Informatique 3A MFIappro — Automne 2018

Corrigé de l'examen du 20 Décembre 2018

Ce corrigé renvoie à des références du cours ; prière de consulter la dernière version disponible sur
`http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`

Correction de l'exercice 1.
On renvoie aux chapitre 1 et 2 du cours.
Plusieurs manières sont possibles.

(1) Pour $S = \{1, 2, 3, 4\}$, on renvoie à l'exemple 1.7 du cours rappelé ci-dessous :
- L'unique parties à 0 élément est $\emptyset$;
- Les 4 parties à 1 éléments (singletons) sont $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$ et $\{4\}$;
- Les 6 parties à 2 éléments (paires) sont $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$ et $\{3, 4\}$;
- Les 4 parties à 3 éléments sont $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 3, 4\}$ et $\{2, 3, 4\}$;
- L'unique parties à 4 élément est S ;

ce qui nous fait un total de 16 parties.

La déterminations des parties à 0, 1 et 4 éléments ne posent aucun soucis.

Pour celles à 2 éléments, on procède comme suit : le premier élément peut être 1, 2, 3 ou 4. Pour le premier d'entre eux, 1, le second peut être 2, 3 ou 4. Pour 2, le second peut être 3 ou 4. Pour 3, le second peut être 4. Pour 4, aucun ne va.

Pour les parties à 3 éléments, chacune d'elles est le complémentaire d'une partie à 1 élément.

Pour $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, cette méthode est un peu plus difficile à mettre en œuvre ; voir les autres méthodes.

(2) La deuxième méthode est traitée dans l'exemple 1.8 du cours et rappelée dans l'exercice suivant :

Énoncé

On cherche à construire par récurrence les parties d'un ensemble à $n \in \mathbb{N}$ éléments. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \{a_1, ..., a_n\}$ où les a_i sont quelconques.

(a) Déterminer $\mathcal{P}(S_0)$

(b) pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $\mathcal{P}(S_n)$ en fonction de $\mathcal{P}(S_{n-1})$.
On considérera a_n le dernier élément de S_n et pour construire les parties de $\mathcal{P}(S_n)$, on se servira des parties de $\mathcal{P}(S_{n-1})$ qui contiennent a_n et celles qui ne contiennent pas a_n.

(c) Expliciter l'algorithme utilisant cette méthode.

(d) Traduisez-le en "mots courants" !

(e) En déduire aussi que le cardinal de $\mathcal{P}(S_n)$ vaut 2^n.

(f) Application : construire de cette façon $\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\})$

Corrigé

(a) Il est clair que

$$\mathcal{P}(S_0) = \{\emptyset\}. \tag{1}$$

Cela provient du fait que pour tout ensemble S, on a $S \in \mathcal{P}(S)$. En particulier

$$\emptyset \in \mathcal{P}(S_0),$$

et donc
$$\{\emptyset\} \subset \mathcal{P}(S_0), \tag{2}$$
On sait aussi que $\mathcal{P}(S_0)$ ne peut avoir qu'un seul élément ; on a donc
$$\mathcal{P}(S_0) \subset \{\emptyset\}. \tag{3}$$
Par double inclusion, (2) et (3) sont équivalents à (1).

Attention à ne pas écrire :
$$\mathcal{P}(S_0) = \emptyset.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit a_n le dernier élément de S_n. Pour toute partie A de $\mathcal{P}(S_n)$, on a donc deux cas :

(i) Soit $a_n \in A$. On a donc
$$A = B \cup \{a_n\} \text{ où } B \in \mathcal{P}(S_{n-1}). \tag{4a}$$
avec
$$a_n \notin B, \tag{4b}$$
puisque B ne peut contenir que des éléments parmis a_1, ..., a_{n-1}.

(ii) Soit $a_n \notin A$. On a donc
$$A \in \mathcal{P}(S_{n-1}). \tag{5}$$

(c) Les formules (4a) et (5) permettent donc de passer de $\mathcal{P}(S_{n-1})$ à $\mathcal{P}(S_n)$, par une récurrence, intialisée par (1).

Plus précisément, on peut donc supposer connu
$$\mathcal{P}(S_{n-1}) = \{b_1, b_2, ..., b_p\} \text{ où } b_k \subset S_{n-1}. \tag{6}$$
D'après (4a) et (5), on a donc
$$\mathcal{P}(S_n) = \{b_1, b_2, ..., b_p, \{b_1 \cup \{a_n\}\}, \{b_2 \cup \{a_n\}\}, ...\{b_p \cup \{a_n\}\}. \tag{7}$$

(d) En pratique pour passer $\mathcal{P}(S_{n-1})$ à $\mathcal{P}(S_n)$, on listera donc d'abord les parties de $\mathcal{P}(S_{n-1})$ puis on listera chacune de ces parties en y rajoutant le dernier élément a_n de S_n.

(e) On suppose les b_i deux à deux disjointes. Ainsi, d'après (4b) et (7), chacune des parties b_i et $\{b_j \cup \{a_n\}$ sont disjointes. Ainsi le cardinal de $\mathcal{P}(S_n)$ vaut deux fois le cardinal de $\mathcal{P}(S_{n-1})$. On donc
$$\#(\mathcal{P}(S_n)) = 2\#(\mathcal{P}(S_{n-1})). \tag{8}$$
Par une récurrence immédiate, on en déduit donc que
$$\#(\mathcal{P}(S_n)) = 2^n\#(\mathcal{P}(S_0)). \tag{9}$$
D'après (1), on a $\#(\mathcal{P}(S_0)) = 1$ et donc d'après (9), on a
$$\#(\mathcal{P}(S_n)) = 2^n. \tag{10}$$

(f) Construisons de cette façon $\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$.

D'après (1), on a
$$\mathcal{P}(S_0) = \{\emptyset\}. \tag{11}$$
Passons maintenant de $\mathcal{P}(S_0)$ à $\mathcal{P}(S_0)$ en appliquant la méthode de la question 2c avec $n = 1$ et donc $a_n = 1$. On a donc, en utilisant (11) :
$$\mathcal{P}(S_1) = \{\emptyset, \{\emptyset \cup \{1\}\},$$
soit
$$\mathcal{P}(S_1) = \{\emptyset, \{1\}\}. \tag{12}$$

On recommence : passons maintenant de $\mathcal{P}(S_1)$ à $\mathcal{P}(S_2)$ en appliquant la méthode de la question 2c avec $n = 2$ et donc $a_n = 2$. On a donc, en utilisant (12) :

$$\mathcal{P}(S_2) = \{\emptyset, \{1\}, \{\emptyset \cup \{2\}\}, \{\{1\} \cup \{2\}\}\}.$$

soit

$$\mathcal{P}(S_2) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}. \tag{13}$$

Passons maintenant de $\mathcal{P}(S_2)$ à $\mathcal{P}(S_3)$ en appliquant la méthode de la question 2c avec $n = 3$ et donc $a_n = 3$. On a donc, en utilisant (13) :

$$\mathcal{P}(S_3) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}. \tag{14}$$

Enfin, passons maintenant de $\mathcal{P}(S_3)$ à $\mathcal{P}(S_4)$ en appliquant la méthode de la question 2c avec $n = 4$ et donc $a_n = 4$. On a donc, en utilisant (14) :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(S_4) = \big\{&\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\},\\ &\{4\}, \{1,4\}, \{2,4\}, \{1,2,4\}, \{3,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}\big\},\end{aligned} \tag{15}$$

ce qui fait bien $2^4 = 16$ parties.

$\emptyset$
$\{1\}$
$\{2\}$
$\{1,2\}$
$\{3\}$
$\{1,3\}$
$\{2,3\}$
$\{1,2,3\}$
$\{4\}$
$\{1,4\}$
$\{2,4\}$
$\{1,2,4\}$
$\{3,4\}$
$\{1,3,4\}$
$\{2,3,4\}$
$\{1,2,3,4\}$

Table 1. Parties d'un ensemble à 4 éléments

Voir dans le tableau 1, les parties ainsi contruites pour $I = \{1,2,3,4\}$.

Voir de même dans le tableau 2 page suivante, les parties ainsi contruites pour $I = \{1,2,3,4,5\}$.

Remarque 1. La construction algorithmique de cet exercice a réellement été utilisée pour programmer une fonction qui a permis d'écrire automatiqument les tableaux 1 et 2. Ici, on peut procéder soit par récursivité soit par récurrence. Dans le premier cas, la définition de $\mathcal{P}(S_n)$ appelle la fonction appliquée à $\mathcal{P}(S_{n-1})$ grâce à (7) si $n \geq 1$ et sinon, si $n = 0$, $\mathcal{P}(S_n)$ est défini grâce à (1). Au contraire, par récurrence, on définit d'abord si $n = 0$, $\mathcal{P}(S_n)$ en utilisant (1). Ensuite, on utilise (7) successivement pour n variant de la valeur 1 à la valeur N, ce qui permet de définir $\mathcal{P}(S_N)$. En informatique, quand

$\emptyset$
$\{1\}$
$\{2\}$
$\{1,2\}$
$\{3\}$
$\{1,3\}$
$\{2,3\}$
$\{1,2,3\}$
$\{4\}$
$\{1,4\}$
$\{2,4\}$
$\{1,2,4\}$
$\{3,4\}$
$\{1,3,4\}$
$\{2,3,4\}$
$\{1,2,3,4\}$
$\{5\}$
$\{1,5\}$
$\{2,5\}$
$\{1,2,5\}$
$\{3,5\}$
$\{1,3,5\}$
$\{2,3,5\}$
$\{1,2,3,5\}$
$\{4,5\}$
$\{1,4,5\}$
$\{2,4,5\}$
$\{1,2,4,5\}$
$\{3,4,5\}$
$\{1,3,4,5\}$
$\{2,3,4,5\}$
$\{1,2,3,4,5\}$

Table 2. Parties d'un ensemble à 5 éléments

c'est possible, on privilégiera toujours la récurrence à la récursivité, consommatrice de gestion de pile, même si cette dernière est en théorie plus élégante !

(3) Enfin, la troisième méthode est traitée dans l'exemple 2.12 du cours et rappelée dans l'exercice suivant :
Énoncé

Soit I un ensemble quelconque.

(a) On rappelle que χ_A désigne la fonction caractéristique de $A \subset I$, égale à 1 sur A et 0 ailleurs.
Montrer qu'à toute partie A de $\mathcal{P}(I)$ on peut associer une unique application de I dans $\{0,1\}$ telle que $f = \chi_A$.

(b) En déduire une construction algorithmique des parties de l'ensemble $I = \{1, 2, ..., n\}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$. Traiter le particulier $n = 4$.

Corrigé

(a) Soit A une partie de $\mathcal{P}(I)$.
Considérons f une application de I dans $\{0, 1\}$ par

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \chi_A(x).$$

Par construction $f = \chi_A$. On admet que f est unique.
Réciproquement, soit f une application de I dans $\{0, 1\}$. On considère la partie A de I comme l'ensemble des antécédents de 1, notée

$$A = f^{-1}(1).$$

Par définition, $x \in A$ ssi $f(x) = 1$. Ainsi, $x \notin A$ ssi $f(x) \neq 1$, ce qui implique de $f(x) = 0$. Ainsi, f et χ_A valent 1 sur A et 0 ailleurs et sont donc égales.

(b) Énumérer les parties de I revient donc à énumérer les applications de I dans $\{0, 1\}$.
Si I est fini, de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$, f une application de $I = \{a_1, ..., a_n\}$ dans $\{0, 1\}$ est donnée par une n-liste formée uniquement de 0 et de 1, chacun d'eux représente successivement l'image de a_1, a_2, ..., a_n. À chacune de ces liste, on associe A telle que $\chi_A = f$, c'est-à-dire que l'on considère la partie des éléments de I qui ont pour image 1 par f. Pour énumérer toutes les applications de $I = \{a_1, ..., a_n\}$ dans $\{0, 1\}$, il suffit de compter en binaire de 0 à $2^n - 1$, ce qui représente bien 2^n possibilités, soit le nombre de parties de I. Pour chaque nombre ainsi en écrit en binaire, $\overline{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}$, où α_i est un chiffre dans $\{0, 1\}$, on considère la partie de A formée des éléments a_i tels que $\alpha_i = 1$.

nombres en binaires	parties
0000	$\emptyset$
0001	$\{4\}$
0010	$\{3\}$
0011	$\{3, 4\}$
0100	$\{2\}$
0101	$\{2, 4\}$
0110	$\{2, 3\}$
0111	$\{2, 3, 4\}$
1000	$\{1\}$
1001	$\{1, 4\}$
1010	$\{1, 3\}$
1011	$\{1, 3, 4\}$
1100	$\{1, 2\}$
1101	$\{1, 2, 4\}$
1110	$\{1, 2, 3\}$
1111	$\{1, 2, 3, 4\}$

Table 3. Parties d'un ensemble à 4 éléments

Voir dans le tableau 3, les parties ainsi contruites pour $I = \{1, 2, 3, 4\}$.
De même, voir dans le tableau 4 page suivante, les parties ainsi contruites pour $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

nombres en binaires	parties
00000	$\emptyset$
00001	$\{5\}$
00010	$\{4\}$
00011	$\{4,5\}$
00100	$\{3\}$
00101	$\{3,5\}$
00110	$\{3,4\}$
00111	$\{3,4,5\}$
01000	$\{2\}$
01001	$\{2,5\}$
01010	$\{2,4\}$
01011	$\{2,4,5\}$
01100	$\{2,3\}$
01101	$\{2,3,5\}$
01110	$\{2,3,4\}$
01111	$\{2,3,4,5\}$
10000	$\{1\}$
10001	$\{1,5\}$
10010	$\{1,4\}$
10011	$\{1,4,5\}$
10100	$\{1,3\}$
10101	$\{1,3,5\}$
10110	$\{1,3,4\}$
10111	$\{1,3,4,5\}$
11000	$\{1,2\}$
11001	$\{1,2,5\}$
11010	$\{1,2,4\}$
11011	$\{1,2,4,5\}$
11100	$\{1,2,3\}$
11101	$\{1,2,3,5\}$
11110	$\{1,2,3,4\}$
11111	$\{1,2,3,4,5\}$

Table 4. Parties d'un ensemble à 5 éléments

Remarque 2. La construction algorithmique de cet exercice a réellement été utilisée pour programmer une fonction qui a permis d'écrire automatiquement les tableaux 3 et 4.

Sous matlab, il est aussi possible d'utiliser la fonction `nchoosek` qui permet de définir toutes les parties à nombres d'éléments donnés d'un ensemble.

Correction de l'exercice 2.
On obtient les résultats suivants

(1) Le système admet une solution unique donnée par

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(2) Le système admet une solution unique donnée par

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 3.

(1) (a) f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2},$$

qui ne s'annulle qu'en x_0 définie par

$$x_0 = e.$$

(b) Ainsi, f est strictement croissante sur $]0, e]$ et strictement décroisssante sur $[e, +\infty[$. On a aussi

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0,$$
$$f(e) = e^{-1}.$$

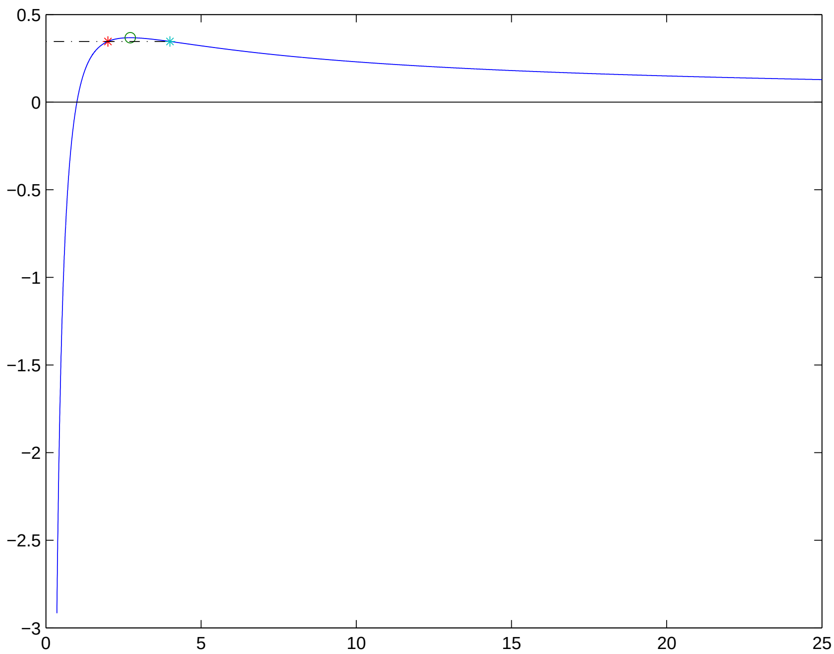

Figure 1. La fonction f

On en déduit aisément le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}_+^*$ et le graphe de f. Voir figure 1.

(2) (a) De ce qui précède, on déduit que f est injective sur $]0, e]$ et sur $[e, +\infty[$. Ainsi, s'il existe $x, y > 0$ tels que $f(x) = f(y)$ avec $x \neq y$, on a nécessairement (par exemple, en supposant $x < y$) $x \in]0, e]$ et $y \in [e, +\infty[$. En effet, si ce n'était le cas, on aurait soit $x, y \in]0, e]$, soit $x, y \in [e, +\infty[$, ce qui n'est pas possible, vu le caractère injectif de f sur $]0, e]$ ou sur $[e, +\infty[$. Puisque $y > e$, on a $\ln(y)/y >$ et donc $\ln(x)/x > 0$ et donc $\ln(x) > 0$ et donc $x \in]1, e[$. Bref, on a

$$x \in]1, e[\text{ et } y > e. \tag{16}$$

(b) Cherchons maintenant x entier, qui ne peut être que 2 ($e \approx 2.7$). On a $f(x) = \ln(x)/x \in]0, 1/e[$. D'après l'étude de f, on peut affirmer qu'il existe un unique $y > e$ tel que $f(y) = f(x)$. Or on remarque que

$$\frac{\ln(4)}{4} = \frac{\ln(2^2)}{4} = \frac{\ln(2)}{2}.$$

et donc

$$x = 2 \text{ et } y = 4. \tag{17}$$

(3) Supposons que

$$(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad p^q = q^p. \tag{18}$$

Il est clair que $p = q \in \mathbb{N}^*$ fournit une solution de (18). Supposons maintenant que $p \neq q$ avec par exemple $p < q$. (18) est équivalent à

$$\ln(p^q) = \ln(q^p),$$

ce qui est équivalent à

$$q \ln(p) = p \ln(q),$$

et donc

$$p, q \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{\ln(p)}{p} = \frac{\ln(p)}{p}. \tag{19}$$

On a donc

$$p, q \in \mathbb{N}^*, \quad p < q, \quad f(p) = f(q), \tag{20}$$

avec

$$\forall x > 0, \quad f(x) = \frac{\ln(x)}{x}. \tag{21}$$

D'après les deux points 1 et 2, on a alors nécessairement $p = 2$ et $q = 4$. Bref, les solutions de (18) sont les couples (p, p) où q appartient à $\mathbb{N}^*$ et $(2, 4)$ et $(4, 2)$.

Correction de l'exercice 4.

(1) On trouve en utilisant par exemple la fonction suivante
`http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MFI/fichiers_matlab/developpement_limite.m`,

$$f(x) = 4\,x^3 + o\left(x^4\right).$$

(2) On trouve

$$f(x) = -1/12\,x^4 + 1/6\,x^3 - 1/2\,x^2 + x + o\left(x^4\right).$$

Correction de l'exercice 5.
Exercice issu de la question 7 de l'exercice de TD 4.4.
On obtient

$$I = -2\,\ln\left(\sqrt{2} - 1\right),$$

En effet :

On cherche à calculer dans cet exercice, l'intégrale I définie par

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

Deux façons de faire sont possibles. La première est très longue et fastidieuse, la seconde, beaucpoup plus rapide, mais nécessite de passer par la trigonométrie hyperbolique.

(1) On procède en plusieurs étapes :

(a) Remarquons que par parité

$$I = 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}. \tag{22}$$

Si fait le changement de variable

$$x = \tan(t),$$

on a

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(\tan t) = \frac{1}{\cos^2 t}$$

et donc, il vient

$$dx = \frac{dt}{\cos^2 t}.$$

On a aussi

$$\tan^2 t + 1 = \frac{1}{\cos^2(t)}.$$

Enfin, $x = 0$ correspond à $t = 0$ et $x = 1$ correspond à $t = \pi/4$. Bref, il vient [1]

$$\begin{aligned} I &= 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}, \\ &= 2\int_0^{\pi/4} \frac{dt}{\cos^2 t\sqrt{\tan^2 t+1}}, \\ &= 2\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 t} \left|\cos(t)\right| dt. \end{aligned}$$

Sur $[0, \pi/4]$, la fonction cos est positive et donc

$$I = 2\int_0^{\pi/4} \frac{dt}{\cos t}.$$

(b) La méthode générale de la section E.2.2.1 du cours suggère de faire le changement de variable

$$u = \tan\left(\frac{t}{2}\right). \tag{23}$$

Mais, ici, les règle simplificatrices de Bioche de la section E.2.2.2 nous invite à faire le changement de variable

$$u = \sin t \tag{24}$$

puisque

$$\cos(\pi - t) = -\cos(-t) = -\cos t$$

On a donc

$$du = -\cos t dt.$$

1. Puisque $\sqrt{a^2} = |a|$, pour tout réel !

Pour $t=0$, on a $u=0$ et pour $t=\pi/4$, $u=\sqrt{2}/2$. Il vient donc

$$
\begin{aligned}
I &= 2\int_0^{\pi/4} \frac{dt}{\cos t},\\
&= -2\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{du}{\cos t}\frac{1}{\cos t},\\
&= -2\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{du}{\cos^2 t},\\
&= 2\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{du}{1-\sin^2 t},
\end{aligned}
$$

et donc

$$I = -2\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{du}{u^2-1}.$$

Remarque 3. Le lecteur averti remarquera que la fonction $u \mapsto u^2-1$ ne s'annulle pas sur $[0,\sqrt{2}/2]$ et donc que la fonction à intégrer est bien continue !

(c) On utilise maintenant la section E.1 du cours qui suggère de décomposer $1/(u^2-1)$ en éléments simples : on montre donc aisément

$$\frac{1}{u^2-1} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{u+1}-\frac{1}{u-1}\right).$$

Les primitives des fonctions $u\mapsto 1/(u-1)$ et $u\mapsto 1/(u+1)$ sont [2] $u\mapsto \ln|u-1|$ et $u\mapsto \ln|u+1|$ et donc

$$
\begin{aligned}
I &= -\int_0^{\sqrt{2}/2}\left(\frac{1}{u+1}-\frac{1}{u-1}\right)du,\\
&= -\left[\ln|u+1|-\ln|u+1|\right]_{u=0}^{u=\sqrt{2}/2},\\
&= -\left[\ln\left|\frac{u+1}{1-u}\right|\right]_{u=0}^{u=\sqrt{2}/2},
\end{aligned}
$$

et donc

$$I = \ln\left(\frac{\sqrt{2}/2+1}{-\sqrt{2}/2+1}\right).$$

On peut simplifier l'argument du logarithme de façon classique :

$$
\begin{aligned}
\frac{\sqrt{2}/2+1}{-\sqrt{2}/2+1} &= \frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}},\\
&= \frac{(2+\sqrt{2})^2}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})},\\
&= \frac{6+4\sqrt{2}}{4-2},\\
&= 3+2\sqrt{2},\\
&= \left(\sqrt{2}+1\right)^2,
\end{aligned}
$$

2. sur des intervalles où $u-1$ et $u+1$ sont de signe constant, ce qui est le cas ici.

et donc

$$I = \ln\left(\left(\sqrt{2}+1\right)^2\right),$$

et finalement

$$I = -2\,\ln\left(\sqrt{2}-1\right),$$

dont on vérifie que cela vaut bien

$$I = 2\ln\left(\sqrt{2}+1\right),$$

puisque l'on a

$$\begin{aligned} 2\ln\left(\sqrt{2}+1\right)+2\ln\left(\sqrt{2}-1\right) &= 2\ln\left(\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)\right), \\ &= 2\ln\left(2-1\right), \\ &= 0. \end{aligned}$$

(2) Beaucoup plus rapidement, On reprend (22), dans la quelle on fait le changement de variable :

$$x = \sinh(t) = \frac{1}{2}\left(e^t - e^{-t}\right),$$

on a donc

$$dx = (\sinh(t))'dt = \cosh(t)dt.$$

Si $x=0$, on a $t=0$ puisque $\sinh(0)=0$. Cherchons à résoudre

$$1 = \sinh(t), \tag{25}$$

dont on sait que la solution est unique puisque sinh définit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour cela, on peut utiliser la fonction réciproque de sinh, connue, ou la retrouver. (25) est successivement équivalente à

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(e^t - e^{-t}\right) = 1 &\Longleftrightarrow e^t - e^{-t} = 2, \\ &\Longleftrightarrow e^{2t} - 1 = 2e^t, \\ &\Longleftrightarrow X^2 - 2X - 1 = 0, \end{aligned}$$

où $X = e^t$. On sait que $X \geq 1$ car $t \geq 0$. On résoud cette équation du second degré de discriminant réduit $\Delta' = 1 - \times(-1) = 1 + 1 = 2$ et donc

$$X = 1 \pm \sqrt{2},$$

dont la seule racine plus grande que 1 est

$$X = 1 + \sqrt{2}$$

et on a enfin

$$t = \ln(X) = \ln\left(1+\sqrt{2}\right).$$

On a donc successivement

$$\begin{aligned}
I &= 2\int_{t=0}^{t=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)} \frac{\cosh(t)dt}{\sqrt{1+\sinh(t)^2}},\\
&= 2\int_{t=0}^{t=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)} \frac{\cosh(t)dt}{\sqrt{\cosh(t)^2}},\\
&= 2\int_{t=0}^{t=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)} \frac{\cosh(t)dt}{|\cosh(t)|},\\
&= 2\int_{t=0}^{t=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)} dt,\\
&= 2\ln\left(1+\sqrt{2}\right).
\end{aligned}$$