Informatique 3A MFIappro

Automne 2022

Examen complémentaire du 17 Mars 2023

Durée : 1,5 heure(s)

Documents autorisés : OUI ☒ NON ☐

Polycopiés de l'UE, notes manuscrites. Écrans, Livres et Internet interdits

Calculatrice autorisée : OUI ☒ NON ☐

Tout type

Exercice 1.

Justifiez(et préciser le cas échéant) toutes les règles de la figure 1 page suivante, issue d'un cours de quatrième, à partir de la définition donnée en haut à gauche :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ fois}} \quad \text{avec} \begin{cases} a : & \text{nombre} \\ n : & \text{nombre entier positif} \end{cases}$$

Il est sous-entendu que "nombre entier positif" signifie "nombre entier strictement positif".

Exercice 2.

Les deux questions sont indépendantes.

(1) Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{2}{e^x + 1}.$$

Démontrer que $f(x) + f(-x) = 2$.

(2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (2x + 1)e^x.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative. Pour chaque affirmation suivante, préciser si elle est vraie ou fausse, en justifiant.

(a) Le point $A(0, 1)$ appartient la courbe $\mathcal{C}$.

(b) Pour tout réel x, $f'(x) = 2e^x$.

(c) La tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse -1.5 est horizontale.

(d) La fonction est croissante sur $\mathbb{R}$.

(e) La fonction est positive sur $\mathbb{R}$.

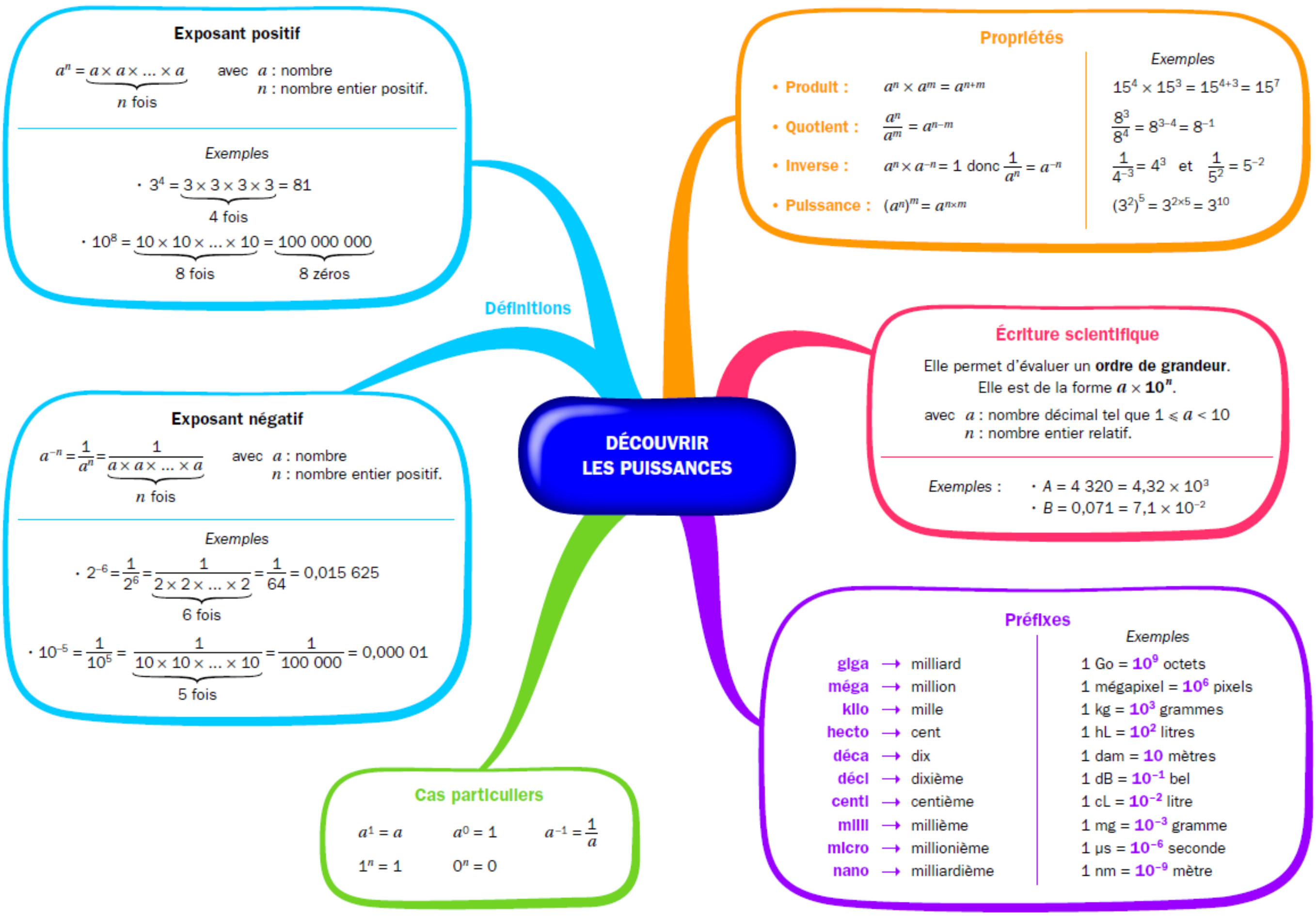

FIGURE 1. Les règles de puissances.

Exercice 3.

(1) (a) Expliquer comment un homme préhistorique qui ne sait pas compter (il distingue juste, de façon très binaire, une et zéro pierre) peut comparer deux tas de pierre. Plus précisément, sans tenir compte, ni de leur masse, ni de leur volume, comment peut-il en un nombre fini et simple d'opérations, déterminer lequel en contient le plus[1].

(b) Est-ce valable si l'un des tas de caillou est infini (numéroté par eremple 0, 1, 2, 3, ...) ? Mettre cela en lien avec la notion de bijection.

(c) Dans cette même logique, peut-on savoir s'il y a autant de nombre entiers naturels que de nombre pairs, de nombres impairs ? S'il y a autant de nombres pairs que de nombres impairs ?

(2) (a) (i) Peut-on exhiber une bijection entre l'union de $\mathbb{N}$ et un autre élément, par exemple avec -1 et $\mathbb{N}$?

1. peut-être pour déterminer lequel correspond à la plus grande richesse ... ce genre de calcul a peut-être été le premier du genre, sachant que le mot "calcul" provient éthymologiquement du mot "caillou".

(ii) De même, si p est un entier non nul, peut-on exhiber une bijection entre $\{k \in \mathbb{Z}, -p \leq k\}$ et $\mathbb{N}$?

(b) (i) Peut-on exhiber une bijection entre $\{0, 1\} \times \mathbb{N}$ et $\mathbb{N}$? On pourra penser à associer à un couple du type $(0, n)$, où n est un entier, à un nombre pair et à un couple du type $(1, n)$, à un nombre impair.

(ii) De même, si p est un entier non nul, peut-on exhiber une bijection entre $\{0, 1, ..., p\} \times \mathbb{N}$ et $\mathbb{N}$?

(3) Toutes les questions de la question 2 servent en fait à poser un cadre mathématique pour étudier l'hôtel de Hilbert ; cet hotel possède un nombre infini de chambres, numérotées 0, 1, 2, 3, ... On suppose qu'il est plein, c'est-à-dire qu'il y a un client par chambre.

(a) (i) On suppose qu'arrive un voyageur en taxi et qu'il souhaite occuper une chambre, ce qui est possible d'après le récéptionniste. Comment procède-t'il ? Mettre cela en lien avec la question (2a).

(ii) Même question si un bus contenant p personnes pour p est entier non nul, se présente.

(b) (i) On suppose maintenant que le bus, qui appartient au beau-frère du réceptionniste, possède un nombre infini de voyageurs, numérotés 0, 1, 2, 3, ... Si ce bus arrive le soir à l'hôtel, comment remplir l'hôtel avec tous ces nouveaux voyageurs ? On mettra cela en lien avec la question 2b.

(ii) Même question si ce sont deux bus infinis qui arrivent ou de façon plus générale, p bus.

(iii) Enfin, on suppose que, le beau frère qui a fait fortune, grâce à tous ces voyageurs, investit dans un nombre infini de bus, numérotés 1, 2, 3, 4, ... Comment procéder pour remplir l'hôtel si tous ces bus arrivent, pleins, à l'hôtel.
On admettra cette fois-ci que $\mathbb{N}^2$ est bijection avec $\mathbb{N}$.

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`