Informatique 3A MFIappro

Automne 2017

Corrigé de l'examen du 23 Novembre 2017

Ce corrigé renvoie à des références du cours ; prière de consulter la dernière version disponible sur
`http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`

Correction de l'exercice 1.

On renvoie aux chapitre 1 et 2 du cours.
Plusieurs manières sont possibles.

(1) Pour $S = \{1, 2, 3, 4\}$, on renvoie à l'exemple 1.1 du cours rappelé ci-dessous :

— L'unique parties à 0 élément est $\emptyset$;
— Les 4 parties à 1 éléments (singletons) sont $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$ et $\{4\}$;
— Les 6 parties à 2 éléments (paires) sont $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$ et $\{3, 4\}$;
— Les 4 parties à 3 éléments sont $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 3, 4\}$ et $\{2, 3, 4\}$;
— L'unique parties à 4 élément est S ;

ce qui nous fait un total de 16 parties.

La déterminations des parties à 0, 1 et 4 éléments ne posent aucun soucis.

Pour celles à 2 éléments, on procède comme suit : le premier élément peut être 1, 2, 3 ou 4. Pour le premier d'entre eux, 1, le second peut être 2, 3 ou 4. Pour 2, le second peut être 3 ou 4. Pour 3, le second peut être 4. Pour 4, aucun ne va.

Pour les parties à 3 éléments, chacune d'elles est le complémentaire d'une partie à 1 élément.

Pour $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, cette méthode est un peu plus difficile à mettre en œuvre ; voir les autres méthodes.

(2) La deuxième méthode est traitée dans l'exemple 1.3 du cours et rappelée dans l'exercice suivant :

Énoncé

On cherche à construire par récurrence les parties d'un ensemble à $n \in \mathbb{N}$ éléments. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \{a_1, ..., a_n\}$ où les a_i sont quelconques.

(a) Déterminer $\mathcal{P}(S_0)$

(b) pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $\mathcal{P}(S_n)$ en fonction de $\mathcal{P}(S_{n-1})$.
On considérera a_n le dernier élément de S_n et pour construire les parties de $\mathcal{P}(S_n)$, on se servira des parties de $\mathcal{P}(S_{n-1})$ qui contiennent a_n et celles qui ne contiennent pas a_n.

(c) Conclure sur la méthode à utiliser. On en déduira aussi que le cardinal de $\mathcal{P}(S_n)$ vaut 2^n.

(d) Application : construire de cette façon $\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\})$

Corrigé

(a) Il est clair que

$$\mathcal{P}(S_0) = \{\emptyset\}. \tag{1}$$

Attention à ne pas écrire :

$$\mathcal{P}(S_0) = \emptyset.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit a_n le dernier élément de S_n. Pour toute partie A de $\mathcal{P}(S_n)$, on a donc deux cas :

(i) Soit $a_n \in A$. On a donc

$$A = \{B, a_n\} \text{ où } B \in \mathcal{P}(S_{n-1}). \tag{2}$$

(ii) Soit $a_n \notin A$. On a donc

$$A \in \mathcal{P}(S_{n-1}). \tag{3}$$

(c) Les formules (2) et (3) permettent donc de passer de $\mathcal{P}(S_{n-1})$ à $\mathcal{P}(S_n)$, par une récurrence, intialisée par (1).

Plus précisément, on peut donc supposer connu

$$\mathcal{P}(S_{n-1}) = \{b_1, b_2, ..., b_p\} \text{ où } b_k \subset S_{n-1}. \tag{4}$$

D'après (2) et (3), on a donc

$$\mathcal{P}(S_n) = \{b_1, b_2, ..., b_p, \{b_1 \cup \{a_n\}\}, \{b_2 \cup \{a_n\}\}, ...\{b_p \cup \{a_n\}\}. \tag{5}$$

En pratique pour passer $\mathcal{P}(S_{n-1})$ à $\mathcal{P}(S_n)$, on listera donc d'abord les parties de $\mathcal{P}(S_{n-1})$ puis on recopiera chacune de ces parties en y rajoutant le dernier élément a_n de S_n.

Dans (5), chacune des parties b_i et $\{b_j \cup \{a_n\}$ sont disjointes (si on suppose les b_i deux à deux disjointes). Ainsi le cardinal de $\mathcal{P}(S_n)$ vaut deux fois le cardinal de $\mathcal{P}(S_{n-1})$. On donc

$$\#(\mathcal{P}(S_n)) = 2\#(\mathcal{P}(S_{n-1})). \tag{6}$$

Par une récurrence immédiate, on en déduit donc que

$$\#(\mathcal{P}(S_n)) = 2^n\#(\mathcal{P}(S_0)). \tag{7}$$

D'après (1), on a $\#(\mathcal{P}(S_0)) = 1$ et donc d'après (7), on a

$$\#(\mathcal{P}(S_n)) = 2^n. \tag{8}$$

(d) Construisons de cette façon $\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$.

D'après (1), on a

$$\mathcal{P}(S_0) = \{\emptyset\}. \tag{9}$$

Passons maintenant de $\mathcal{P}(S_0)$ à $\mathcal{P}(S_0)$ en appliquant la méthode de la question 2c avec $n = 1$ et donc $a_n = 1$. On a donc, en utilisant (9) :

$$\mathcal{P}(S_1) = \{\emptyset, \{\emptyset \cup \{1\}\},$$

soit

$$\mathcal{P}(S_1) = \{\emptyset, \{1\}\}. \tag{10}$$

On recommence : passons maintenant de $\mathcal{P}(S_1)$ à $\mathcal{P}(S_2)$ en appliquant la méthode de la question 2c avec $n = 2$ et donc $a_n = 2$. On a donc, en utilisant (10) :

$$\mathcal{P}(S_2) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}. \tag{11}$$

Passons maintenant de $\mathcal{P}(S_2)$ à $\mathcal{P}(S_3)$ en appliquant la méthode de la question 2c avec $n = 3$ et donc $a_n = 3$. On a donc, en utilisant (11) :

$$\mathcal{P}(S_3) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}. \tag{12}$$

Enfin, passons maintenant de $\mathcal{P}(S_3)$ à $\mathcal{P}(S_4)$ en appliquant la méthode de la question 2c avec $n = 4$ et donc $a_n = 4$. On a donc, en utilisant (12) :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(S_4) = \big(\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}, \\ \{4\}, \{1,4\}, \{2,4\}, \{1,2,4\}, \{3,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}\big\},\end{aligned} \tag{13}$$

ce qui fait bien $2^4 = 16$ parties.

Voir dans le tableau 1 page ci-contre, les parties ainsi contruites pour $I = \{1,2,3,4\}$.

$\emptyset$
$\{1\}$
$\{2\}$
$\{1,2\}$
$\{3\}$
$\{1,3\}$
$\{2,3\}$
$\{1,2,3\}$
$\{4\}$
$\{1,4\}$
$\{2,4\}$
$\{1,2,4\}$
$\{3,4\}$
$\{1,3,4\}$
$\{2,3,4\}$
$\{1,2,3,4\}$

TABLE 1. Parties d'un ensemble à 4 éléments

Voir de même dans le tableau 2 page suivante, les parties ainsi contruites pour $I = \{1,2,3,4,5\}$.

(3) Enfin, la troisième méthode est traitée dans l'exemple 2.1 du cours et rappelée dans l'exercice suivant :

Énoncé

Soit I un ensemble quelconque.

(a) On rappelle que χ_A désigne la fonction caractéristique de $A \subset I$, égale à 1 sur A et 0 ailleurs.
Montrer qu'à toute partie A de $\mathcal{P}(I)$ on peut associer une unique application de I dans $\{0,1\}$ telle que $f = \chi_A$.

(b) En déduire une construction algorithmique des parties de l'ensemble $I = \{1,2,...,n\}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
Traiter le particulier $n = 4$.

Corrigé

(a) Soit A une partie de $\mathcal{P}(I)$.
Considérons f une application de I dans $\{0,1\}$ par

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \chi_A(x).$$

Par construction $f = \chi_A$. On admet que f est unique.
Réciproquement, soit f une application de I dans $\{0,1\}$. On considère la partie A de I comme l'ensemble des antécédents de 1, notée

$$A = f^{-1}(1).$$

Par définition, $x \in A$ ssi $f(x) = 1$. Ainsi, $x \notin A$ ssi $f(x) \neq 1$, ce qui implique de $f(x) = 0$. Ainsi, f et χ_A valent 1 sur A et 0 ailleurs et sont donc égales.

(b) Énumérer les parties de I revient donc à énumérer les applications de I dans $\{0,1\}$.
Si I est fini, de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$, f une application de $I = \{a_1,...,a_n\}$ dans $\{0,1\}$ est donnée par une n-liste formée uniquement de 0 et de 1, chacun d'eux représente successivement l'image de a_1, a_2, ...,

$\emptyset$
$\{1\}$
$\{2\}$
$\{1,2\}$
$\{3\}$
$\{1,3\}$
$\{2,3\}$
$\{1,2,3\}$
$\{4\}$
$\{1,4\}$
$\{2,4\}$
$\{1,2,4\}$
$\{3,4\}$
$\{1,3,4\}$
$\{2,3,4\}$
$\{1,2,3,4\}$
$\{5\}$
$\{1,5\}$
$\{2,5\}$
$\{1,2,5\}$
$\{3,5\}$
$\{1,3,5\}$
$\{2,3,5\}$
$\{1,2,3,5\}$
$\{4,5\}$
$\{1,4,5\}$
$\{2,4,5\}$
$\{1,2,4,5\}$
$\{3,4,5\}$
$\{1,3,4,5\}$
$\{2,3,4,5\}$
$\{1,2,3,4,5\}$

Table 2. Parties d'un ensemble à 5 éléments

a_n. À chacune de ces liste, on associe A telle que $\chi_A = f$, c'est-à-dire que l'on considère la partie des éléments de I qui ont pour image 1 par f. Pour énumérer toutes les applications de $I = \{a_1, ..., a_n\}$ dans $\{0,1\}$, il suffit de compter en binaire de 0 à $2^n - 1$, ce qui représente bien 2^n possibilités, soit le nombre de parties de I. Pour chaque nombre ainsi en écrit en binaire, $\overline{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}$, où α_i est un chiffre dans $\{0,1\}$, on considère la partie de A formée des éléments a_i tels que $\alpha_i = 1$.

Voir dans le tableau 3 page ci-contre, les parties ainsi contruites pour $I = \{1,2,3,4\}$.

De même, voir dans le tableau 4 page 6, les parties ainsi contruites pour $I = \{1,2,3,4,5\}$.

Correction de l'exercice 2.

nombres en binaires	parties
0000	$\emptyset$
0001	$\{4\}$
0010	$\{3\}$
0011	$\{3,4\}$
0100	$\{2\}$
0101	$\{2,4\}$
0110	$\{2,3\}$
0111	$\{2,3,4\}$
1000	$\{1\}$
1001	$\{1,4\}$
1010	$\{1,3\}$
1011	$\{1,3,4\}$
1100	$\{1,2\}$
1101	$\{1,2,4\}$
1110	$\{1,2,3\}$
1111	$\{1,2,3,4\}$

Table 3. Parties d'un ensemble à 4 éléments

Après une double intégration par partie, on trouve

$$I = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}.$$

Correction de l'exercice 3.
On obtient les résultats suivants

(1) Il y a au moins une équation superflue et le système admet un ensemble infini de solution.

(2) Le système admet une solution unique donnée par

$$x = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 4.

(1) La dérivée de f

$$\forall x > 0, \quad f(x) = \ln(x) - x,$$

est donnée par

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x},$$

strictement positive sur $]0,1[$ et strictement positive sur $]1,+\infty[$. f est donc strictement croissante sur $]0,1[$ et strictement décroissante sur $]1,+\infty[$. On a $f(0+) = -\infty$, $f(1) = -1$ et $f(+\infty) = -\infty$.

Le graphique de f est représenté sur la figure 1 page 7.

(2) (a) On a, pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = e^x - 1,$$

nombres en binaires	parties
00000	$\emptyset$
00001	$\{5\}$
00010	$\{4\}$
00011	$\{4,5\}$
00100	$\{3\}$
00101	$\{3,5\}$
00110	$\{3,4\}$
00111	$\{3,4,5\}$
01000	$\{2\}$
01001	$\{2,5\}$
01010	$\{2,4\}$
01011	$\{2,4,5\}$
01100	$\{2,3\}$
01101	$\{2,3,5\}$
01110	$\{2,3,4\}$
01111	$\{2,3,4,5\}$
10000	$\{1\}$
10001	$\{1,5\}$
10010	$\{1,4\}$
10011	$\{1,4,5\}$
10100	$\{1,3\}$
10101	$\{1,3,5\}$
10110	$\{1,3,4\}$
10111	$\{1,3,4,5\}$
11000	$\{1,2\}$
11001	$\{1,2,5\}$
11010	$\{1,2,4\}$
11011	$\{1,2,4,5\}$
11100	$\{1,2,3\}$
11101	$\{1,2,3,5\}$
11110	$\{1,2,3,4\}$
11111	$\{1,2,3,4,5\}$

Table 4. Parties d'un ensemble à 5 éléments

et donc f' est strictement négative sur $\mathbb{R}_-^*$ et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$ valent $+\infty$ et $+\infty$. Enfin, $f(0) = 0$. Tout cela permet de dresser le tableau de variation de f.

Voir le graphique 2.

(b) (i)

Voir le graphique 3.

(ii) On a $\exp'(0) = 1$ et d'après l'équation (8.8) du cours, la tangente a pour équation $y = x + 1$.

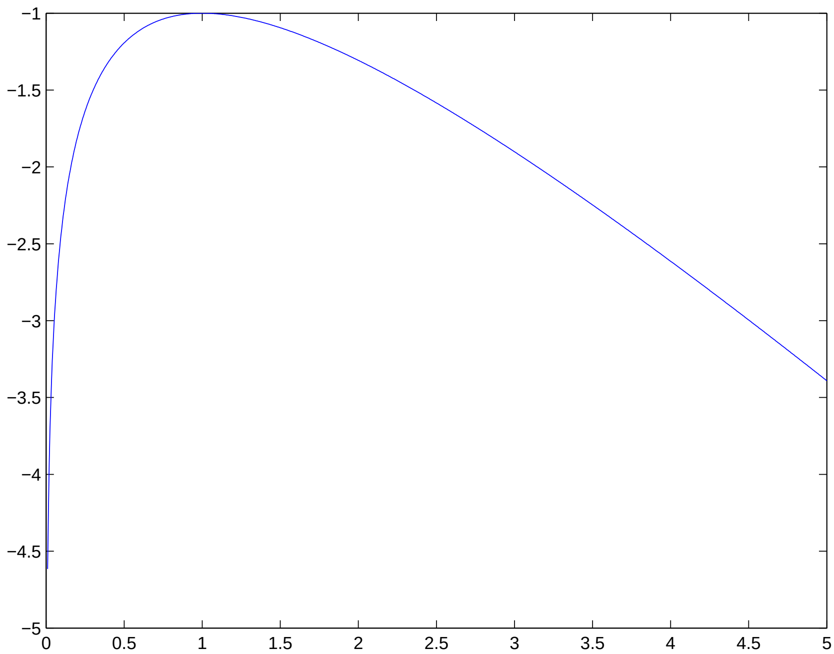

Figure 1. Le graphe de f.

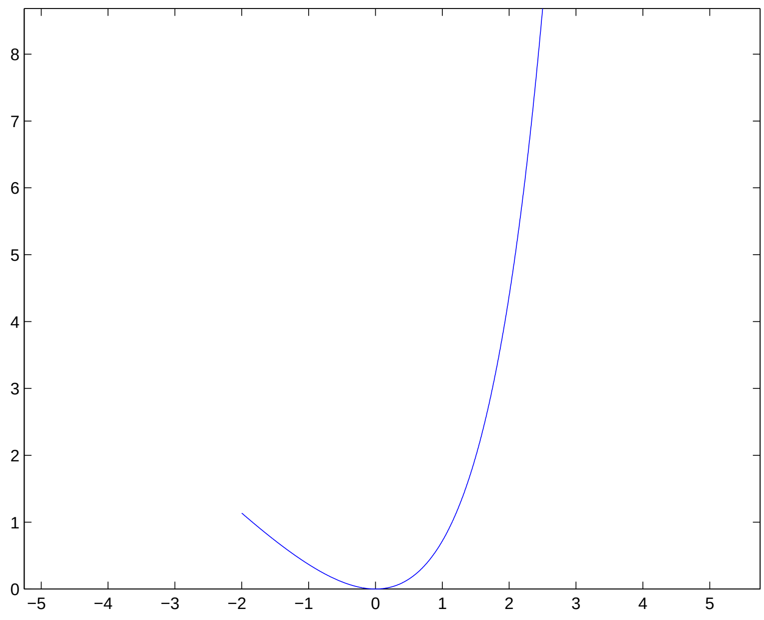

Figure 2. La courbe de f.

(iii) Le minimum de f sur $\mathbb{R}$ est nul et donc f est positive sur $\mathbb{R}$, ce qui signifie, que pour tout x, $e^x \geq x+1$ et donc que la courbe representatrice de l'exponentielle est au-dessus de la tangente.

Correction de l'exercice 5.

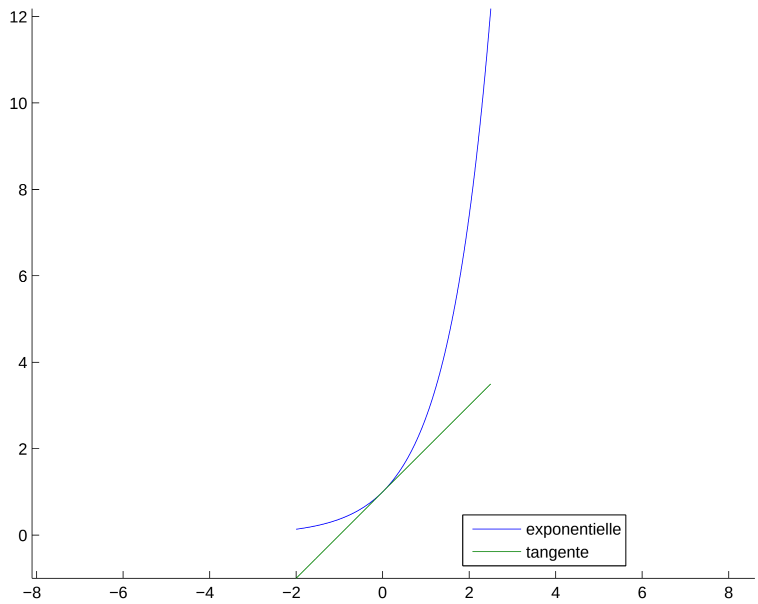

FIGURE 3. La courbe de l'exponentielle et sa tangente au point $x = 0$.

(1) On trouve en utilisant par exemple la fonction suivante
`http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MFI/fichiers_matlab/developpement_limite.m`,

$$f(x) = x^2 + o\left(x^3\right).$$

(2) On trouve

$$f(x) = x^2 - \frac{5\,x^4}{6} + o\left(x^4\right).$$