Informatique 3A MFIappro Automne 2023

Examen du 6 Décembre 2023

Durée : 1,5 heure(s)

Documents autorisés : OUI ☒ NON ☐

Polycopiés de l'UE, notes manuscrites. Écrans, Livres et Internet interdits

Calculatrice autorisée : OUI ☒ NON ☐

Tout type

Exercice 1.

Les deux questions 1 et 2 sont indépendantes.

(1) (a) *Cette question est "hors barème".*
J'ai acheté une gomme et un styo. Le stylo coûte 10 € de plus que la gomme et j'ai payé en tout 11 €. Combien coûte la gomme ? Répondez "intuitivement" sans trop réflechir.

(b) Répondre maintenant en utilisant un système de deux équations à deux inconnues.

(2) Résoudre chacun des systèmes linéaires donnés ci-dessous. Si la solution n'est pas unique, on donnera les solutions sous la forme $X_0 + H$ où X_0 est un vecteur donné et H est un vecteur décrivant un espace vectoriel décrit par des vecteurs indépendants.

(a)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

(b)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(c)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(d)
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 8 \\ 3 & 7 & 4 & 11 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 13 \\ 21 \\ 29 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.
Déterminer pour chaque matrice données ci-dessous, le noyau et l'image, le rang et la dimension du noyau. Pour le noyau et l'image, on donnera la solution sous la forme d'une matrice donnant les coordonnées de vecteurs indépendants. On précisera si chacune des applications linéaires associées est injective, surjective ou bijective.

(1)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(2)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

(3)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(4)
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 8 \\ 3 & 7 & 4 & 11 \end{pmatrix}$$

Exercice 3.
Soit un réel α donnés. On cherche une suite réelle $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_{n+1} - y_n = n, \tag{1a}$$
$$y_0 = \alpha. \tag{1b}$$

Déterminer $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On pourra procéder de deux façons différentes : Soit :

(1) Chercher une solution particulière de la forme $v_n = an^2 + bn + c$ puis déterminer la solution y_n de (1) en montrant que $w_n = y_n - v_n$ vérifie $w_{n+1} = w_n$ et conclure en utilisant u_0.

(2) On pourra d'abord déterminer une solution particulière v_n de (1), par sommation de toute les équations (1a) pour n variant de 0 à $N - 1$, puis chercher la solution y_n de (1) en montrant que $w_n = y_n - v_n$ vérifie $w_{n+1} = w_n$ et $w_0 = 0$.

Exercice 4.
Dans cet exercice, on se place en base 10.

(1) Quel nombre rationnel est égal à $0,453453453...$ (le développement est périodique de période 453) ?

(2) En généralisant, montrer que tout nombre dont l'écriture en base 10 est périodique à partir d'un certain rang, est égal à un nombre rationnel.

Exercice 5.

(1) (a) Montrer la distributivité de la loi $\wedge$ par rapport à la lois $\vee$ et celle de la loi $\vee$ par rapport à la loi $\wedge$, c'est-à-dire : pour tout triplet de propositions (P, Q, R) (chacune étant vraie ou fausse) :

$$\begin{aligned} P \vee (Q \wedge R) &= (P \vee Q) \wedge (P \vee R)\,, \\ P \wedge (Q \vee R) &= (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)\,. \end{aligned}$$

(b) Montrer que les lois $\wedge$ et $\vee$ sont associatives, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \forall(P, Q, R), \quad & (P \wedge Q) \wedge R = (P \wedge Q) \wedge R, \\ & (P \vee Q) \vee R = P \vee (Q \vee R)\,. \end{aligned}$$

Par la suite on notera donc sans ambiguïté $P \wedge Q \wedge R$ et $P \vee Q \vee R$.

(c) Montrer que les lois $\wedge$ et $\vee$ sont commutatives, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \forall(P, Q), \quad & P \wedge Q = Q \wedge P, \\ & Q \vee P = P \vee Q. \end{aligned}$$

(2) Pour toute la suite, on notera
- une proposition P vraie sous la forme 1 et une fausse sous la forme 0,
- la loi $\vee$ sous la forme $+$ et la loi $\wedge$ sous la forme d'un produit $\times$, omis entre deux lettres.
- et on considérera que le produit est prioritaire sur l'addition.

(a) Avec ces notations, calculer

$$\begin{aligned} &0 + 0, \\ &0 + 1, \\ &1 + 0, \\ &1 + 1, \end{aligned}$$

ainsi que

$$\begin{aligned} &0 \times 0, \\ &0 \times 1, \\ &1 \times 0, \\ &1 \times 1. \end{aligned}$$

(b) Montrer que si P, Q et R sont trois propositions, on a

$$\begin{aligned} P(Q + R) &= PQ + PR, \\ P + QR &= (P + Q)(P + R). \end{aligned}$$

(c) Montrer que si P et Q sont deux propositions, on a

$$\begin{aligned} P + PQ &= P, \\ P(P + Q) &= P. \end{aligned}$$

(d) Que pensez-vous du calcul suivant

$$\begin{aligned} P+QR &= (P+Q)(P+R), \\ &= P^2+PR+QP+QR, \\ &= P+PR+PQ+QR. \end{aligned}$$

(e) (i) Développer l'expression suivante, en supprimant toutes les parenthèses :

$$P(Q+R(S+T))U+V.$$

(ii) Peut-on généraliser et affirmer qu'aucune parenthèse n'est nécessaire dans de tels calculs ?

Exercice 6.

(1) Exhiber deux algorithmes de complexité respectives en $\mathcal{O}(n)$ et $\mathcal{O}(n^2)$.

(2) Pour chacun d'eux, on montrera que la complexité est bien celle demandée.

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`