone 14 et du carbone 12. La proportion de ces 2 isotopes est la même dans les végétaux et dans l'atmosphère. Lorsque la plante meurt, elle cesse d'assimiler le dioxyde de carbone et le carbone 14 qu'elle contient, de demi-vie 5570 ans se désintègre sans être renouvelé. Dans une tombe égyptienne, on a trouvé un échantillon de bois provenant d'un sarcophage qui produisait 560 désintégrations par seconde alors qu'un échantillon du même bois fraîchement coupé contenant la même masse de carbone produit 816 désintégrations par seconde. Déterminer la date de fabrication du sarcophage.

Exercice 4.

(1) (a) Expliquer comment un homme préhistorique qui ne sait pas compter (il distingue juste, de façon très binaire, une et zéro pierre) peut comparer deux tas de pierre. Plus précisément, sans tenir compte, ni de leur masse, ni de leur volume, comment peut-il en un nombre fini et simple d'opérations, déterminer lequel en contient le plus [1].

(b) Est-ce valable si l'un des tas de caillou est infini (numéroté par eremple 0, 1, 2, 3, ...) ? Mettre cela en lien avec la notion de bijection.

(c) Dans cette même logique, peut-on savoir s'il y a autant de nombre entiers naturels que de nombre pairs, de nombres impairs ? S'il y a autant de nombres pairs que de nombres impairs ?

(2) (a) (i) Peut-on exhiber une bijection entre l'union de $\mathbb{N}$ et un autre élément, par exemple avec -1 et $\mathbb{N}$?

(ii) De même, si p est un entier non nul, peut-on exhiber une bijection entre $\{k \in \mathbb{Z}, -p \leq k\}$ et $\mathbb{N}$?

(b) (i) Peut-on exhiber une bijection entre $\{0,1\} \times \mathbb{N}$ et $\mathbb{N}$? On pourra penser à associer à un couple du type $(0,n)$, où n est un entier, à un nombre pair et à un couple du type $(1,n)$, à un nombre impair.

(ii) De même, si p est un entier non nul, peut-on exhiber une bijection entre $\{0,1,...,p\} \times \mathbb{N}$ et $\mathbb{N}$?

(3) Toutes les questions de la question 2 servent en fait à poser un cadre mathématique pour étudier l'hôtel de Hilbert ; cet hotel possède un nombre infini de chambres, numérotées 0, 1, 2, 3, ... On suppose qu'il est plein, c'est-à-dire qu'il y a un client par chambre.

(a) (i) On suppose qu'arrive un voyageur en taxi et qu'il souhaite occuper une chambre, ce qui est possible d'après le récéptionniste. Comment procède-t'il ? Mettre cela en lien avec la question (2a).

(ii) Même question si un bus contenant p personnes pour p est entier non nul, se présente.

1. peut-être pour déterminer lequel correspond à la plus grande richesse ... ce genre de calcul a peut-être été le premier du genre, sachant que le mot "calcul" provient éthymologiquement du mot "caillou".

(b) (i) On suppose maintenant que le bus, qui appartient au beau-frère du réceptionniste, possède un nombre infini de voyageurs, numérotés 0, 1, 2, 3, ... Si ce bus arrive le soir à l'hôtel, comment remplir l'hôtel avec tous ces nouveaux voyageurs ? On mettra cela en lien avec la question 2b.

(ii) Même question si ce sont deux bus infinis qui arrivent ou de façon plus générale, p bus.

(iii) Enfin, on suppose que, le beau frère qui a fait fortune, grâce à tous ces voyageurs, investit dans un nombre infini de bus, numérotés 1, 2, 3, 4, ... Comment procéder pour remplir l'hôtel si tous ces bus arrivent, pleins, à l'hôtel.

On admettra cette fois-ci que $\mathbb{N}^2$ est bijection avec $\mathbb{N}$.

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`